

BAB III

FUNGSI UJI DAN DISTRIBUSI

Bab ini membahas tentang fungsi uji dan distribusi di mana ruang yang memuat keduanya secara berturut-turut dinamakan ruang fungsi uji dan ruang distribusi. Ruang fungsi uji pada penelitian ini dibahas secara analisis fungsional dengan memandangnya sebagai ruang vektor bertopologi. Pembahasan ruang fungsi uji ini lebih banyak mengacu kepada Rudin (1991). Adapun pembahasan ruang distribusi sebagian besar merujuk kepada Friedlander (1998).

Pemahaman terhadap ruang fungsi uji (selanjutnya dinotasikan dengan $\mathcal{D}(\Omega)$) diperlukan untuk memahami definisi distribusi Schwartz yang akan dijelaskan pada subbab 3.3. Ruang fungsi uji ini akan menjadi domain dari bentuk-bentuk linear yang disebut distribusi (distribusi Schwartz). Pendefinisian ruang fungsi uji dibangun oleh ruang $\mathcal{D}_K$, yaitu ruang yang memuat semua fungsi bernilai kompleks yang memiliki turunan tak hingga kali dan kontinu di $\mathbb{R}^n$, serta memenuhi kondisi bahwa *support* dari fungsi-fungsi tersebut merupakan himpunan bagian dari himpunan kompak K di $\mathbb{R}^n$. Adapun *support* dari fungsi f adalah *closure* (penutup) dari himpunan bagian dari domain f sedemikian sehingga nilai fungsi di titik-titik tersebut tidak nol.

3.1 Konsep Membangun Ruang Fungsi Uji

Pembahasan ruang fungsi uji dan distribusi Schwartz diawali dengan penjelasan tentang istilah multi-indeks, yaitu *n-tuple* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ dengan $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ bilangan bulat tak negatif, di mana setiap multi-indeks α dihubungkan dengan operator diferensial $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ dengan $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$. Panjang atau order dari α didefinisikan dengan $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

Ruang semua fungsi bernilai kompleks yang turunannya ada dan kontinu untuk setiap multi-indeks α dinotasikan dengan $C^\infty(\Omega)$. Selanjutnya keanggotaan $C^\infty(\Omega)$ didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1.1

Misal diberikan himpunan buka tak kosong $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Fungsi bernilai kompleks f yang didefinisikan di Ω dikatakan anggota dari $C^\infty(\Omega)$ jika $\partial^\alpha f$ ada dan kontinu untuk setiap multi-indeks α .

Sebagai catatan bahwa dalam tulisan ini Ω selalu menotasikan himpunan buka tak kosong di $\mathbb{R}^n$, sehingga jika notasi Ω muncul kembali dalam pembahasan tanpa adanya keterangan maka yang dimaksud adalah sebagaimana yang telah dijelaskan. Selanjutnya akan didefinisikan istilah *support* fungsi.

Definisi 3.1.2

Misalkan fungsi kontinu $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dan himpunan $S = \{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$. *Support* dari f yang dinotasikan dengan $\text{supp } f$ adalah *closure* (penutup) dari S di Ω .

Perhatikan bahwa definisi tersebut mengatakan $\text{supp } f$ adalah himpunan bagian tutup dari Ω .

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa definisi $\mathcal{D}(\Omega)$ dibangun oleh $\mathcal{D}_K$ di mana $\mathcal{D}_K$ didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1.3

Misalkan K himpunan kompak di $\mathbb{R}^n$. Himpunan $\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \text{supp } f \subseteq K\}$ dinamakan dengan ruang $\mathcal{D}_K$.

Sebagai catatan, definisi di atas mengatakan bahwa fungsi-fungsi di $\mathcal{D}_K$ bernilai nol di luar suatu himpunan yang tutup dan terbatas.

Di awal pembahasan telah disebutkan bahwa $\mathcal{D}(\Omega)$ dibangun oleh $\mathcal{D}_K$ di mana $\mathcal{D}_K$ berkaitan dengan fungsi-fungsi di $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, yaitu $\mathcal{D}_K \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Oleh karena itu, dipandang perlu untuk mengetahui sifat dari kedua ruang tersebut ($C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dan $\mathcal{D}_K$). Berikut ini akan dijelaskan sifat

dari ruang $C^\infty(\Omega)$ dan $\mathcal{D}_K$. Diperlukan pemahaman mengenai ruang *Frechet* dan sifat *Heine-Borel* sebagaimana telah dijelaskan pada bab sebelumnya untuk mempelajari sifat berikut ini.

Proposisi 3.1.4 (Rudin, 1991, hlm. 35)

$C^\infty(\Omega)$ merupakan ruang *Fréchet* dengan sifat *Heine-Borel*.

Bukti :

Ide-ide utama untuk menunjukkan $C^\infty(\Omega)$ merupakan ruang *Fréchet* sebagai berikut:

1. Menunjukkan terdapat basis lokal konveks untuk $C^\infty(\Omega)$
2. Menunjukkan $C^\infty(\Omega)$ *metrizable* lengkap

Ide pertama ditunjukkan melalui proses berikut ini.

Bentuk barisan monoton kuat dari himpunan kompak yang konvergen ke Ω , yakni pilih himpunan kompak $K_j, j = 1, 2, \dots$ sedemikian sehingga K_j terletak di interior K_{j+1} (dinotasikan $\text{Int } K_{j+1}$) dan $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

Definisikan seminorm p_N untuk $N = 1, 2, \dots$, dengan aturan

$$p_N(f) = \max\{|\partial^\alpha f(x)| : x \in K_N, |\alpha| \leq N\}$$

Keluarga dari seminorm p_N membangun topologi τ untuk $C^\infty(\Omega)$ dan perhatikan bahwa keluarga tersebut *separating* di $C^\infty(\Omega)$. Selanjutnya, konstruksi keluarga V_N dengan

$$V_N = \left\{ f \in C^\infty(\Omega) : p_N(f) < \frac{1}{N} \right\}$$

untuk $N = 1, 2, \dots$. Perhatikan bahwa (V_N) monoton turun. Karena keluarga dari seminorm p_N *separating* di $C^\infty(\Omega)$ dan dari definisi V_N , berdasarkan Teorema 2.7.24, keluarga V_N adalah basis lokal seimbang konveks untuk topologi τ di $C^\infty(\Omega)$.

Ide yang kedua akan ditunjukkan melalui proses berikut.

Langkah pertama adalah menunjukkan $C^\infty(\Omega)$ *metrizable*. Karena keluarga p_N terhitung maka Teorema 2.7.24 mengisyaratkan bahwa

keluarga V_N melahirkan topologi τ dengan basis lokal yang terhitung. Menurut Teorema 2.7.22, τ metrizable.

Definisikan metrik d sebagai berikut

$$d(f, g) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{2^{-N} p_N(f - g)}{1 + p_N(f - g)}.$$

d compatible terhadap τ dan metrik tersebut invarian (catatan 2.7.25).

Selanjutnya, menunjukkan d metrik lengkap. Menurut Definisi 2.7.23, dapat dibuktikan metrik ini lengkap dengan menunjukkan setiap barisan Cauchy di $C^\infty(\Omega)$ konvergen di $C^\infty(\Omega)$. Sebelumnya, ditunjukkan setiap barisan Cauchy di $C^\infty(\Omega)$ konvergen.

Ambil sembarang barisan Cauchy (f_i) di $C^\infty(\Omega)$. Menurut Definisi 2.7.23, jika (f_i) barisan Cauchy, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sedemikian sehingga $d(f_i, f_j) < \varepsilon$ untuk semua $i, j > N$. Akibatnya $p_N(f_i - f_j) < \frac{1}{N}$ sehingga $f_i - f_j \in V_N$, yakni

$$|\partial^\alpha f_i - \partial^\alpha f_j| < \frac{1}{N} \text{ pada } K_N \text{ jika } |\alpha| \leq N.$$

Karenanya, diperoleh setiap $D^\alpha f_i$ konvergen (seragam pada himpunan bagian kompak di Ω) ke fungsi g_α .

Selanjutnya akan ditunjukkan setiap barisan Cauchy $C^\infty(\Omega)$ konvergen di $C^\infty(\Omega)$.

Telah ditunjukkan $\partial^\alpha f_i \rightarrow g_\alpha$. Secara khusus, jika diambil suatu $x \in \Omega$ dan $\alpha = 0$, $f_i(x) \rightarrow g_0(x)$. Karenanya, $\partial^\alpha f_i \rightarrow g_\alpha = \partial^\alpha g_0$, artinya $g_0 \in C^\infty(\Omega)$, dan $f_i \rightarrow g$ pada topologi di $C^\infty(\Omega)$ (menurut Definisi 2.7.23).

Jadi, $C^\infty(\Omega)$ adalah ruang Fréchet.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $C^\infty(\Omega)$ memenuhi sifat Heine-Borel. Jika diketahui $E \subset C^\infty(\Omega)$ kompak, maka dengan menggunakan Lemma 2.7.2 E tutup dan terbatas.

Misalkan $E \subset C^\infty(\Omega)$ tutup dan terbatas. Akan ditunjukkan E kompak. Menurut Teorema 2.7.24, karena E terbatas maka p_N terbatas di E , artinya terdapat $M_N < \infty$ sedemikian sehingga $p_N(f) \leq M_N$ untuk $N = 1, 2, \dots$ dan untuk semua $f \in E$. Definisi p_N menunjukkan bahwa $|\partial^\alpha f| \leq M_N$

pada K_N ketika $|\alpha| \leq N$. Akibatnya, himpunan $\{\partial^\beta f : f \in E\}$ *equicontinuous* pada K_{N-1} ketika $|\beta| \leq N - 1$. Menurut teorema Ascoli dan proses diagonal Cantor (Rudin, 1991, hlm.394), setiap barisan di E memuat subbarisan (f_i) yang mana barisan $(\partial^\beta f_i)$ konvergen (seragam pada himpunan kompak di Ω) untuk setiap multi-indeks β . Karenanya, (f_i) konvergen pada topologi di $C^\infty(\Omega)$.

Terbukti bahwa $C^\infty(\Omega)$ kompak. Jadi, $C^\infty(\Omega)$ memenuhi sifat Heine-Borel. ■

Selanjutnya, proposisi berikut ini menyatakan sifat dari $\mathcal{D}_K$.

Proposisi 3.1.5 (Rudin, 1991, hlm. 35)

$\mathcal{D}_K$ merupakan subruang tutup dari $C^\infty(\Omega)$ untuk setiap $K \subset \Omega$.

Bukti:

Akan ditunjukkan $\mathcal{D}_K$ subruang tutup dari $C^\infty(\Omega)$

Untuk setiap $x \in \Omega$, fungsional $F_x : f \mapsto f(x)$ kontinu pada topologi yang dilahirkan oleh keluarga p_N untuk $N = 1, 2, \dots$ sebagaimana p_N telah didefinisikan pada pembuktian Proposisi 3.1.4.

Perhatikan bahwa

$$\mathcal{D}_K = \bigcap_{x \in \Omega \setminus K} \ker F_x,$$

Menurut Teorema 2.7.21, karena F_x kontinu maka $\ker F_x$ tutup. Dengan demikian, $\mathcal{D}_K$ merupakan subruang tutup dari $C^\infty(\Omega)$ untuk sembarang himpunan bagian kompak K dari Ω . ■

3.2 Ruang Fungsi Uji dan Sifat-sifatnya

Setelah pembahasan konsep membangun ruang fungsi uji, selanjutnya ruang fungsi uji dapat didefinisikan seperti dijelaskan berikut. Definisi ini diadaptasi dari definisi ruang fungsi uji pada Ta Ngoc Tri (2005, hlm.6).

Definisi 3.2.1

Misalkan A koleksi semua ruang $\mathcal{D}_K$ di mana $K \subseteq \Omega$ kompak. Ruang fungsi uji $\mathcal{D}(\Omega)$ didefinisikan dengan

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{\mathcal{D}_K \in A} \mathcal{D}_K$$

Anggota dari ruang fungsi uji dinamakan *fungsi uji*. Gambaran lebih jelas tentang fungsi uji dapat dilihat melalui contoh berikut ini.

Contoh 3.2.1

Diberikan $f(t) = e^{\frac{1}{t}}$ untuk $t < 0$ dan $f(t) = 0$ untuk $t \geq 0$. Dapat ditunjukkan bahwa $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Misalkan $g(x) = f(|x|^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}^n$

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Perhatikan bahwa $\text{supp } g$ yaitu bola satuan tutup $\{|x| \leq 1\}$.

Pilih $K = \text{supp } g$ sehingga $\text{supp } g \subset K$ kompak, dengan demikian $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Definisi 3.2.1 menunjukkan bahwa $\mathcal{D}(\Omega)$ merupakan ruang vektor dari fungsi-fungsi bernilai kompleks yang dilengkapi dengan definisi penjumlahan dan perkalian skalar biasa. Perhatikan pula bahwa $\emptyset \in \mathcal{D}(\Omega)$ jika dan hanya jika $\emptyset \in C^\infty(\Omega)$ dan $\text{supp } \emptyset$ merupakan himpunan bagian kompak dari Ω .

Sebuah topologi *locally convex* τ (2.7.15) dapat dikonstruksi pada $\mathcal{D}(\Omega)$ sedemikian sehingga semua barisan Cauchy konvergen. Hal ini dapat diperoleh dengan mengambil τ sebagai koleksi dari gabungan himpunan-himpunan dengan bentuk $\phi + W$, di mana $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dan $W \in \beta$. Adapun β yaitu koleksi dari semua himpunan *convex balanced* (2.7.14) $W \subset \mathcal{D}(\Omega)$ di mana $\mathcal{D}_K \cap W \in \tau_K$, untuk setiap himpunan

kompak $K \subset \Omega$ dengan τ_k telah didefinisikan pada $\mathcal{D}_k$. Penjelasan lebih rinci dapat merujuk kepada *Functional Analysis* (Rudin, 1991, hlm.152-155) berikut pula pembuktiannya.

Berikut ini beberapa sifat-sifat penting dari topologi di $\mathcal{D}(\Omega)$.

Proposisi 3.2.2

- a. τ merupakan topologi di $\mathcal{D}(\Omega)$ dan β merupakan basis lokal untuk τ
- b. τ membuat $\mathcal{D}(\Omega)$ menjadi *locally convex topological vector space*
- c. τ_k bertepatan dengan topologi subruang $\mathcal{D}_k$ yang inherits dari $\mathcal{D}(\Omega)$
- d. $\mathcal{D}_k$ memiliki sifat Heine-Borel
- e. Jika (ϕ_j) merupakan barisan di $\mathcal{D}(\Omega)$, maka $(\phi_j) \subset \mathcal{D}_k$ untuk suatu $K \subset \Omega$ yang kompak, dan

$$\lim_{k,j \rightarrow \infty} \sup\{|\partial^\alpha \phi_k(x) - \partial^\alpha \phi_j(x)| : x \in \Omega; |\alpha| \leq N\} = 0$$

di mana $N = 0, 1, 2, \dots$

- f. Jika $(\phi_j) \rightarrow 0$ ketika $j \rightarrow \infty$ di τ , maka terdapat himpunan kompak $K \subset \Omega$ yang memuat support dari setiap ϕ_j , $j = 1, 2, \dots$ dan $\partial^\alpha \phi_j \rightarrow 0$ seragam ketika $j \rightarrow \infty$, untuk setiap multi-indeks α .
- g. Setiap barisan Cauchy di $\mathcal{D}(\Omega)$ konvergen.

Sifat berikutnya adalah bahwa $C^\infty(\Omega)$ dan $\mathcal{D}(\Omega)$ merupakan ruang Montel. Ruang Montel ini merupakan salah satu jenis khusus dari ruang vektor topologi. Sifat khusus yang dimiliki ruang Montel yaitu : *Ruang Montel selalu refleksif* (Horvath, 1966, hlm.231). Berikut ini akan dijelaskan definisi dari ruang Montel.

Definisi 3.2.3 (Ta Ngoc Tri, 2005, hlm.8)

Ruang vektor topologi X disebut ruang Montel jika X merupakan ruang Hausdorff *locally convex* sedemikian sehingga setiap himpunan bagian dari X yang *absorbing*, *balanced*, dan tutup adalah persekitaran dari nol di X , serta X memiliki sifat Heine-Borel.

Sebagai catatan, semua istilah pada Definisi 3.2.3 telah dijelaskan pada bab dua subbab 2.7.

Proposisi 3.2.4

$C^\infty(\Omega)$ dan $\mathcal{D}(\Omega)$ merupakan ruang Montel.

Bukti:

Proposisi 3.1.4 menunjukkan bahwa $C^\infty(\Omega)$ adalah ruang *Frechet* dengan sifat *Heine-Borel*. Selanjutnya perhatikan bahwa dari Proposisi 3.1.5, Proposisi 3.2.2 (d), dan Definisi 3.2.1, disimpulkan bahwa $\mathcal{D}(\Omega)$ memiliki sifat yang sama dengan $C^\infty(\Omega)$ (ruang *Frechet* dengan sifat *Heine-Borel*). Akibatnya, berdasarkan definisi ruang *Frechet* (2.7.16), Teorema 2.7.17, serta Teorema 2.7.18 terbukti bahwa $C^\infty(\Omega)$ dan $\mathcal{D}(\Omega)$ merupakan ruang Montel. ■

Dengan demikian, $C^\infty(\Omega)$ dan $\mathcal{D}(\Omega)$ memiliki sifat refleksif. Karena keterbatasan, pada penelitian ini tidak terdapat pembahasan khusus tentang refleksivitas (untuk pembaca yang tertarik boleh merujuk kepada Hovarth (1966) pada daftar pustaka).

3.3 Distribusi Schwartz

Dalam teori distribusi, bentuk linear merupakan fungsi pada $\mathcal{D}(\Omega)$. Sebagaimana telah dibahas sebelumnya bahwa anggota-anggota dari $\mathcal{D}(\Omega)$ adalah suatu fungsi uji.

Definisi 3.3.1

Jika V ruang vektor atas lapangan kompleks $\mathbb{C}$, maka bentuk linear u pada V adalah suatu homomorfisma dari V ke $\mathbb{C}$.

Selanjutnya, koleksi dari semua bentuk linear dari V ke $\mathbb{C}$ dinotasikan dengan $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$. Sifat yang dipenuhi oleh bentuk linear pada ruang vektor $\text{Hom}(V, \mathbb{C})$ adalah sebagai berikut.

$$\langle cu, \phi \rangle = c \langle u, \phi \rangle$$

$$\langle u + v, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle + \langle v, \phi \rangle$$

dengan $c \in \mathbb{C}$, $u, v \in \text{Hom}(V, \mathbb{C})$, dan $\phi \in V$.

Setelah pembahasan tentang ruang fungsi uji $\mathcal{D}(\Omega)$ dan juga bentuk linear, akhirnya dapat dijelaskan definisi distribusi atau distribusi Schwartz yang menurut Rudin (*Functional Analysis*, 1991, hlm.149) dikenal pula dengan istilah *generalized function*.

Definisi 3.3.2 (Friedlander, 1998, hlm. 7)

Bentuk linear $u: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ disebut *distribusi* (atau distribusi Schwartz), jika untuk setiap $K \subset \Omega$ kompak, terdapat bilangan real $c \geq 0$ dan bilangan bulat non-negatif N sedemikian sehingga

$$|\langle u, \phi \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq N} \sup |\partial^\alpha \phi|$$

untuk semua $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dengan $\text{supp } \phi \subset K$.

Ruang vektor dari distribusi di Ω dinotasikan dengan $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Sebagai catatan, distribusi u memetakan setiap $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ ke suatu bilangan kompleks. Nilai distribusi u di ϕ dinotasikan dengan $\langle u, \phi \rangle$.

Struktur ruang vektor di $\mathcal{D}'(\Omega)$ terbentuk dengan pendefinisian penjumlahan vektor dan perkalian skalar sebagai berikut:

$$\langle u + v, \phi \rangle = \langle u, \phi \rangle + \langle v, \phi \rangle,$$

$$\langle cu, \phi \rangle = c \langle u, \phi \rangle$$

dengan $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $c \in \mathbb{C}$.

Contoh distribusi diantaranya :

- a) $f: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ dengan $\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx$, $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$, di mana f fungsi kontinu di Ω .

b) Fungsi *Dirac*

$\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ sedemikian sehingga $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$, untuk setiap $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Contoh (a) di atas merupakan distribusi yang sederhana tapi memiliki peranan penting. Contoh tersebut dituliskan dalam teorema berikut ini.

Teorema 3.3.3

Misal $f \in C^0(\Omega)$, maka f yang didefinisikan dengan

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

merupakan distribusi.

Bukti :

Perhatikan bahwa f dengan

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

adalah bentuk linear.

Ambil sembarang $K \subset \Omega$ kompak.

Untuk semua $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dengan $\text{supp } \phi \subset K$ artinya ϕ bernilai nol di luar K sehingga dapat ditulis

$$\int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx = \int_K f(x) \phi(x) dx$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |\langle f, \phi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx \right| = \left| \int_K f(x) \phi(x) dx \right| \\ &\leq \int_K |f(x) \phi(x)| dx \end{aligned}$$

Karena K kompak, artinya K tutup dan terbatas, sehingga

$$\int_K |f(x) \phi(x)| dx \leq \int_K |f(x)| \sup |\phi(x)| dx$$

$$= \sup |\phi(x)| \int_K |f(x)| dx \leq c \sup |\partial^0 \phi|$$

Perhatikan f terbatas (karena f kontinu pada domain tutup dan terbatas K). Jadi, f dengan $\langle f, \phi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \phi(x) dx, \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ merupakan distribusi. ■

Contoh lainnya yang mendasar dalam teori distribusi yaitu distribusi *Dirac* (fungsi delta atau fungsi delta *Dirac*) yang merupakan anggota dari $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Fungsi *Dirac* mendapatkan perhatian khusus dalam teori distribusi berkaitan dengan motivasi munculnya teori distribusi yang salah satunya dilatarbelakangi oleh eksistensi fungsi ini dalam fisika. Fungsi aneh ini muncul pada permulaan abad ke-20 yang diperkenalkan oleh fisikawan Inggris Paul A. M Dirac (1902-1982). Fungsi ini menggambarkan suatu keadaan fenomena fisika yang memiliki nilai di suatu titik (singular pada suatu titik), tetapi pada titik lainnya bernilai nol. Selain itu, nilai integral fungsi tersebut sepanjang domainnya adalah satu. Secara kalkulus biasa, eksistensi fungsi semacam ini adalah sebuah kemustahilan, akan tetapi jika dipandang sebagai distribusi maka eksistensi fungsi ini dapat diakui secara matematis sebagaimana dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.3.4

Fungsi Dirac yang didefinisikan

$\delta : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ dengan $\langle \delta, \phi \rangle = \phi(0)$, untuk semua $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ merupakan distribusi.

Bukti :

Perhatikan $|\langle \delta, \phi \rangle| = |\phi(0)| \leq 1. \sup |\phi(x)| = 1. \sup |\partial^0 \phi|$

untuk semua $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sedemikian sehingga $\text{supp } \phi \subset K$, dengan K himpunan bagian kompak di $\mathbb{R}^n$. ■

Sesuai dengan nama fungsinya, distribusi δ disebut juga distribusi *Dirac*.