BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Ilmu matematika senantiasa mengalami perkembangan dari masa ke masa. Banyak penemuan dan atau pengembangan penting hasil pemikiran para matematikawan yang membawa kepada kemajuan dalam bidang matematika. Salah satunya yaitu pengembangan terhadap matematika modern yang dilakukan oleh Laurent Schwartz tentang teori distribusi, atau yang disebut juga dengan distribusi Schwartz sesuai dengan nama sang Penemu. Schwartz mengajukan teori distribusi ini pada tahun 1940. Teori ini berperan penting dalam pengembangan matematika, misalnya pada pengembangan Persamaan Diferensial Parsial. Atas teori ini, L. Schwartz memenangkan *Fields Medal* pada tahun 1950. Penghargaan bergengsi ini merupakan pengakuan dunia matematika atas karyanya yang luar biasa.

Salah satu motivasi terciptanya teori distribusi ini adalah untuk mengatasi permasalahan banyaknya fungsi biasa yang tidak memiliki turunan. Dalam teori distribusi ini diperoleh suatu ruang yang memuat fungsi-fungsi di mana semua anggotanya memiliki turunan, yang bersesuaian dengan turunan biasa jika merupakan fungsi yang dapat diturunkan (secara kalkulus biasa). Karenanya, teori distribusi memberikan solusi pada kalkulus diferensial atas kesulitan-kesulitan tertentu yang muncul akibat adanya fungsi-fungsi yang tak terdiferensialkan. “*This is done by extending it to a class of objects (called distributions or generalized function) which is much larger than the class of differentiable function to which calculus applies in its original form* (Rudin, 1991, hlm.149).

Menurut Rudin (1991, hlm.149), munculnya definisi distribusi (Schwartz) dilatarbelakangi oleh harus dipenuhinya sifat-sifat berikut:

- a. Setiap fungsi kontinu harus merupakan distribusi.

- b. Setiap distribusi harus memiliki turunan parsial yang juga merupakan distribusi yang bersesuaian dengan turunan biasa jika merupakan fungsi yang terdiferensialkan. Karenanya, setiap distribusi harus terdiferensialkan tak hingga kali.
- c. Berlakunya aturan formal yang biasa diterapkan di kalkulus.
- d. Terdapatnya teorema kekonvergenan untuk menyelesaikan proses limit biasa.

Friedlander (1998) mendefinisikan distribusi sebagai suatu bentuk linear pada domain yang dinamakan ruang fungsi uji dengan memenuhi kondisi keterbatasan tertentu. Ruang yang memuat semua distribusi inilah yang dinamakan dengan ruang distribusi.

Berdasarkan uraian di atas, jelas bahwa distribusi Schwartz berkaitan erat dengan keterdiferensialan fungsi sehingga berkaitan dengan fungsi-fungsi kontinu. Oleh karena itu, distribusi Schwartz dapat dikaitkan pula dengan fungsi yang terintegralkan. Salah satu teori integral yang telah dikenal secara luas adalah integral Lebesgue (yang diambil dari nama sang Penemu, Henri Lebesgue). Integral ini merupakan kasus khusus dari perumuman integral yang didefinisikan oleh Riemann (Bartle dan Sherbert, 2011). Lebesgue juga memperkenalkan ruang Lebesgue (dinotasikan L_p), yaitu himpunan fungsi-fungsi terintegralkan Lebesgue dengan memenuhi kondisi tertentu.

Mengingat kontribusi penting dari teori distribusi Schwartz seperti yang telah dipaparkan di atas, penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam tentang distribusi Schwartz, mengenai sifat-sifat pentingnya, juga meneliti keterkaitannya dengan ruang Lebesgue. Oleh karena itu, disusunlah penelitian ini dengan judul “Sifat-sifat Distribusi dalam Teori Distribusi Schwartz dan Keterkaitannya dengan Ruang Lebesgue“.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang masalah di atas, dalam penelitian ini rumusan masalah dituangkan ke dalam pertanyaan-pertanyaan sebagai berikut:

1. Bagaimana sifat-sifat distribusi dalam teori distribusi Schwartz?
2. Bagaimana keterkaitan ruang distribusi Schwartz dengan ruang Lebesgue?

1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah pertama, sifat-sifat distribusi yang dibahas dalam penelitian ini dibatasi pada sifat kekontinuan, lokalisasi, kekonvergenan, dan turunan. Adapun untuk rumusan masalah kedua, keterkaitan ruang distribusi dengan ruang Lebesgue dibatasi pada keterkaitan antara anggota keduanya dilengkapi dengan sifat kekonvergenannya.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah tersebut maka secara khusus tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui sifat-sifat dari distribusi dalam teori distribusi Schwartz
2. Mengetahui keterkaitan ruang distribusi Schwartz dengan ruang Lebesgue

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat baik bagi penulis, institusi, maupun pembaca atau peneliti lainnya. Secara khusus, penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat sebagai berikut.

1. Memberikan kontribusi bagi mahasiswa untuk menambah wawasan bidang matematika analisis, khususnya tentang teori distribusi.

2. Sebagai bahan bacaan yang dapat dijadikan referensi penelitian yang berkaitan dengan teori distribusi.
3. Memberikan inspirasi bagi peneliti matematika lainnya untuk mengenal teori distribusi, lebih jauh untuk lebih memperdalam atau memperluas materi tersebut.

1.6 Struktur Organisasi Skripsi

Skripsi ini terbagi menjadi lima bab. Bab pertama adalah bab pendahuluan yang berisi latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan struktur organisasi skripsi.

Selanjutnya, bab dua memaparkan konsep dan teori yang dijadikan landasan untuk pembahasan bab selanjutnya, berisi definisi dan teorema yang diperlukan dalam penelitian. Bab dua terdiri dari delapan subbab, masing-masing subbab membahas keterbatasan bilangan real, barisan dan kekonvergenannya, kekonvergenan barisan fungsi, konsep dasar topologi di $\mathbb{R}$, integral Lebesgue, sistem bilangan kompleks, ruang vektor topologi, dan pengantar teori distribusi.

Bab tiga berisi pembahasan awal dari penelitian, dimulai dengan pembahasan konsep membangun ruang fungsi uji, penjelasan ruang fungsi uji, dan diakhiri dengan penjelasan definisi serta contoh distribusi.

Adapun bab empat membahas masalah penelitian. Bab ini terdiri dari dua subbab, yang pertama membahas sifat-sifat distribusi yang meliputi sifat kekontinuan, lokalisasi, kekonvergenan, dan distribusi, sedangkan yang kedua membahas keterkaitan antara distribusi dengan fungsi-fungsi pada ruang Lebesgue.

Terakhir, bab lima sebagai bab penutup dari skripsi ini berisi kesimpulan dari penelitian dan saran.