BAB 3

PRODUK SILANG PADA ALJABAR-C*

Pada bab ini terdapat beberapa konsep aljabar yang terkait dengan produk silang pada aljabar-C^* dengan aksi automorfisma dan beberapa contoh dari konsep tersebut. Pada bab ini juga dijabarkan konsep produk silang penuh dan tereduksi dari suatu sistem dinamik yang diberikan.

3.1 Sistem Dinamik

Pada subbab ini akan dijelaskan konsep sistem dinamik. Sistem dinamik memuat suatu aksi, oleh karena itu sebelumnya akan dijelaskan definisi dari aksi.

Definisi 3.1.1: Aksi dari Grup pada Suatu Himpunan

Misalkan G grup abelian dan X suatu himpunan. Aksi dari G pada X adalah pemetaan $\varphi: G \times X \to X,\ (g,x) \mapsto gx$ yang memenuhi*:*

(i) $id_G x = x$, $\forall x \in X$ dimana id_G unsur identitas dari G,
(ii) $s(tx) = (st)x$, $\forall s,t \in G, x \in X$.

Jika G adalah grup topologi dan X adalah ruang topologi, maka aksi tersebut dikatakan kontinu jika $(g,x) \longmapsto gx$ adalah kontinu.

Contoh 3.1.2:

Misal G grup dan himpunan $X = G$ dengan topologi diskrit adalah semua fungsi kontinu $f: G \to G$. Misal $H \subseteq G$ himpunan buka, perhatikan bahwa ada dua kondisi untuk $f^{-1}(H)$ yaitu

(i) $f^{-1}(H) = \emptyset \in P(G)$,
(ii) $f^{-1}(H) \neq \emptyset \Leftrightarrow f^{-1}(H) = H' \subseteq G$.

Misal $G \times X \to X$ diberikan oleh $(g, x) \longmapsto gx$. Akan ditunjukkan bahwa pemetaan tersebut adalah sebuah aksi kontinu.

(i) Akan ditunjukkan $ex = x \ \forall x \in X$.

Ambil sembarang $e \in G$ dan $x \in X$. Karena e adalah identitas di G maka $ex = x$.

(ii) Akan ditunjukkan $s(tx) = (st)x \ \forall s, t \in G$ dan $x \in X$.

Ambil sembarang $s, t \in G$ dan $x \in X$.

Karena $s, t \in G$ dan $X = G$ maka berlaku sifat asosiatif $s(tx) = (st)x$.

(iii) Akan ditunjukkan $x \longmapsto sx$ kontinu.

Ambil sembarang himpunan buka di G yaitu H dimana $H \subseteq G$. Perhatikan bahwa perhatikan bahwa ada dua kondisi untuk $f^{-1}(H)$, yaitu $f^{-1}(H) = \emptyset$ dan $f^{-1}(H) \neq \emptyset$. Untuk kasus $f^{-1}(H) = \emptyset$, karena $\emptyset \in P(G)$ maka $f^{-1}(H) \in P(G)$. Untuk $f^{-1}(H) \neq \emptyset$, karena $f^{-1}(H) = H' \subseteq G$ maka $f^{-1}(H) \in P(G)$. Karena prapeta dari himpunan buka H adalah buka maka $x \longmapsto sx$ kontinu.

Definisi 3.1.3: Sistem Dinamik (Rosjanuardi & Albania, 2012:101)

Misal G adalah grup, A adalah aljabar-C^* dan didefinisikan $\mathrm{Aut}(A) \coloneqq \{\varphi: A \to A | \varphi \text{ isomorfisma } -*\}$. Grup G dikatakan beraksi pada A bila terdapat homomorfisma grup $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$. Selanjutnya sistem (A, G, α) dikatakan sebagai sistem dinamik dalam hal ini dua himpunan yang berbeda strukturnya, yaitu A dan G dihubungkan oleh aksi yang homomorfisma α.

Contoh 3.2.4:

Misalkan untuk setiap $f \in C_0(\mathbb{R})$ dan $t \in \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $\tau_t(f)(x) \coloneqq f(xe^{-t})$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Selanjutnya f_t adalah unsur di $C_0(\mathbb{R})$ yang didefinisikan dengan $f_t(x) \coloneqq f(xe^{-t})$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

(i) Akan ditunjukkan $\lim_{x \to \pm\infty} f_t(x) = \lim_{x \to \pm\infty} f(xe^{-t}) = 0$.

Perhatikan jika $x \to \infty$ maka $xe^{-t} \to \infty$.

Akibatnya $\lim_{x\to\infty} f_t(x) = \lim_{x\to\infty} f(xe^{-t}) = 0$.

Sama halnya dengan $x \to -\infty$ maka $xe^{-t} \to -\infty$,

akibatnya $\lim_{x\to-\infty} f_t(x) = \lim_{x\to-\infty} f(xe^{-t}) = 0$.

Oleh karena itu $\lim_{x\to\pm\infty} f_t(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f(xe^{-t}) = 0$.

(ii) Misal $x \in \mathbb{R}$ akan ditunjukkan f_t kontinu di x.

Ambil x_n barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x_n \to x$.

Misal $y_n = x_n e^{-t}$ karena $x_n \to x$ maka $y_n \to xe^{-t}$.

Karena f kontinu, maka $f(y_n) \to f(xe^{-t}) = f_t(x)$.

Karena $f(y_n) = f(x_n e^{-t}) = f_t(x_n)$,

maka $f_t(x_n) \to f_t(x)$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti $f_t(x) \coloneqq f(xe^{-t})$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ adalah unsur di $C_0(\mathbb{R})$. Selanjutnya akan ditunjukkan pemetaan τ_t adalah suatu homomorfisma dari $C_0(\mathbb{R})$ ke $C_0(\mathbb{R})$ dan pemetaan $t \longmapsto \tau_t$ adalah homomorfisma grup. Sehingga dapat dibentuk suatu sistem dinamik$(C_0(\mathbb{R}), \tau, \mathbb{R})$. Selanjutnya akan ditunjukkan pemetaan $t \longmapsto \tau_t$ adalah homomorfisma grup, maka diperoleh aksi

$$\tau: \mathbb{R} \to \mathrm{Aut}\big(C_0(\mathbb{R})\big), t \longmapsto \tau_t f(x) = f(xe^{-t}) \forall x \in \mathbb{R}$$

(iii) Akan ditunjukkan τ pemetaan

Ambil $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dengan $t_1 = t_2$. Maka

$t_1 = t_2 \Leftrightarrow e^{-t_1} = e^{-t_2}$

$\Leftrightarrow xe^{-t_1} = xe^{-t_2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\ f(xe^{-t_1}) = f(xe^{-t_2}) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \tau_{t_1} f(x) = \tau_{t_2} f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$\therefore\ \tau$ pemetaan.

(iv) Akan ditunjukkan τ homomorfisma grup.

Ambil $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dan $x \in \mathbb{R}$ maka

$$\tau_{t_1+t_2} f(x) = f_{t_1+t_2}(x)$$

$$= f\left(xe^{-(t_1+t_2)}\right)$$

$$= f(xe^{-t_1-t_2})$$

$$= f(xe^{-t_1}e^{-t_2})$$

$$= \tau_{t_1} f_{t_2}(x)$$

$$= \tau_{t_1}\left(\tau_{t_2} f\right)(x)$$

$\therefore\ \tau$ homomorfisma grup.

(v) Akan ditunjukkan τ_t homomorfisma.

Ambil $\tau_t(f), \tau_t(g) \in C_0(\mathbb{R})$ dan $x \in \mathbb{R}$

$$\tau_t(f+g)(x) = (f+g)_t(x)$$

$$= (f+g)(xe^{-t})$$

$$= f(xe^{-t}) + g(xe^{-t})$$

$$= \tau_t f(x) + \tau_t g(x)$$

$$= (\tau_t f + \tau_t g)(x)$$

$\therefore\ \tau_t$ homomorfisma.

(vi) Akan ditunjukkan $\tau_t(fg) = \tau_t(f)\tau_t(g)$.

Ambil $\tau_t(f), \tau_t(g) \in C_0(\mathbb{R})$ dan $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\tau_t(fg)(x) &= (fg)_t(x)\\ &= (fg)(xe^{-t})\\ &= f(xe^{-t})g(xe^{-t})\\ &= \tau_t f(x)\tau_t g(x)\\ &= \big(\tau_t(f)\tau_t(g)\big)(x)\end{aligned}$$

$\therefore \tau_t(fg) = \tau_t(f)\tau_t(g)$.

(vii) Akan ditunjukkan $\tau_t(\alpha f) = \alpha\tau_t(f)$.

Ambil $\tau_t(f) \in C_0(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned}\tau_t(\alpha f)(x) &= \alpha(f)_t(x)\\ &= \alpha f(xe^{-t})\\ &= \alpha\tau_t f(x)\end{aligned}$$

$\therefore \tau_t(\alpha f) = \alpha\tau_t(f)$.

(viii) Akan ditunjukkan $\tau_t(f)^*(x) = \big(\tau_t(f)\big)^*(x)$.

Ambil $\tau_t(f) \in C_0(\mathbb{R})$ dan $x \in \mathbb{R}$

$\tau_t(f)^*(x) = (f^*)_t(x)$

$= f^*(xe^{-t})$

$= \overline{f(xe^{-t})}$ (karena adjoin dapat dipandang sebagai konjugasi)

$= \overline{\tau_t f(x)}$

$= \big(\tau_t(f)\big)^*(x)$

$\therefore \tau_t(f)^*(x) = \left(\tau_t(f)\right)^*(x)$.

Berdasarkan (v), (vi), (vii) dan (viii) maka τ_t adalah homomorfisma-*.

(ix) Akan ditunjukkan τ_t injektif.

Ambil $f_1, f_2 \in C_0(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $\tau_t(f_1) = \tau_t(f_2)$

Maka

$\tau_t(f_1)(x) = \tau_t(f_2)(x)$

$f_1(xe^{-t}) = f_2(xe^{-t})$.

Perhatikan bahwa $xe^{-t} \in \mathbb{R}$ maka

$f_1(xe^t e^{-t}) = f_2(xe^t e^{-t})$

$f_1(x) = f_2(x)$.

$\therefore \tau_t$ injektif.

(x) Akan ditunjukkan τ_t onto.

Ambil fungsi $f \in C_0(\mathbb{R})$ akan ditunjukkan untuk suatu $g \in C_0(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $f = \tau_t(g)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\tau_t(g)(x) = g_t(x) = g(xe^{-t}) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Pilih $g \in C_0(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga

$$g(x) = f(xe^{-t}) \;\; \forall x \in \mathbb{R}.$$

Diperoleh

$$\begin{aligned}
\tau_t(g)(x) &= g_t(x) \\
&= g(xe^{-t}) \\
&= f(xe^{-t}e^t) \\
&= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$\therefore \tau_t$ onto.

Berdasarkan (i) sampai (x) diperoleh τ adalah aksi dari $G = C_0(\mathbb{R})$ melalui automorfisma sedemikan sehingga $(C_0(\mathbb{R}), \mathbb{R}, \tau)$ adalah sistem dinamik.

Definisi 3.2.5: Representasi Kovarian (Rosjanuardi & Albania, 2012:101)

Misalkan (A, G, α) adalah sistem dinamik yang terdiri dari aljabar-C^* A, grup G dan aksi α yang merupakan homomorfisma $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$. Sebuah representasi kovarian dari (A, G, α) adalah pasangan (π, V) dimana $\pi: A \to B(H)$ adalah representasi yang unital, dan $V: G \to U(H)$ representasi uniter yang memenuhi:

$$\pi\big(\alpha_x(a)\big) = V_x \pi(a)(V_x)^*, \qquad \forall x \in G, a \in A.$$

Contoh 3.2.6:

Misal $h \in \mathrm{Homeo}(\mathrm{T})$ dimana memenuhi

$$h(z) \coloneqq e^{-2\pi i\theta} z$$

dan misal $(C(\mathrm{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$ adalah sistem dinamik yang memenuhi

$$\alpha_n(f)(z) = f\big(e^{-2\pi i\theta} z\big).$$

Lalu dimisalkan suatu representasi $M: C(\mathrm{T}) \to B\big(L^2(\mathrm{T})\big)$ yang memenuhi

$$M(f)h(z) \coloneqq f(z)h(z)$$

dan suatu representasi uniter $U: \mathbb{Z} \to U\big(L^2(\mathrm{T})\big)$ yang memenuhi

$$U_n h(z) \coloneqq h\big(e^{-2\pi i\theta} z\big).$$

Akan ditunjukkan bahwa (M, U) adalah representasi kovarian

$$\begin{aligned} U_n M(f) {U_n}^* h(z) &= M(f) {U_n}^* h\big(e^{-2\pi i\theta} z\big) \\ &= f\big(e^{-2\pi i\theta} z\big) {U_n}^* h\big(e^{-2\pi i\theta} z\big) \\ &= (\alpha_n f)(z) h(z) \end{aligned}$$

$$= M(\alpha_n f)h(z)$$

Maka terbukti (M, U) adalah representasi kovarian dari $(C(\mathrm{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$.

3.2 Produk Silang

Pada subbab ini akan dijelaskan perbedaan produk silang penuh dengan produk silang tereduksi.

Definisi 3.2.1: Produk Silang (Rosjanuardi & Albania, 2012:101)

Misalkan (A, G, α) adalah sistem dinamik yang terdiri dari aljabar-C^* A, grup G dan aksi yang homomorfisma $\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A)$. Produk silang dari (A, G, α) adalah sistem (B, i_A, i_G) yang terdiri dari aljabar-C^* B (aljabar-C^* B dinotasikan dengan $A \rtimes_\alpha G$), homomorfisma unital $i_A: A \to A \rtimes_\alpha G$ dan homomorfisma $i_G: G \to A \rtimes_\alpha G$ yang memenuhi*:*

(i) Pasangan (i_A, i_G) adalah kovarian,

(ii) Untuk setiap representasi kovarian (π, V) dari (A, G, α) terdapat representasi unital $\pi \times V$ dari B sedemikian sehingga $(\pi \times V)^\circ i_A = \pi$ dan $(\pi \times V)^\circ i_G = V$,

(iii) Aljabar-C^* $A \rtimes_\alpha G$ dibangun oleh $\{i_A(a) | a \in A\} \cup \{i_G(x) | x \in G\}$.

3.2.1 Produk Silang Penuh dan Produk Silang Tereduksi (Sierakowski, 2009:6)

Diberikan suatu sistem dinamik (A, G, α) yang terdiri dari aljabar-C^* A, grup G dan aksi yang homomorfisma $\alpha: G \to \mathrm{Aut(A)}$. Misal didefinisikan representasi kovarian (π, V) yang terdiri dari representasi uniter $V: G \to B(H)$ dan representasi unital $\pi: A \to B(H)$ sedemikian sehingga

$$\pi\big(\alpha_x(a)\big) = V_x \pi(a) (V_x)^*$$

untuk setiap $a \in A$ dan $g \in G$. Selanjutnya didefinisikan

$$C_c(G, A) \coloneqq \{f: G \to A | \text{hanya berhingga } g \in G \ \ni \ f(g) \neq 0\}.$$

Himpunan fungsi $C_c(G,A)$ dilengkapi dengan konvolusi untuk setiap $y \in G$

$$(f * g)(y) = \sum_{x\in G} f(x)\alpha_x\big(g(x^{-1}y)\big)$$

untuk setiap $x \in G$ dan operasi involusi

$$\left(\sum_{x\in G} f(x)x\right)^* = \sum_{x\in G} \alpha_x(f(x^{-1})^*)x$$

sehingga $C_c(G,A)$ dapat dipandang sebagai aljabar-*. Misal $(\pi \times V)$ adalah representasi-* dari $C_c(G,A)$ di ruang Hilbert H (Williams, 1952:49). Norm aljabar-C^* penuh di $C_c(G,A)$ didefinisikan oleh

$$\|f\| \coloneqq \sup\{\|(\pi \times V)(f)\|\}$$

untuk setiap representasi $(\pi \times V)$. Lengkapan dari $C_c(G,A)$ atas norm tersebut adalah aljabar-C^* yang disebut dengan produk silang penuh atas A oleh G dan dinotasikan dengan $A \rtimes_\alpha G$ (Williams, 1952:52). Norm aljabar-C^* tereduksi di $C_c(G,A)$ didefinisikan oleh

$$\|f\|_L = \|(\bar{\pi} \times L)(f)\|_{B(\mathcal{H})}$$

dimana $(\bar{\pi} \times L): C_c(G,A) \to B(\mathcal{H})$ adalah representasi reguler yang berasosiasi dengan representasi kovarian $(\bar{\pi}, L, H)$ yang diberikan oleh

$$\bar{\pi}(a)\delta_{x,h} = \delta_{x,\pi(x^{-1}a)h}$$

$$L(y)\delta_{x,h} = \delta_{xy,h}$$

untuk setiap $a \in A$, $x, y \in G$ dan $h \in H$ dimana $\pi: A \to B(H)$ adalah representasi yang *faithful* dan

$$\mathcal{H} = l^2(G,H) \coloneqq \left\{\delta_{x,h}: G \to H, x \longmapsto \delta_{x,y}h \middle| \delta_{x,y} \text{ adalah delta kronecker}\right\}.$$

Produk silang tereduksi $A \rtimes_{\alpha r} G$ adalah lengkapan dari $C_c(G,A)$ atas norm aljabar-C^* tereduksi.