

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori *Crossed Products* atau produk silang dari aljabar- C^* oleh grup pada automorfisma memiliki peranan penting pada teori aljabar operator. Produk silang pada aljabar- C^* oleh grup dari automorfisma biasa disebut produk silang yang klasik. Beberapa ilmuwan matematika telah mengembangkan teori produk silang menjadi bentuk non-klasik yang semakin menarik untuk ditelaah, diantaranya Murphy (1987,1990,1991), Adji, Laca, Nielsen dan Raeburn (1994), Adji (2000), Adji dan Rosjanuardi (2007), Rosjanuardi dan Albania (2012).

Gerard J. Murphy pada papernya yang berjudul *Ordered Groups and Crossed Products of C^* -algebras* (1991) telah mengenalkan sekaligus mengembangkan konsep baru dari teori produk silang pada aljabar- C^* yaitu teori produk silang oleh semigrup dari automorfisma. Dalam paper tersebut, terdapat proposisi sifat universal dari produk silang aljabar- C^* dimana dalam pembuktiannya didefinisikan suatu representasi kovarian yang diinduksi dari representasi di aljabar- C^* A . Dengan menggunakan sifat universal dari produk silang, untuk setiap representasi kovarian yang diinduksi dari representasi di A akan terdapat homomorfisma- $*$ yang unik, dimana peta dari homomorfisma- $*$ tersebut membentuk suatu aljabar- C^* baru yaitu produk silang tereduksi.

Berdasarkan uraian diatas, penulis termotivasi untuk mengkaji eksistensi produk silang tereduksi dari aljabar- C^* oleh semigrup pada automorfisma berdasarkan sifat universal suatu produk silang yang diberikan oleh Gerard J. Murphy (1991). Bentuk sistem dinamik yang digunakan pada tugas akhir ini ialah (A, M, α) yang terdiri dari aljabar- C^* unital A , semigrup kanselatif kanan M dengan unsur identitas, dan α aksi homomorfisma dari M pada automorfisma dari

A. Dikarenakan produk silang tereduksi berkaitan dengan suatu representasi kovarian yang diinduksi dari representasi di A , maka sebelumnya akan dibahas bentuk representasi isometrik reguler dari M di ruang Hilbert $l^2(M, H)$. Selanjutnya akan dikaji konstruksi produk silang dari sistem dinamik (A, M, α) yaitu $A \rtimes_{\alpha} M$ dan sifat universal yang berlaku pada produk silang tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Masalah yang akan dikaji dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

- 1.2.1 Bagaimanakah bentuk representasi isometrik reguler dari M di ruang Hilbert $l^2(M, H)$?
- 1.2.2 Bagaimanakah konstruksi produk silang $A \rtimes_{\alpha} M$ dari sistem dinamik (A, M, α) ?
- 1.2.3 Bagaimanakah bentuk produk silang tereduksi dari aljabar- C^* oleh semigrup dari automorfisma berdasarkan sifat universal dari produk silang $A \rtimes_{\alpha} M$ yang diberikan oleh Gerard J. Murphy (1991)?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian yang hendak dicapai dalam tugas akhir ini ialah sebagai berikut:

- 1.3.1 Mengetahui bentuk representasi isometrik reguler dari M di ruang Hilbert $l^2(M, H)$.
- 1.3.2 Mengetahui bagaimana konstruksi produk silang $A \rtimes_{\alpha} M$ dari sistem dinamik (A, M, α) .
- 1.3.3 Mengetahui bentuk produk silang tereduksi dari aljabar- C^* oleh semigrup dari automorfisma berdasarkan sifat universal dari aljabar- C^* $A \rtimes_{\alpha} M$ yang diberikan oleh Gerard J. Murphy (1991).

1.4 Sistematika Penulisan

Pada **BAB 1 PENDAHULUAN** dipaparkan terlebih dahulu seperti apa permasalahan yang dikaji oleh penulis dan tujuan dari penelitiannya. Lalu pada **BAB 2 KONSEP DASAR ALJABAR OPERATOR**, penulis mengenalkan terlebih dahulu beberapa definisi dari konsep dasar aljabar operator yang akan digunakan dalam mengkaji permasalahan yang diangkat dalam tugas akhir ini. Pada **BAB 3 PRODUK SILANG ALJABAR- C^*** penulis mengenalkan beberapa definisi dasar mengenai produk silang, serta konsep produk silang penuh dan produk silang tereduksi. Pada **BAB 4 PRODUK SILANG TEREDUKSI DARI ALJABAR- C^* OLEH SEMIGRUP PADA AUTOMORFISMA** penulis mengkaji terlebih dahulu bagaimana konstruksi representasi isometrik reguler, produk silang dari sistem dinamik (A, M, α) dan produk silang tereduksi dari aljabar- C^* oleh semigrup pada automorfisma berdasarkan sifat universal dari aljabar- C^* $A \rtimes_{\alpha} M$ yang diberikan oleh Gerard J. Murphy (1991). Pada **BAB 5 PENUTUP** terdapat kesimpulan yang diambil berdasarkan permasalahan yang dibahas dan saran dari penyusun untuk pembaca.