

BAB 5

PENUTUP

5.1. Simpulan

5.1.1. Konstruksi sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$ mencakup konstruksi aljabar- C^* B_{Γ^+} dan aksi α dari semigrup Γ^+ ke $\text{Endo}(B_{\Gamma^+})$. Untuk setiap $x \in \Gamma^+$, definisikan 1_x fungsi karakteristik dari $\{y \in \Gamma^+, y \geq x\}$, kemudian bentuk $B_{\Gamma^+} := \overline{\text{span}}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$. B_{Γ^+} merupakan subaljabar- C^* dari $l^\infty(\Gamma)$ dengan operasi perkalian dan penjumlahan titik demi titik, norm supremum dan involusi konjugasi bilangan kompleks.

Untuk setiap $x \in \Gamma^+$, definisikan aksi

$$\begin{aligned} \tau: \Gamma^+ &\rightarrow \text{Aut}(l^\infty(\Gamma)) \\ x &\mapsto \tau_x \end{aligned}$$

dimana

$$\begin{aligned} \tau_x: l^\infty(\Gamma) &\rightarrow l^\infty(\Gamma) \\ f(y) &\mapsto f(y - x). \end{aligned}$$

Karena B_{Γ^+} merupakan subaljabar- C^* dari $l^\infty(\Gamma)$, maka τ_x dapat direstriksi ke $B_{\Gamma^+} \forall x \in \Gamma^+$; definisikan restriksi tersebut sebagai aksi $\alpha: \Gamma^+ \rightarrow \text{Endo}(B_{\Gamma^+})$. Karena terdapat aksi dari Γ^+ pada B_{Γ^+} melalui endomorfisma, maka dapat dibentuk sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$.

5.1.2. Misal $V: \Gamma^+ \rightarrow \text{Isom}(H)$ representasi isometrik dari Γ^+ . Definisikan pemetaan linier well-defined π_V pada $\text{span}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$ yang kemudian dapat diperluas pada $B_{\Gamma^+} := \overline{\text{span}}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$. Karena $1_x 1_y = 1_{\text{maks}\{x,y\}}$ dan $V_x V_x^* V_y V_y^* = V_{\text{maks}\{x,y\}} V_{\text{maks}\{x,y\}}^*$, maka π_V adalah suatu homomorfisma-*. Karena berlaku $\pi_V(\alpha_x(1_y)) = V_x \pi_V(1_y) V_x^*$, maka (π_V, V) representasi kovarian

pada $\text{span}\{1_x : x \in \Gamma^+\}$. Kemudian berdasarkan kekontinuan, (π_V, V) adalah representasi kovarian pada B_{Γ^+} . Produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$ dibentuk oleh dibangun oleh $\{i_{\Gamma^+}(x) : x \in \Gamma^+\}$, dimana i_{Γ^+} representasi dari Γ^+ ke semigrup isometri di $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$. Lebih tepatnya, $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+ := \overline{\text{span}}\{i_{\Gamma^+}(x)i_{\Gamma^+}(y)^* : x, y \in \Gamma^+\}$.

5.1.3. Untuk setiap (π_V, V) representasi kovarian dari sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$, terdapat isomorfisma $\pi_V \times V$ dari $C^*(\Gamma^+) = B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$ ke $C^*(V_x : x \in \Gamma^+)$ jika dan hanya jika V non-uniter. Jadi produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$ dapat dipandang sebagai aljabar- C^* yang dibangun oleh unsur-unsur isometri non-uniter berdasarkan isomorfisma.

5.2. Saran

Dalam tugas akhir ini penulis mengkaji hubungan produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$ dengan aljabar- C^* yang dibangun oleh representasi-representasi isometrik non-uniter. Untuk bahan kajian selanjutnya, dapat diteliti hubungan antara aljabar- C^* yang dibangun oleh representasi isometrik non-uniter V dari Γ^+ dengan aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$ atas grup terurut Γ .