BAB 3

PRODUK SILANG DAN PENDAHULUAN

ALJABAR TOEPLITZ

Pada bab ini diberikan salah satu konsep aljabar-C^* yaitu produk silang dari suatu sistem dinamik. Selanjutnya dibahas beberapa konsep aljabar Toeplitz sebagai materi pendukung yang masih berhubungan dengan konsep produk silang.

3.1. Produk Silang

Sebelum diberikan definisi suatu produk silang dari sistem dinamik, akan dibahas konsep-konsep yang terkait dengan produk silang terlebih dahulu.

Definisi 3.1.1: Aksi Grup pada Himpunan. (Hungerford, 1974: 88)
Misal G suatu grup dan X suatu himpunan. Aksi dari G pada X adalah pemetaan $(g, x) \longmapsto gx$ dari $G \times X \longrightarrow X$ sedemikian sehingga:

i. $\mathrm{id}_G x = x,\ \forall x \in X,\ \mathrm{id}_G$ elemen satuan di G.

ii. $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x, \forall g_1, g_2 \in G, x \in X$.

Jika terdapat pemetaan seperti diatas, maka G dikatakan beraksi pada X.

Contoh dari aksi grup pada himpunan adalah aksi grup pada aljabar-C^* seperti yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1.2: Aksi Grup pada Aljabar-C^*

Misal G suatu grup, A suatu aljabar-C^* dan definisikan $Aut(A) \coloneqq \{\varphi: A \longrightarrow A \mid \varphi \text{ isomorfisma } -*\}$. Aksi dari G pada A adalah homomorfisma grup $\alpha: G \longrightarrow Aut(A)$ yang membawa $g \longmapsto \alpha_g, \forall g \in G$.

Definisi 3.1.3: Sistem Dinamik

Misal G suatu grup, A suatu aljabar-C^* dan $\alpha: G \longrightarrow Aut(A)$ aksi dari G pada A. Sistem (A, G, α) dikatakan sebagai sistem dinamik jika terdapat homomorfisma (aksi) α yang menghubungkan dua himpunan yang berbeda strukturnya, yaitu G dan A.

Contoh 3.1.4.

1) Misal $C(\mathbb{T})$ himpunan fungsi-fungsi kontinu $f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$, dan α suatu homomorfisma yang didefinisikan dengan

$$\alpha_n(f)(z) = f\left(e^{-2\pi i\theta} z\right), \forall n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{T}, f \in C(\mathbb{T}).$$

$(C(\mathbb{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$ adalah suatu sistem dinamik.

2) Definisikan $C_0(\mathbb{R})$ himpunan fungsi-fungsi kontinu $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ yang *vanish at infinity*: untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat himpunan kompak $F_{f,\epsilon} \subset \mathbb{R}$, sedemikian sehingga $|f(x)| < \epsilon$ untuk setiap $x \notin F_{f,\epsilon}$. $C_0(\mathbb{R})$ adalah suatu aljabar-C^* tanpa satuan. (Conway, 1999: 2)

Misal untuk setiap $f \in C_0(\mathbb{R})$ dan $t \in \mathbb{R}$, definisikan

$$\tau_t(f)(x) \coloneqq f(xe^{-t}), \forall x \in \mathbb{R}.$$

1) Akan ditunjukkan f_t yang didefinisikan $f_t(x) \coloneqq f(xe^{-t}), \forall x \in \mathbb{R}$ adalah unsur di $C_0(\mathbb{R})$.
   - Akan ditunjukkan $\lim_{x \to \pm\infty} f_t(x) = \lim_{x \to \pm\infty} f(xe^{-t}) = 0$.

Jika $x \to \infty$, karena e^{-t} suatu konstanta positif, maka $xe^{-t} \to \infty$. Akibatnya $\lim_{x\to\infty} f(xe^{-t}) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Jika $x \to -\infty$, maka $\lim_{x\to-\infty} f(xe^{-t}) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Jadi $\lim_{x\to\pm\infty} f_t(x) = 0$.

- Akan ditunjukkan f_t kontinu.

  Misal $x \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan f_t kontinu di x. Ambil x_n barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x_n \to x$. Akan ditunjukkan $f_t(x_n) \longrightarrow f_t(x)$. Misal $y_n = x_n e^{-t}$. Karena $x_n \to x$, maka $y_n \to xe^{-t}$. Karena f kontinu, maka $f(y_n) \to f(xe^{-t}) = f_t(x)$. Di lain pihak, $f_t(x_n) = f(x_n e^{-t}) = f(y_n)$. Jadi $f_t(x_n) \longrightarrow f_t(x)$, dengan kata lain f_t kontinu di x.

2) Akan ditunjukkan pemetaan τ_t dimana $\tau_t(f) = f_t$ adalah sebuah automorfisma-$*$ dari $C_0(\mathbb{R})$ ke $C_0(\mathbb{R})$.

- Akan ditunjukkan τ_t homomorfisma-$*$.

  (i)
$$\begin{aligned}\tau_t(f+g)(x) &= (f+g)_t(x)\\ &= (f+g)(xe^{-t})\\ &= f(xe^{-t}) + g(xe^{-t})\\ &= \tau_t(f)(x) + \tau_t(g)(x)\\ &= \big(\tau_t(f) + \tau_t(g)\big)(x), \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

  Jadi $\tau_t(f+g) = \tau_t(f) + \tau_t(g)$.

  (ii)
$$\begin{aligned}\tau_t(fg)(x) &= (fg)_t(x)\\ &= (fg)(xe^{-t})\\ &= f(xe^{-t})g(xe^{-t})\\ &= \tau_t(f)(x)\tau_t(g)(x)\\ &= (\tau_t(f)\tau_t(g))(x), \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

  Jadi $\tau_t(fg) = \tau_t(f)\tau_t(g)$.

  (iii)
$$\begin{aligned}\tau_t(\alpha f)(x) &= \alpha(f)_t(x)\\ &= \alpha f(xe^{-t})\\ &= \alpha\tau_t(f)(x), \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

  Jadi $\tau_t(\alpha f) = \alpha\tau_t(f)$.

(iv) $\tau_t(f^*)(x) = (f^*)_t(x)$

$$= f^*(xe^{-t})$$

$$= \overline{f(xe^{-t})}$$

$$= \overline{\tau_t(f)(x)}$$

$$= (\tau_t(f)(x))^*, \forall x \in \mathbb{R}$$

Jadi $\tau_t(f^*) = (\tau_t(f))^*$.

- Akan ditunjukkan τ_t 1-1.

  Ambil $f_1, f_2 \in C_0(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $\tau_t(f_1) = \tau_t(f_2)$.

  Perhatikan

$$\tau_t(f_1)(x) = \tau_t(f_2)(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f_1(xe^{-t}) = f_2(xe^{-t}), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f_1(xe^t e^{-t}) = f_2(xe^t e^{-t}), \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

  Jadi $f_1 = f_2$.

- Akan ditunjukkan τ_t pada.

  Ambil sembarang fungsi $f \in C_0(\mathbb{R})$. Akan ditunjukkan terdapat $g \in C_0(\mathbb{R})$ dimana $f = \tau_t(g)$ sedemikian sehingga $\forall x \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\tau_t(g)(x) = g_t(x) = g(xe^{-t}) = f(x).$$

  Pilih $g(x) = f(xe^t), \forall x \in \mathbb{R}$. Diperoleh

$$\tau_t(g)(x) = g_t(x) = g(xe^{-t}) = f(xe^t e^{-t}) = f(x).$$

  Jadi τ_t pada.

Jadi τ_t automorfisma-$*$.

3) Akan ditunjukkan pemetaan $t \to \tau_t$ homomorfisma grup, dengan demikian diperoleh aksi

$$\tau: \mathbb{R} \longrightarrow Aut\big(C_0(\mathbb{R})\big)$$

$$t \longmapsto \tau_t(f)(x) = f(xe^{-t}), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Misalkan $\tau: t \to \tau_t$.

- Akan ditunjukkan τ pemetaan.

  Misalkan $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ dengan $t_1 = t_2$. Perhatikan

$$t_1 = t_2 \Leftrightarrow e^{-\,t_1} = e^{-t_2}$$
$$\Leftrightarrow xe^{-\,t_1} = xe^{-t_2}$$
$$\Leftrightarrow xe^{-\,t_1} = xe^{-t_2}$$
$$\Leftrightarrow f(xe^{-\,t_1}) = f(xe^{-t_2})$$
$$\Leftrightarrow \tau_{t_1}(f)(x) = \tau_{t_2}(f)(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Jadi τ pemetaan.

- Akan ditunjukkan τ homomorfisma.

  Ambil sembarang $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Perhatikan

$$\begin{aligned}\tau_{t_1+t_2}(f)(x) &= f_{t_1+t_2}(x)\\ &= f(xe^{-(t_1+t_2)})\\ &= f(xe^{-t_1-t_2})\\ &= f(xe^{-t_1}e^{-t_2})\\ &= \tau_{t_1}\left(f_{t_2}(x)\right)\\ &= \tau_{t_1}\left(\tau_{t_3}(f)\right)(x), \forall x \in \mathbb{R}, f \in C_0(\mathbb{R}).\end{aligned}$$

  Jadi $\tau_{t_1+t_2}(f) = \tau_{t_1}\tau_{t_3}(f), \forall f \in C_0(\mathbb{R})$.

Jadi, τ homomorfisma grup.

Berdasarkan 1), 2) dan 3), τ sebuah aksi dari $\mathbb{R}$ ke $C_0(\mathbb{R})$ melalui automorfisma. Jadi,

$$\tau: \mathbb{R} \longrightarrow Aut(C_0(\mathbb{R}))$$
$$t \longmapsto \tau_t(f)(x) = f(xe^{-t}), \forall x \in \mathbb{R}$$

adalah sebuah aksi dari $\mathbb{R}$ pada aljabar-C^* $C_0(\mathbb{R})$ melalui automorfisma. Dengan demikian, $(C_0(\mathbb{R}), \mathbb{R}, \tau)$ adalah sebuah sistem dinamik.

Definisi 3.1.5: Representasi Kovarian dari Sistem Dinamik

Misal (A, G, α) adalah sistem dinamik yang terdiri dari aljabar-C^* A, grup G dan aksi α. Representasi kovarian dari (A, G, α) adalah pasangan (π, V) dimana $\pi: A \longrightarrow B(H)$ adalah representasi *non-degenerate* dari A ke $B(H)$ dimana $B(H)$ seperti yang didefinisikan pada Definisi 2.6.3, dan $V: G \longrightarrow U(H)$ representasi uniter dari G ke himpunan operator-operator linier terbatas uniter $U(H)$ yang memenuhi kondisi kovarian berikut:

$$\pi\big(\alpha_x(a)\big) = V_x\pi(a){V_x}^*, \qquad \forall x \in G, a \in A.$$

Contoh 3.1.6. (Williams, 1952: 45)

Misal h suatu homeomorfisma dari $\mathbb{T}$ ke $\mathbb{T}$, adalah "rotasi oleh θ": yaitu,

$$h(z) \coloneqq e^{-2\pi i\theta}z, \forall z \in \mathbb{T}$$

dan misal $(C(\mathbb{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$ adalah sistem dinamik dengan aksi

$$\alpha_n(f)(z) = f\big(e^{-2\pi i\theta}z\big), \forall n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{T}, f \in C(\mathbb{T}).$$

Misal $M: C(\mathrm{T}) \to B\big(L^2(\mathrm{T})\big)$ representasi yang didefinisikan oleh perkalian titik demi titik:

$$M(f)h(z) \coloneqq f(z)h(z),$$

dan misal $U: \mathbb{Z} \to U\big(L^2(\mathrm{T})\big)$ representasi uniter yang didefinisikan dengan

$$U_nh(z) \coloneqq h\big(e^{-2\pi i\theta}z\big).$$

Akan ditunjukkan bahwa (M, U) adalah representasi kovarian dari $(C(\mathbb{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$. Perhatikan

$$\begin{aligned} U_nM(f){U_n}^*h(z) &= M(f){U_n}^*h\big(e^{-2\pi i\theta}z\big) \\ &= f\big(e^{-2\pi i\theta}z\big){U_n}^*h\big(e^{-2\pi i\theta}z\big) \\ &= (\alpha_nf)(z)h(z) \\ &= M(\alpha_nf)h(z) \end{aligned}$$

Jadi (M, U) adalah representasi kovarian dari $(C(\mathbb{T}), \mathbb{Z}, \alpha)$.

Iain Raeburn dalam papernya *On Crossed Products and Takai Duality* (1988) memandang produk silang dari sistem dinamik (A, G, α) sebagai suatu aljabar-C^* yang representasinya berkorespondensi satu-satu dengan representasi kovarian dari (A, G, α).

Definisi 3.1.7: Produk Silang dari Sistem Dinamik

Misal (A, G, α) adalah sistem dinamik yang terdiri dari aljabar-C^* A, grup G dan aksi α. Produk silang dari (A, G, α) adalah sistem (B, i_A, i_G) yang terdiri dari aljabar-C^* B (aljabar-C^* B dinotasikan dengan $A \times_\alpha G$), representasi $i_A: A \longrightarrow B(H)$, dan representasi $i_G: G \longrightarrow U(H)$ yang memenuhi:

i. (i_A, i_G) adalah kovarian; yaitu, memenuhi $i_A\big(\alpha_x(a)\big) = i_G(x) i_A(a) i_G(x)^*$, $\forall\, x \in G, a \in A$;

ii. Aljabar-C^* B memiliki sifat universal, yaitu: untuk setiap representasi kovarian (π, V) dari (A, G, α) terdapat representasi unital unik $\pi \times V$ dari B sedemikian sehingga $(\pi \times V) \circ i_A = \pi$ dan $(\pi \times V) \circ i_G = V$;

iii. B dibangun oleh $\{i_A(a) : a \in A\} \cup \{i_G(x) : x \in G\}$.

Eksistensi suatu produk silang dari sistem dinamik dan keunikannya diuraikan dalam proposisi berikut.

Proposisi 3.1.8. (Raeburn, 1988: 324)

1) *Jika (B, i_A, i_G) dan (C, j_A, j_G) keduanya adalah produk silang dari (A, G, α), terdapat isomorfisma ϕ dari B ke C sedemikian sehingga $\phi \circ i_A = j_A$ dan $\phi \circ i_G = j_G$.*
2) *Terdapat produk silang untuk setiap sistem dinamik.*

Setiap representasi *non-degenerate* ρ dari $A \times_\alpha G$ memiliki bentuk $\pi \times V$ dimana (π, V) representasi kovarian dari (A, G, α). Homomorfisma i_A dan i_G adalah injektif.

3.2. Pendahuluan Aljabar Toeplitz

Pada bab selanjutnya, akan dikaji hubungan antara produk silang atas semigrup endomorfisma dengan aljabar-C^* yang dibangun oleh unsur-unsur isometri nonuniter. Aljabar-C^* yang dibangun oleh unsur-unsur isometri nonuniter dapat dipandang sebagai suatu aljabar Toeplitz. Untuk itu pada subbab ini dibahas secara ringkas konsep aljabar Toeplitz atas grup terurut dan aljabar Toeplitz abstrak. Penulis mengacu pada tesis magister *Aljabar Toeplitz atas Grup Terurut* karya Lindiarni (1997).

Misal Γ grup terurut. Definisikan grup dual dari Γ sebagai

$$\hat{\Gamma} \coloneqq \{f: \Gamma \longrightarrow \mathbb{T}: f \text{ homomorfisma grup kontinu}\}.$$

Grup dual $\hat{\Gamma}$ membentuk grup dibawah operasi perkalian titik demi titik. Dapat ditunjukkan pula bahwa $\hat{\Gamma}$ adalah suatu grup topologi kompak. Karena $\hat{\Gamma}$ kompak, maka $C(\hat{\Gamma}) \coloneqq \{f: \hat{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{C}\}$ adalah aljabar-C^* terhadap operasi tambah dan kali titik demi titik serta norm supremum.

Pandang pemetaan evaluasi

$$\varepsilon_x: \hat{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{T}$$
$$f \longmapsto \varepsilon_x(f) = f(x), \forall x \in \Gamma, f \in \hat{\Gamma}.$$

Untuk setiap $x \in \Gamma$, ε_x adalah suatu homomorfisma. Kemudian dapat ditunjukkan $span\{\varepsilon_x: x \in \Gamma\}$ adalah subaljabar-$*$ padat dari $C(\hat{\Gamma})$.

Bentuk ruang Hilbert

$$L^2(\hat{\Gamma}) \coloneqq \{f: \hat{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{C} : \int_{\hat{\Gamma}} |f|^2 \, dm < \infty\}$$

dengan m adalah ukuran Haar pada $\hat{\Gamma}$. $L^2(\hat{\Gamma})$ adalah $\overline{C(\hat{\Gamma})}$ terhadap norm yang dihasilkan dari hasil kali dalam:

$$< \phi, \psi > = \int_{\hat{\Gamma}} \phi\bar{\psi}\}.$$

Definisi 3.2.1. (Adji, Laca, dkk. 1994: 1140)

Himpunan $\{\varepsilon_x : x \in \Gamma\}$ adalah basis ortonormal untuk $L^2(\hat{\Gamma})$. Definisikan $H^2(\Gamma^+)$ sebagai subruang tutup $\overline{span}\{\varepsilon_x : x \in \Gamma^+\}$. Misal P proyeksi dari $L^2(\hat{\Gamma})$ ke $H^2(\Gamma^+)$. Untuk setiap $\phi \in C(\hat{\Gamma})$, operator Toeplitz T_ϕ adalah operator pada $H^2(\Gamma^+)$ yang didefinisikan oleh $T_\phi(f) = P(\phi f), \forall f \in L^2(\hat{\Gamma}), \phi \in C(\hat{\Gamma})$. Aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$ dari grup terurut Γ adalah subaljabar-$*$ dari $B(H^2(\Gamma^+))$ yang dibangun oleh operator Toeplitz $\{T_\phi : \phi \in C(\hat{\Gamma})\}$.

Sebagai catatan, perhatikan bahwa karena $L^2(\hat{\Gamma}) = \overline{C(\hat{\Gamma})}$, maka untuk setiap $\phi \in C(\hat{\Gamma})$ dan $f \in L^2(\hat{\Gamma})$, $\phi f \in L^2(\hat{\Gamma})$. Jadi dapat didefinisikan operasi perkalian di $L^2(\hat{\Gamma})$.

Telah diuraikan konsep aljabar Toeplitz atas suatu grup terurut. Selanjutnya, Murphy (1991) mendefinisikan aljabar Toeplitz abstrak dalam papernya *Ordered Group and Toeplitz Algebra*.

Definisi 3.2.2: Semigrup Isometri. (Lindiarni, 1997: 49)

Misal Γ grup terurut dan B suatu aljabar-C^* unital. Semigrup isometri di B relatif terhadap Γ adalah pemetaan $V: \Gamma^+ \longrightarrow B$ sedemikian sehingga V_x isometri di B untuk setiap $x \in \Gamma^+$ dan $V_{x+y} = V_x V_y$, untuk setiap $x, y \in \Gamma^+$.

Definisi 3.2.3.

Aljabar Toeplitz abstrak dari grup terurut Γ adalah aljabar-C^* B unital yang dibangun oleh V_x, $x \in \Gamma^+$, dimana V adalah semigrup isometri di Γ. Notasikan aljabar-C^* B dengan $C^*(\{V_x : x \in \Gamma^+\}$.

Notasikan aljabar Toeplitz abstrak dari grup terurut Γ dengan $\mathcal{T}(\Gamma)$. Muphy telah membuktikan bahwa aljabar Toeplitz dari suatu grup terurut Γ selalu ada dan bersifat universal, yang terangkum dalam teorema berikut:

Teorema 3.2.4. (Murphy, 1987: 315)
Misal Γ grup terurut dan $\beta: \Gamma^+ \longrightarrow B$ adalah semigrup isometri nonuniter di aljabar-C^* unital B. Terdapat homomorfisma-$*$ unik $\beta^*: \mathcal{T}(\Gamma) \longrightarrow B$ sedemikian sehingga $\beta^* \circ V = \beta$ injektif, dimana $V: \Gamma^+ \longrightarrow \mathcal{T}(\Gamma)$ adalah semigrup isometri di $\mathcal{T}(\Gamma)$.

Berdasarkan teorema diatas, dapat disimpulkan bahwa semua aljabar-C^* yang dibangun oleh semigrup isometri nonuniter dari Γ^+ dapat dipandang sebagai suatu aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(\Gamma)$.