

BAB 1

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Aljabar- C^* merupakan objek utama dalam aljabar operator. Produk silang merupakan salah satu bentuk aljabar- C^* yang merupakan “gabungan” dari dua objek berbeda, misal aljabar- C^* dengan grup, yang dihubungkan oleh suatu pemetaan. Kedua objek dan pemetaan tersebut tergabung dalam suatu sistem yang disebut sistem dinamik. Kajian sistem dinamik dan produk silang merupakan topik yang cukup menarik dan memberikan warna perkembangan pada teori aljabar operator. Hal ini ditandai dengan banyaknya peneliti yang mengkaji masalah sistem dinamik dan produk silang dengan berbagai versi, diantaranya Murphy (1987, 1990, 1991), Stacey (1993), Adji dkk. (1994), Adji (2000), Adji dan Rosjanuardi (2007), Rosjanuardi dan Albania (2012), dan lain-lain.

Misal G suatu grup abelian terurut total dengan G^+ adalah bagian positifnya dan A suatu aljabar- C^* . Sistem (A, G^+, α) dikatakan sebagai sistem dinamik jika terdapat pemetaan yang “menghubungkan” semigrup G^+ dengan aljabar- C^* A , yaitu homomorfisma α dari G^+ ke $\text{Endo}(A)$. Sistem dinamik (A, G^+, α) mempunyai representasi kovarian, yaitu pasangan (π, V) dimana $\pi: A \rightarrow B(H)$ adalah representasi *nondegenerate* dari A pada H (dalam kasus A unital, π adalah representasi unital), dan $V: G^+ \rightarrow \text{Isom}(H)$ representasi isometrik dari G pada H yang memenuhi kondisi kovarian: $\pi(\alpha_x(a)) = V_x \pi(a) V_x^*$, $\forall x \in G, a \in A$. Selanjutnya dari representasi kovarian tersebut dapat dibentuk suatu representasi terbesar (kanonik) yang membangun aljabar- C^* baru yang dibentuk dari sistem dinamik (A, G^+, α) . Notasikan aljabar- C^* tersebut dengan $A \times_\alpha G^+$, yaitu produk silang dari (A, G^+, α) . Jika representasi V dari semigrup G^+ merupakan representasi isometrik, maka singkatnya $A \times_\alpha G^+$ menjadi suatu aljabar- C^* yang dibangun oleh unsur isometri.

Pada tahun 1967, Coburn dalam papernya *The C^* -Algebra Generated by An Isometry I* mengenalkan suatu aljabar- C^* yang dibangun oleh unsur isometri nonuniter untuk kasus grup $G = \mathbb{Z}$. Teori tersebut kemudian dikembangkan oleh Douglas pada tahun 1972. Ia memperluas suatu aljabar- C^* yang dibangun oleh semigrup-semigrup isometri, dimana semigrupnya adalah bagian positif dari \mathbb{R} . Selanjutnya pada tahun 1987, Murphy mengembangkan semigrup yang digunakan Douglas menjadi bagian positif dari suatu grup terurut abelian total. Dalam papernya *Ordered Groups and Toeplitz Algebra*, ia mengenalkan kelas baru dari aljabar- C^* yang mempunyai sifat yang menarik. Untuk setiap grup terurut G , terdapat aljabar- C^* yang berasosiasi, yaitu aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(G)$ dari grup terurut G . Aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(G)$ tersebut memiliki sifat universal terhadap semigrup isometri dari G^+ .

Adji, Laca, Nielsen dan Raeburn dalam papernya *Crossed Products by Semigroups of Endomorphisms and The Toeplitz Algebras of Ordered Groups* (1994) membuktikan bahwa aljabar Toeplitz $\mathcal{T}(G)$ yang dikaji oleh Murphy adalah isomorfik dengan aljabar- C^* yang dibangun oleh isometri yaitu produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$ atas semigrup endomorfisma sebagai akibat dari teorema utamanya. Dalam tugas akhir ini, penulis tertarik untuk mengkaji bentuk, eksistensi, serta keuniversalan produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$ dari sistem dinamik yang mencakup aljabar- C^* B_{Γ^+} , semigrup Γ^+ dari grup terurut abelian total Γ dan aksi α oleh endomorfisma.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian diatas, masalah yang dikaji dalam tugas akhir ini adalah:

- 1.2.1. Bagaimanakah konstruksi sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$?
- 1.2.2. Bagaimanakah konstruksi eksistensi representasi kovarian dari sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$ serta bentuk produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$?

- 1.2.3. Bagaimana hubungan produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$ dengan aljabar- C^* yang dibangun oleh representasi isometrik non-uniter?

1.3 Tujuan Penelitian

Sesuai dengan rumusan masalah diatas, maka tujuan dari penelitian ini adalah untuk:

- 1.3.1. Mengetahui konstruksi sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$.
- 1.3.2. Mengetahui konstruksi eksistensi representasi kovarian dari sistem dinamik $(B_{\Gamma^+}, \Gamma^+, \alpha)$ serta bentuk produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$.
- 1.3.3. Mengetahui hubungan produk silang $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$ dengan aljabar- C^* yang dibangun oleh representasi isometrik non-uniter.

1.4. Sistematika Penulisan

Pada **BAB 1**, diuraikan latar belakang dan permasalahan yang akan dikaji dalam tugas akhir ini. Kemudian pada **BAB 2**, diberikan konsep-konsep dasar aljabar operator sebagai materi penunjang dalam pengkajian permasalahan yang diangkat. Pada **BAB 3**, diuraikan konsep sistem dinamik, produk silang umum dari sistem dinamik, aljabar Toeplitz konkrit atas grup terurut dan aljabar Toeplitz abstrak atas grup terurut. **BAB 4** berisi bahasan utama pada tugas akhir ini, yaitu produk silang atas semigrup endomorfisma $B_{\Gamma^+} \times_{\alpha} \Gamma^+$. Terakhir, pada **BAB 5** diberikan simpulan atas permasalahan yang diangkat serta rekomendasi dari penulis.