BAB VI

KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dibahas pada bab-bab sebelumnya didapat beberapa kesimpulan sebagai berikut:

1. Fungsi $\theta: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ dikatakan fungsi Young jika
   a) θ konvek pada $\mathbb{R}$
   b) $\theta(-x) = \theta(x)$
   c) $\theta(0) = 0, \theta(\pm\infty) = \infty$, dan
   d) jika $c = \sup dom(\theta) \in \overline{\mathbb{R}}$ maka $\lim_{x\to c^-} \theta(x) = \theta(c)$.

   Lebih jauh, fungsi Young $\theta: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$ dan komplemennya $\theta^*: \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}^+}$, berturut-turut dapat direpresentasikan sebagai

$$\theta(x) = \int_0^{|x|} \varphi(s)\ ds$$

   dan

$$\theta^*(y) \coloneqq \int_0^{|y|} \phi(t)\, dt,$$

   dimana $\varphi, \phi: [0, \infty) \to \overline{\mathbb{R}}$, tak turun, kontinu kiri, bukan merupakan fungsi konstan 0 atau ∞. Juga berlaku ketaksamaan Young

$$xy \leq \theta(x) + \theta^*(y).$$

2. Ruang Orlicz adalah ruang fungsi

$$L_\theta(X, \mu) \coloneqq \left\{ f: X \to \overline{\mathbb{R}}, f \text{ terukur} \middle| \exists \alpha > 0, \int_X \theta(\alpha f) d\mu < \infty \right\},$$

   dan merupakan ruang Banach. Pada ruang Orlicz didefinisikan beberapa norm diantaranya Norm Luxemburg $\|.\|_\theta$ dan norm Orlicz $|.|_\theta$, dimana keduanya adalah norm yang ekivalen. Jika $dom(\theta) = \mathbb{R}$, $N_\theta(.)$ dan

$N_\theta^B(f)$ merupakan norm untuk L_θ, juga norm Luxemburg $\|.\|_\theta$, norm Orlicz $|.|_\theta$, $N_\theta(.)$, dan $N_\theta^B(f)$ semuanya ekivalen.

3. Dual ruang Orlicz besar L_θ dan ruang Orlicz kecil M_θ berturut-turut adalah L'_θ dan M'_θ, dimana L'_θ adalah himpunan semua fungsional linear kontinu pada L_θ, dan M'_θ adalah himpunan semua fungsional linear kontinu pada M_θ.

   Berdasarkan ketaksamaan Holder, untuk setiap $h \in L_{\theta^*}$ dapat didefinisikan suatu fungsional linear yang memetakan M_θ ke $\mathbb{R}$ dengan

$$\ell_h(f) = \int_X hf\, d\mu$$

   untuk semua $f \in M_\theta$, dan pemetaan yang memetakan $L_{\theta^*} \longrightarrow M'_\theta$ dimana $h \longrightarrow \ell_h$ adalah isomorfisma. Akibatnya $M'_\theta \cong L_{\theta^*}$.