BAB V

DUALITAS RUANG ORLICZ

Karena ketaksamaan Holder yang telah dipelajari pada bab sebelumnya, Untuk sembarang $h \in L_{\theta^*}$, kita dapat mendefinisikan suatu fungsional linear kontinu ℓ_h yang memetakan L_θ kedalam $\mathbb{R}$. Oleh sebab itu, secara langsung dapat diperoleh suatu pemetaan T yang memetakan L_{θ^*} kedalam M'_θ dengan $T(h) = \ell_h$. Pada bab ini, akan diperlihatkan bahwa pemetaan T adalah suatu isomorfisma. Sehingga $M'_\theta \cong L_{\theta^*}$.

5.1 Dualitas Ruang Orlicz

Untuk sembarang $h \in L_{\theta^*}$, didefinisikan fungsi $\ell_h : L_\theta \to \mathbb{R}$ dimana

$$\ell_h(f) := \int_X hf \, d\mu, \quad f \in L_\theta. \tag{5.1.1}$$

Berdasarkan ketaksamaan Holder

$$|\ell_h(f)| \leq 2\|h\|_{\theta^*}\|f\|_\theta < \infty.$$

Karenanya ℓ_h adalah fungsional linier kontinu pada L_θ.

Lema 5.1.1

Misalkan h fungsi terukur.

a) Jika $hf \in L_1$ untuk semua $f \in L_\theta$, maka $h \in L_{\theta^*}$.
b) Misalkan θ *finite*. Jika $hf \in L_1$ untuk semua $f \in M_\theta$, maka $h \in L_{\theta^*}$.

Bukti.

a) Misalkan h suatu fungsi terukur sedemikian sehingga $hf \in L_1$ untuk semua $f \in L_\theta$. definisikan $h_n \coloneqq |h| \wedge n$. Karena μ ukuran σ-hingga terdapat barisan naik berukuran hingga $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k$. Definisikan

$$\ell_{n,k}(f) \coloneqq \int_X \chi_{x_k} h_n f \, d\mu = \int_{X_k} h_n f \, d\mu$$

Untuk setiap $f \in L_\theta$.

Karena, $h_n \leq n$, maka terdapat r sedemikian sehingga $rh_n \leq rn < \sup dom(\theta)$, akibatnya $\int_X \theta^*(\chi_{x_k} rh_n)\, d\mu \leq \theta^*(rh_n)\mu(X_k) < \infty$, maka $\chi_{x_k} h_n \in L_\theta$. Berdasarkan ketaksamaan Holder,

$|\ell_{n,k}(f)| \leq 2\|\chi_{X_k} h_n\|_{\theta^*} \|f\|_\theta$, menunjukkan $\ell_{n,k}$ fungsional linear kontinu pada L_θ, dan untuk semua $n, k \geq 1$,

$$|\ell_{n,k}(f)| \leq \int_X \chi_{x_k} h_n |f| \, d\mu \leq \int_X |h||f| \, d\mu = A(f) < \infty,$$

Sehingga $\lim_{n,k\to\infty} \ell_{n,k}(f)$ ada untuk setiap f. Berdasarkan teorema Banach-Saks-Steinhaus, keluarga $\{\ell_{n,k}(f)\}$ terbatas seragam. Dengan kata lain terdapat $M > 0$ sedemikian sehingga

$$\|\ell_{n,k}\|_\theta \leq M$$

untuk semua n, k.

Dilain pihak, Karena h_n dan f terukur pada X, maka $\int_{X_k} h_n f \, d\mu$ suatu ukuran, sehingga ketika $k \to \infty$, $\ell_{n,k}(f) \to \int_X h_n f \, d\mu$. Karena ketika $n \to \infty$, $h_n \to h$ titik demi titik, berdasarkan teorema kekonvergenan monoton $\int_X h_n f \, d\mu \to \int_X hf \, d\mu$. Sehingga,

$$\lim_{n,k\to\infty} \ell_{n,k}(f) = \lim_{n,k\to\infty} \int_{X_k} h_n f \ d\mu = \int_X hf \ d\mu.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} |h|_{\theta^*} &= \sup\left\{ \int_X hf \ d\mu \,\middle|\, f \in L_\theta, \|f\|_\theta \le 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ \lim_{n,k\to\infty} \ell_{n,k}(f) \,\middle|\, f \in L_\theta, \|f\|_\theta \le 1 \right\} \\ &\le \sup\{M\|f\|_\theta \mid f \in L_\theta, \|f\|_\theta \le 1\} \\ &= M < \infty. \end{aligned}$$

Berdasarkan proposisi 4.1.17, $\|h\|_{\theta^*} \le |h|_{\theta^*} < \infty$. Sehingga $h \in L_{\theta^*}$.

b) bukti b) serupa dengan a), cukup dengan menukar $|h|_{\theta^*}$ dengan $N_{\theta^*}(h)$.

Lema 5.1.3

Ruang $B_X \cap M_\theta$ padat dalam M_θ.

Bukti. Untuk kasus $dom(\theta) \subsetneq \mathbb{R}$, $M_\theta = \{0\}$. $B_\chi \cap M_\theta = M_\theta$ padat dalam M_θ.

Misalkan $dom(\theta) = \mathbb{R}$ dan f sembarang anggota M_θ. Untuk setiap $n \ge 1$, didefinisikan $f_n := (-n)\vee(f\wedge n)$. $f_n \in B_X \cap M_\theta$. Jelas $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ titik demi titik. Untuk setiap n, misalkan $A_n := \{x \in X \mid |f(x)| > n\}$, diperoleh $\| f - f_n\|_\theta = \|f\chi_{A_n}\|_\theta$. Untuk setiap $a > 0$, $af\chi_{A_n}$ konvergen ke 0 titik demi demi titik ketika $n \to \infty$. Oleh sebab itu $\theta(af\chi_{A_n})$ konvergen titik demi titik ke $\theta(0) = 0$ ketika $n \to \infty$. Karena $\theta(af\chi_{A_n})$ terdominasi oleh $\theta(f)$, berdasarkan Teorema kekonvergenan terdominasi Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \theta(af\chi_{A_n}) \, d\mu = 0.$$

Berdasarkan Lema 4.1.9, $\| f - f_n \|_\theta = \left\| f\chi_{A_n} \right\|_\theta = 0$. Terbukti.

Lema 5.1.4

Jika $dom(\theta) = \mathbb{R}$ dan $\mu(X) < \infty$ maka dual M'_θ dari M_θ isomorfik dengan L_{θ^*}. Yaitu

$$M'_\theta \cong L_{\theta^*}.$$

Bukti. Akan dibuktikan untuk setiap $\ell \in M'_\theta$ terdapat $h \in L_{\theta^*}$ tungggal sedemikian sehingga $\ell = \ell_h$.

Untuk semua $h \in L_{\theta^*}$, ℓ_h yang didefinisikan pada (5.1.1) adalah fungsional linear kontinu. Selanjutnya akan dibutktikan pemetaan yang memetakan

$$L_{\theta^*} \longrightarrow M'_\theta$$

dimana

$$h \longrightarrow \ell_h$$

adalah pemetaan pada (*onto*).

Definisikan $v(E) := \ell(\chi_E), E \in \Sigma$. Karena X ukuran σ-hingga, misalkan $E_1, E_2, \cdots$ himpunan-himpunan terukur disjoin sedemikian sehingga $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Karena $\mu(E) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \infty$, maka $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(E_k) = 0$, konsekuensinya

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\| \chi_E - \sum_{k=1}^{n} \chi_{E_k} \right\|_\theta &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \chi_{E_k} \right\|_\theta \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\inf \left\{ b > 0 \,\middle|\, \int_X \theta\left(\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \chi_{E_k}}{b} \right) d\mu \le 1 \right\} \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\inf \left\{ b > 0 \,\middle|\, \int_X \theta\left(\frac{1}{b} \right) \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{E_k} d\mu \le 1 \right\} \right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\inf\left\{b>0 \,\middle|\, \int_X \theta\left(\frac{1}{b}\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\mu(E_k)\le 1\right\}\right]$$
$$= 0.$$

Karena ℓ kontinu dan linear pada M_θ, maka

$$\ell(\chi_E) = \ell\left(\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{E_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\ell(\chi_{E_k})$$

atau

$$v(E) = \sum_{k=1}^{\infty} v(\chi_{E_k}). \tag{5.1.5}$$

Untuk menunjukkan v ukuran bertanda (*signed measure*), akan ditunjukkan ruas kanan persamaan (5.1.5) konvergen mutlak. Definisikan $c_k \coloneqq \operatorname{sgn}\left(\ell(\chi_{E_k})\right)$ dan $c \coloneqq \operatorname{sgn}(\ell(\chi_E))$, maka

$$\lim_{n\to\infty}\left\|c\chi_E - \sum_{k=1}^{n} c_k\chi_{E_k}\right\|_\theta = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\chi_{E_k}\right\|_\theta$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\inf\left\{b>0 \,\middle|\, \int_X \theta\left(\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\chi_{E_k}}{b}\right)d\mu \le 1\right\}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\inf\left\{b>0 \,\middle|\, \int_X \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{E_k}\theta\left(\frac{c_k}{b}\right)d\mu \le 1\right\}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\inf\left\{b>0 \,\middle|\, \int_X \theta\left(\frac{1}{b}\right)\sum_{k=n+1}^{\infty}\mu(E_k)\le 1\right\}\right]$$
$$= 0.$$

Menunjukkan bahwa

$$c\ell(\chi_E) = \ell(c\chi_E) = \ell\left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k\chi_{E_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\ell(\chi_{E_k})$$

atau

$$|v(E)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left|v\left(\chi_{E_k}\right)\right|$$

konvergen. Sehingga v ukuran bertanda. Perhatikan bahwa, jika $E \in \Sigma$ dengan $\mu(E) = 0$, maka χ_E merepresentasikan fungsi nol μ-a.e pada X, sehingga $v(E) = \ell(\chi_E) = 0$. Akibatnya v kontinu mutlak. Berdasarkan teorema Radon-Nikodym, terdapat fungsi h yang terintegralkan pada X sedemikian sehingga

$$\ell(\chi_E) = v(E) = \int_E h \, d\mu.$$

Akibatnya untuk sembarang fungsi simpel $s \in M_\theta$,

$$\ell(s) = \int_X hs \, d\mu.$$

Oleh sebab itu, jika $f \in B_X \cap M_\theta$ maka

$$\ell(f) = \int_X hf \, d\mu.$$

Misalkan $f_+ \coloneqq 0 \vee f, f_- \coloneqq 0 \vee (-f), \eta_+ \coloneqq \chi_{\{x \in X | h(x) \geq 0\}}$, dan $\eta_- \coloneqq \chi_{\{x \in X | h(x) < 0\}}$, sehingga untuk semua $f \in M_\theta$,

$$\ell(f) = \ell(f_+\eta_+) + \ell(f_+\eta_-) - \ell(f_-\eta_+) - \ell(f_-\eta_-), \tag{5.1.6}$$

dimana $f_+\eta_+, f_+\eta_-, f_-\eta_+, f_-\eta_-$ adalah fungsi-fungsi nonnegatif. Padahal, Untuk semua $f \geq 0, f \in M_\theta$, berdasarkan konsekuensi Teorema kekonvergenan terdominasi (lihat bukti Lema 5.1.3), $\lim_{n\to\infty}(f \wedge n) = f$. Karena ℓ kontinu, $\lim_{n\to\infty} \ell(f \wedge n) = \ell(f)$. Berdasarkan Teorema kekonvergenan monoton,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x \in X | h(x) \geq 0\}} (f \wedge n)h \, d\mu = \int_{\{x \in X | h(x) \geq 0\}} fh \, d\mu$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{x\in X|h(x)<0\}} (f \wedge n)h \; d\mu = \int_{\{x\in X|h(x)<0\}} fh \, d\mu,$$

akibatnya

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (f \wedge n)h \; d\mu = \int_X fh \, d\mu.$$

Berdasarkan hasil ini dan persamaan (5.1.6), diperoleh

$$\ell(f) = \int_X fh \, d\mu$$

untuk semua $f \in M_\theta$. Berdasarkan Lema 5.1.2 b), $h \in L_{\theta^*}$. Terbukti.

Proposisi 5.1.7

Jika $dom(\theta) = \mathbb{R}$, maka dual M'_θ dari M_θ isomorfik dengan L_{θ^*}. Yaitu

$$M'_\theta \;\cong L_{\theta^*}.$$

Bukti. Cukup dibuktikan untuk kasus $\mu(X) = \infty$.

Untuk semua $h \in L_{\theta^*}$, ℓ_h yang didefinisikan pada (5.1.1) adalah fungsional linear kontinu. Seperti pada bukti Lema 5.1.4, akan dibutktikan pemetaan yang memetakan

$$L_{\theta^*} \longrightarrow M'_\theta$$

dimana

$$h \longrightarrow \ell_h$$

adalah pemetaan pada (*onto*).

Misalkan $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan naik dari himpunan-himpunan terukur hingga dimana $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Misalkan $\ell \in M'_\theta$, berdasarkan Lema 5.1.4, untuk setiap n terdapat $h_n \in L_{\theta^*}$ sedemikian sehingga $h_n = 0$ pada $X - X_n$ dan

$$\ell(f) = \int_X h_n f \, d\mu,$$

dimana $f = 0$ pada $X - X_n$. Karena h_n tunggal untuk setiap n, maka $h_{n+1} = h_n$ pada X_n. Definisikan $h(x) = h_n(x)$ jika $x \in X_n$, sehingga $h_n \to h$ titik demi titik pada X. Berdasarkan Teorema kekonvergenan monoton, untuk setiap $g \in M_\theta$ dengan $\|g\|_\theta \leq 1$ berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (h_n \vee 0)|g_n| \, d\mu = \int_X (h \vee 0)|g| \, d\mu$$

dan

$$\lim_{n\to\infty} \int_X (-h_n \vee 0)|g_n| \, d\mu = \int_X (-h \vee 0)|g| \, d\mu,$$

dimana $g_n = g$ pada X_n dan $g_n = 0$ pada $X - X_n$.

Akibatnya

$$\lim_{n\to\infty} \int_X h_n|g_n| \, d\mu = \int_X h|g| \, d\mu.$$

Karena ℓ fungsional linear terbatas, maka

$$\int_X h|g| \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X h_n|g_n| \, d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \|\ell\| \|g_n\|_\theta \leq \lim_{n\to\infty} \|\ell\| \|g\|_\theta \leq \|\ell\|,$$

akibatnya

$$N_{\theta^*}(h) \leq \|\ell\| < \infty.$$

Berdasarkan (4.1.20), $N_{\theta^*}(h) \geq \|h\|_{\theta^*}$. Oleh sebab itu, $\|h\|_{\theta^*} < \infty$, menunjukkan $h \in L_{\theta^*}$.

Definisikan $f_n = f$ pada X_n dan $f_n = 0$ pada $X - X_n$, berdasarkan ketaksamaan Holder, hf terintegralkan pada X, dan $|hf_n| \leq |hf|$ μ-a.e pada X. Berdasarkan Teorema kekonvergenan terdominasi Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X hf_n \, d\mu = \int_X hf \; d\mu \tag{5.1.8}$$

Dilain pihak, $f_n \to f$ titik demi titik pada X. Ambil sembarang $a \geq 0$, maka $\theta\big(a(f_n - f)\big) \to 0$ titik demi titik μ-a.e pada X. Berdasarkan Teorema kekonvergenan monoton,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \theta\big(a(f_n - f)\big) \; d\mu = 0 \tag{5.1.9}$$

Berdasarkan Lema 4.1.9, $\|f_n - f\|_\theta = 0$. Karena ℓ kontinu, maka

$$\lim_{n\to\infty} \ell(f_n) = \ell(f). \tag{5.1.10}$$

Padahal, untuk setiap n

$$\ell(f_n) = \int_{X_n} h_n f_n \, d\mu = \int_X hf_n \, d\mu.$$

Berdasarkan (5.1.8) dan (5.1.10), $\ell(f) = \int_X \; hf \; d\mu$. Terbukti.