BAB II
LANDASAN TEORI

2.1 Analisis Regresi

Tidak jarang dihadapkan dengan persoalaan yang melibatkan dua atau lebih peubah atau variabel yang ada atau diduga ada dalam suatu hubungan tertentu. Misalnya hasil produksi padi bergantung pada jumlah pupuk yang digunakan, curah hujan, cuaca, dan sebagainya. Untuk menjawab hal tersebut, perlu dibahas mengenai bentuk hubungan yang ada atau diperkirakan ada antara kedua peubah tersebut. Bentuk hubungan ini dikenal dengan nama *regresi* untuk satu variabel atas variabel lain. Hubungan ini biasanya dinyatakan dalam persamaan matematis yang bentuknya bisa linear atau non-linear (Sudjana, 2003:5).

Analisis regresi linear adalah metode statistika yang dapat digunakan untuk mempelajari hubungan antar sifat permasalahan yang sedang diselidiki. Model analisis regresi linear dapat memodelkan hubungan antara dua variabel atau lebih. Pada model ini terdapat variabel tak bebas yang mempunyai hubungan fungsional dengan satu atau lebih variabel bebas.

2.1.1 Analisis Regresi Linear Sederhana

Regresi linier sederhana adalah regresi yang melibatkan hubungan antara satu variabel tak bebas dihubungkan dengan satu variabel bebas. Bentuk umum persamaan regresi linier sederhana adalah:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X + \text{å} \qquad (2.1)$$

dimana:

Y : variabel tak bebas

β_0 : konstanta

β_1 : koefisien regresi

X : variabel bebas

ε : galat

Model dugaan dinyatakan oleh : $\hat{Y} = \widehat{\beta_0} + \widehat{\beta_1}X$ atau $\hat{Y} = b_0 + b_1X$

Didapatkan galat, yaitu ε sebagai berikut : $\varepsilon = Y - \hat{Y} = Y - b_0 - b_1X$

Parameter b_0 dan $b_1$dapat ditaksir dengan menggunakan metode kuadrat terkecil yang meminimumkan jumlah kuadrat galat antara hasil model dengan hasil pengamatan. Prosedur metode kuadrat terkecil adalah sebagai berikut :

i. Membentuk $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ sebagai fungsi b_0 dan b_1, $S = f(\, b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1X_i)^2$

ii. Mendiferensialkan parsial S terhadap b_0 dan b_1, kemudian hasil diferensialnya, yaitu $\frac{\partial S}{\partial b_0}$ dan $\frac{\partial S}{\partial b_1}$ disamakan dengan nol

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = \sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - b_0 - b_1X_i)(-1) = 0$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\, Y_i - b_0 - b_1X_i) = 0$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i - \sum_{i=1}^{n} b_0 - \sum_{i=1}^{n} b_1X_i = 0$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i - nb_0 - b_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$
$$= nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial b_1} = \sum_{i=1}^{n} 2(Y_i - b_0 - b_1X_i)(-X_i) = 0$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\, Y_i - b_0 - b_1X_i)(X_i) = 0$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Y_iX_i - \sum_{i=1}^{n} b_0X_i - \sum_{i=1}^{n} b_1{X_i}^2 = 0$$
$$= \sum_{i=1}^{n} X_iY_i - b_0 \sum_{i=1}^{n} X_i - b_1 \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 = 0$$
$$= b_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_iY_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \ldots\ldots . (2)$$

Persamaan (1) dan (2) disebut persamaa normal.

iii. Menghitung b_0 dan b_1 berdasarkan dua persamaan yang terbentuk. Dengan menggunakan aturan *Cramer* untuk menyelesaikan sistem persamaan linear berikut :

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} X_i + b_1 \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \ldots\ldots\ldots\ldots.(2)$$

Sebelum menggunakan aturan *Cramer*, harus dibentuk matriks yang mewakili persamaan (1) dan (2). Berikut adalah matriks yang didapat dari persamaan (1) dan (2) :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{bmatrix}$$

$$A \times b = c$$

Perhatikan matriks A :

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{bmatrix}$$

Ganti entri-entri pada matriks A pada kolom ke-1 dengan entri-entri pada matriks **c** sehingga didapat matriks A_1, yaitu :

$$A_1 = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i & \sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 \end{bmatrix}$$

Ganti entri-entri pada matriks A pada kolom ke-2 dengan entri-entri pada matriks **c,** sehingga didapat matriks A_2, yaitu :

$$A_2 = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \end{bmatrix}$$

Setelah memperoleh matriks-matriks A, A_1, dan A_2, nilai dari b_0 dan b_1 bisa didapat dengan cara :

$$b_0 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

$$b_1 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

2.1.2 Analisis Regresi Linear Berganda

Analisis regresi linear berganda merupakan pengembangan lanjut dari analisis regresi linear sederhana, khususnya pada kasus yang mempunyai lebih banyak variabel bebasnya. Hal ini sangat diperlukan dalam kenyataannya. Regresi linier berganda adalah regresi yang melibatkan hubungan antara satu variabel tak bebas dihubungan dengan dua atau lebih variabel bebas. Bentuk umum persamaan regresi linier berganda adalah:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_n X_n + \varepsilon \qquad (2.2)$$

dimana :

Y : variabel tak bebas

β_0 : konstanta

$\beta_1, \dots, \beta_n$: koefisien regresi

$X_1, \dots, X_n$: variabel bebas

ε : galat

Model dugaan dinyatakan oleh : $\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + \cdots + b_n X_n$

Langkah perhitungan penaksir koefisien regresi :

i. Membentuk $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ sebagai fungsi b_0 dan b_1, $S = f(\,b_0, b_1) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - b_1 X_{1i} - \cdots - b_k X_{ki})^2$
ii. Kemudian didiferensialkan terhadap b_0, b_1, ..., b_k, dan hasilnya disamakan dengan nol,

$$\frac{\partial S}{\partial b_0} = 0, \frac{\partial S}{\partial b_1} = 0, \dots, \frac{\partial S}{\partial b_k} = 0$$

Hasil dari perhitungan di atas disebut dengan persamaan normal, yang akan disajikan di bawah ini :

$$nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{2i} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} = \sum_{i=1}^{n} x_{1i}Y_i$$

$$\vdots$$

$$b_0 \sum_{i=1}^{n} x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} + b_2 \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} + \cdots + b_k \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_{ki}Y_i$$

Untuk mempermudah perhitungan penaksir koefisien regresi, maka persamaan normal diubah ke dalam bentuk matriks seperti di bawah ini :

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki} & \sum_{i=1}^{n} x_{1i}x_{ki} & \cdots & \sum_{i=1}^{n} x_{ki}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_{1i}Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ki}Y_i \end{bmatrix}$$

$$A_{(k+1)\times(k+1)} \times b_{(k+1)\times 1} = g_{(k+1)\times 1}$$

Sehingga untuk mencari nilai b (penaksir koefisien regresi) adalah :

$$b = A^{-1}g$$

Dalam melakukan analisis regresi linear berganda, sering dijumpai masalah multikolinearitas pada variabel bebasnya. Ini merupakan pelanggaran terhadap salah satu yang disyaratkan pada penggunaan regresi linear berganda, seperti yang telah diungkapkan oleh Damodar N. Gujarati dalam bukunya yang berjudul *Basic*

Econometrics. Menurut (Gujarati, 2004) asumsi-asumsi yang mendasari analisis regresi berganda tersebut antara lain adalah :

a. Nilai variabel, khususnya variabel bebas mempunyai nilai nilai tertentu atau merupakan nilai yang didapat dari hasil survey tanpa kesalahan berarti.
b. Variabel tak bebas harus mempunyai hubungan linear dengan variabel bebas.
c. Tidak terjadi multikolinearitas, yaitu adanya korelasi di antara variabel bebas.
d. Varians dari variabel tak bebas terhadap garis regresi harus sama untuk semua nilai variabel bebas.
e. Nilai variabel tak bebas harus tersebar normal atau minimal mendekati normal.

2.2 Multikolinearitas

2.2.1 Definisi Multikolinearitas

Multikolinieritas adalah terjadinya hubungan linier antara variabel bebas dalam suatu model regresi linier berganda (Gujarati, 2004). Maksud dari hubungan antara sesama variabel bebas adalah terdapat 2 variabel bebas X_1 dengan X_2. Jika X_1 dapat dinyatakan sebagai fungsi linear dari X_2 atau sebaliknya, maka dapat dikatakan bahwa terdapat hubungan linear di antara kedua variabel.

2.2.2 Akibat Adanya Multikolinearitas

Adapun dampak adanya multikolinieritas dalam model regresi linier berganda adalah (Gujarati, 2004):

1. Penaksir parameter masih bersifat tak bias, linear, dan terbaik (*Best Linear Unbiased Estimator*), tetapi mempunyai variansi dan kovariansi yang besar sehingga sulit mendapatkan taksiran (estimasi) yang tepat.
2. Akibat penaksir parameter mempunyai variansi dan kovariansi yang yang besar, menyebabkan interval estimasi akan cenderung lebih lebar dan nilai hitung statistik uji t akan kecil, sehingga membuat variabel bebas secara statistik tidak signifikan mempengaruhi variabel tak bebas.

3. Walaupun secara individu variabel bebas tidak berpengaruh terhadap variabel tak bebas melalui uji t, tetapi nilai koefisien determinasi masih bisa relatif tinggi.

2.2.3 Mendeteksi Multikolinearitas

Ada beberapa cara untuk mendeteksi multikolinearitas, yaitu dengan melihat nilai *variance inflation factor* (VIF) pada model regresi dan membandingkan nilai koefisien determinasi individual (r^2) dengan nilai determinasi secara serentak (R^2). Jika nilai VIF lebih besar dari 5, maka variabel tersebut mempunyai persoalan multikolinearitas dengan variabel bebas lainnya. Selanjutnya untuk mendeteksi adanya multikolinieritas dengan membandingkan nilai koefisien determinasi individual (r^2) adalah dengan cara meregresikan setiap variabel bebas dengan variabel bebas lainnya, dengan tujuan untuk mengetahui nilai koefisien r^2 untuk setiap variabel yang diregresikan. Selanjutnya nilai r^2 tersebut dibandingkan dengan nilai koefisien determinasi R^2. Kriteria pengujian yaitu jika $r^2 > R^2$ maka terjadi multikolinearitas dan jika $r^2 < R^2$ maka tidak terjadi multikolinearitas (Gujarati, 2004).

2.3 Matriks

Matriks adalah jajaran empat persegi panjang dari bilangan-bilangan. Bilangan-bilangan dalam jajaran tersebut disebut *entri* dari matriks. Ukuran (*size*) suatu matriks dinyatakan dalam jumlah baris (arah horizontal) dan kolom (arah vertikal).

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Untuk matriks di atas memiliki dua baris dan tiga kolom, sehingga ukurannya adalah 2 kali 3 (yang ditulis 2x3). Pada penulisan ukuran, bilangan pertama selalu menunjukkan jumlah baris dan bilangan kedua menunjukkan jumlah kolom (Anton dan Rorres, 2004:26).

2.3.1 Operasi pada Matriks

Operasi Penjumlahan dan Pengurangan pada Patriks

Definisi :

Jika A dan B adalah matriks-matriks dengan ukuran yang sama, maka jumlah (*sum*) A+B adalah matriks yang diperoleh dengan menjumlahkan entri-entri pada B dengan entri-entri yang bersesuaian pada A dan selisih (*difference*) A-B adalah matriks yang diperoleh dengan mengurangkan entri-entri pada A dengan entri-entri yang bersesuaiaan pada B. Matriks dengan ukuran yang berbeda tidak dapat dijumlahkan atau dikurangkan (Anton dan Rorres, 2004:26).

Operasi Perkalian pada Matriks

Definisi :

Jika A adalah matriks $m \times r$ dan B adalah matriks $r \times n$ maka hasilkali (*product*) AB adalah matriks $m \times n$ yang entri-entrinya ditentukan sebagai berikut. Untuk mencari entri pada baris i dan kolom j dari AB, pisahkan baris i dari matriks A dan kolom j dari matriks B. Kalikan entri-entri yang bersesuaiaan dari baris dan kolom tersebut dan kemudian jumlahkan hasil yang diperoleh.

2.3.2 Transpos suatu Matriks

Definisi :

Jika A adalah matriks $m \times n$, maka transpos dari A (*transpose of* A), dinyatakan dengan A^T, didefinisikan sebagai matriks $m \times n$ yang didapatkan dengan mempertukarkan baris-baris dan kolom-kolom dari A; sehingga kolom pertama dari A^T adalah baris pertama dari A, kolom kedua dari A^T adalah baris kedua dari A, dan seterusnya (Anton dan Rorres, 2004:26).

2.3.3 Determinan

Definisi :

Misalkan A adalah suatu matriks bujur sangkar. Fungsi determinan (*determinant function*) dinotasikan dengan *det* dan kita mendefinisikan det(A) sebagai jumlah dari semua hasil kali elementer bertanda dari A. Angka det(A) disebut determinan dari A (*determinant of A*) (Anton dan Rorres, 2004:26).

2.3.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi :

Jika A adalah sebuah matriks *n x n*, maka sebuah vektor tak nol **x** pada R^n disebut vektor eigen (*eigenvector*) dari A jika A**x** adalah sebuah kelipatan skalar dari **x**; Jelasnya,

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

Untuk skalar sebarang λ. Skalar λ disebut nilai eigen (*eigenvalue) dari* A, dan **x** disebut sebagai vektor eigen dari A yang terkait dengan λ (Anton dan Rorres, 2004:26).