BAB III

GRAF BERARAH BARIS-BERHINGGA

Pada bab ini akan dibahas konsep-konsep pada graf berarah. Lebih lanjut, akan dibahas juga lintasan berhingga, lintasan tak hingga, dan himpunan silinder beserta contohnya.

3.1 Graf Berarah

Berikut ini akan dibahas graf berarah, graf berarah baris-berhingga dan produk dari graf berarah

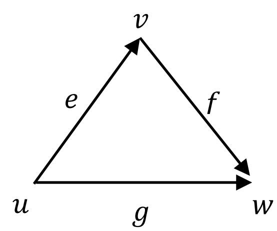
Definisi 3.1.1: Graf Berarah (Raeburn, 2005: 5)

Sebuah graf berarah E terdiri dari pasangan

1. E^0 merupakan himpunan terhitung (*countable*) yang unsur-unsurnya disebut titik.
2. E^1 merupakan himpunan terhitung (*countable*) yang unsur-unsurnya disebut sisi.
3. $r, s: E^1 \rightarrow E^0$ merupakan dua fungsi yang disebut fungsi *range* dan *source*, $\forall\, e \in E^1$, $s(e)$ merupakan *source* dari e dan $r(e)$ merupakan *range* dari e.
4. Jika $s(e) = v$ dan $r(e) = w$, e adalah sebuah sisi dari v ke w.

Contoh 3.1.2

Diberikan $E^0 = \{u, v, w\}$ dan $E^1 = \{e, f, g\}$, dengan $s(e) = s(g) = u$, $r(e) = s(f) = v$ dan $r(f) = r(g) = w$, ilustrasi dari graf E dapat diberikan seperti gambar

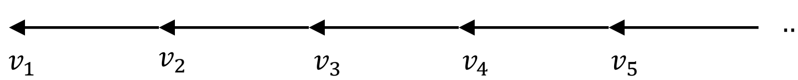


Definisi 3.1.3: Graf Berarah Baris-Berhingga (Raeburn, 2005: 6)

Sebuah graf berarah E disebut baris-berhingga, jika setiap titiknya menerima paling banyak berhingga sisi, yaitu, dimana $r^{-1}(v) \coloneqq \{e \in E^1; r(e) = v\}$ adalah himpunan berhingga untuk setiap $v \in E^0$.

Contoh 3.1.4

Diberikan $E^0 = \{v_n\,; n \geq 0\}$ merupakan himpunan tak hingga dan E^1 merupakan gabungan dari himpunan tunggal $\{e\}$, maka dapat diilustrasikan sebagai berikut



Definisi 3.1.5: Produk dari Graf Berarah (Johnston & Reynolds: 2009)

Produk dari graf berarah E dan F adalah graf $E \times F = (E^0 \times F^0, (E^1 \times F^0) \cup (E^0 \times F^1), r_\times, s_\times)$, dimana $r_\times$ dan $s_\times$ didefinisikan sebagai berikut:

Untuk setiap $e \in E^1, f \in F^1, u \in E^0, v \in F^0$,

$$\begin{array}{ll} r_\times(e,v) = (r_E(e), v) & r_\times(u,f) = \big(u, r_F(f)\big) \\ s_\times(e,v) = (s_E(e), v) & s_\times(u,f) = \big(u, s_F(f)\big) \end{array}$$

Contoh 3.1.6

Diberikan graf berarah E dengan $E^0 = \{u, v\}$, $E^1 = \{e\}$ dimana $s(e) = u$ dan $r(e) = v$, dan graf F dengan $F^0 = \{w, x\}$, $F^1 = \{f\}$ dimana $s(f) = w$ dan $r(f) = x$.

Maka graf $E \times F = (E^0 \times F^0, (E^1 \times F^0) \cup (E^0 \times F^1), r_\times, s_\times)$, dimana

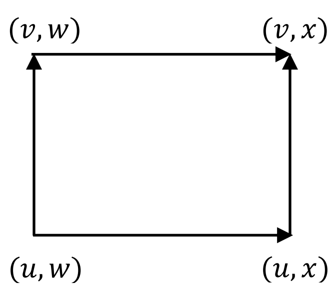
$E^0 \times F^0 = \{(u,w), (v,w), (v,x), (u,x)\}$,

$(E^1 \times F^0) \cup (E^0 \times F^1) = \{(e,w), (e,x)\} \cup \{(u,f), (v,f)\}$, dan

$$\begin{array}{ll} r_\times\big((e,w)\big) = (r_E(e), w) & r_\times(u,f) = \big(u, r_F(f)\big) \\ r_\times\big((e,x)\big) = (r_E(e), x) & r_\times(v,f) = \big(v, r_F(f)\big) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} s_\times(e,w) = (s_E(e), w) & s_\times(u,f) = \big(u, s_F(f)\big) \\ s_\times(e,x) = (s_E(e), x) & s_\times(v,f) = \big(v, s_F(f)\big) \end{array}$$

Graf $E \times F$ dapat diilustrasikan sebagai berikut



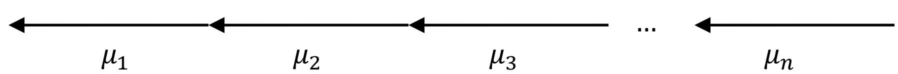
3.2 Lintasan Pada Graf Berarah

Berikut ini akan dibahas konsep lintasan berhingga dan lintasan tak hingga pada sebuah graf berarah, dan juga akan dibahas himpunan silinder.

Definisi 3.2.1: Lintasan Berhingga (Raeburn, 2005: 9)

Lintasan dengan panjang n dari graf berarah E merupakan barisan $\mu = \mu_1 \ldots \mu_n$ dari sisi-sisi di E sedemikian sehingga $s(\mu_i) = r(\mu_{i+1})$ untuk $1 \leq i \leq n-1$.

Selanjutnya dituliskan $|\mu| = n$ untuk panjang dari μ. Himpunan E^n merupakan himpunan dari lintasan-lintasan dengan panjang n. E^n dapat diilustrasikan sebagai berikut



Dari ilustrasi tersebut, diperoleh

$E^1 = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$

$E^2 = \{(\mu_1\mu_2), (\mu_2\mu_3), \ldots, (\mu_{n-1}\mu_n)\}$

$E^3 = \{(\mu_1\mu_2\mu_3), (\mu_2\mu_3\mu_4), \ldots, (\mu_{n-2}\mu_{n-1}\mu_n)\}$

$\vdots$

$E^n = \{\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n\}$

Selanjutnya definisikan $E^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E^n$. Kemudian, kita perluas pemetaan *range* dan *source* ke E^* dengan menetapkan $r(\mu) = r(\mu_1)$ dan $s(\mu) = s(\mu_{|\mu|})$ untuk $|\mu| > 1$, dan $r(v) = v = s(v)$ untuk $v \in E^0$.

Jika μ dan ν merupakan lintasan-lintasan dengan $s(\mu) = r(\nu)$, kita tulis $\mu\nu$ untuk lintasan $\mu_1 \dots \mu_{|\mu|}\nu_1 \dots \nu_{|\nu|}$.

Untuk himpunan dari titik-titik $V \subset E^0$ dan himpunan dari lintasan-lintasan $F \subset E^*$, kita definisikan $VF \coloneqq \{\mu \in F\, ; r(\mu) \in V\}$ dan $FV \coloneqq \{\mu \in F; s(\mu) \in V\}$. Selanjutnya, jika $V = \{v\}$, kita notasikan vF yang artinya $\{v\}F$ dan Fv untuk $F\{v\}$.

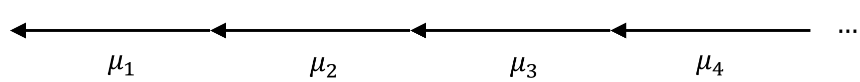
Definisi 3.2.2: Lintasan Tak Hingga (KPRR, 1997: 5)

Lintasan tak hingga E^∞ dari graf berarah E merupakan barisan $\mu = \mu_1 \dots \mu_n \dots$ sedemikian sehingga $s(\mu_i) = r(\mu_{i+1})$ untuk $i > 1$.

Jika lintasan-lintasan $\mu \in E^*$ dan $\nu \in E^\infty$ dengan $s(\mu) = r(\nu)$, kita tulis $\mu\nu$ untuk lintasan $\mu_1 \dots \mu_{|\mu|}\nu_1 \dots$.

Kita perluas pemetaan *range* ke E^∞ dengan menetapkan $r(\mu) = r(\mu_1)$ dan untuk himpunan dari titik-titik $V \subset E^0$, kita definisikan $VE^\infty \coloneqq \{x \in E^\infty; r(x) \in V\}$.

Ilustrasi lintasan tak hingga dari graf berarah E sebagai berikut

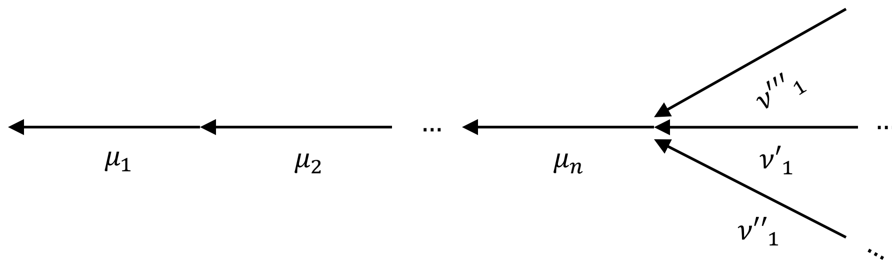


Definisi 3.2.3: Himpunan Silinder (Webster, 2010: 12)

Untuk $\mu \in E^*$, kita definisikan himpunan silinder dari μ oleh

$$Z(\mu) \coloneqq \{\nu \in E^* \cup E^\infty; \nu = \mu\nu'\}.$$

Himpunan silinder dari lintasan μ adalah lintasan ν yang berada di $E^* \cup E^\infty$, dimana μ merupakan faktor dari ν. Ilustrasi dari himpunan silinder sebagai berikut



Dari ilustrasi tersebut, dapat dilihat bahwa terdapat barisan $\mu = \mu_1 \dots \mu_n$ dan $\nu' = \nu'_1 \nu'_2 \dots$ sedemikian sehingga membentuk barisan baru $\nu = \mu_1 \dots \mu_n \nu'_1 \nu'_2$.