

BAB III

TEORI HIERARKI ANALITIK

3.1 Pengertian Proses Hierarki Analitik

Proses Hierarki Analitik (PHA) atau *Analytical Hierarchy Process* (AHP) pertama kali dikembangkan oleh Thomas Lorie Saaty dari Wharton Business School pada tahun 1970-an, yang digunakan mencari rangking atau urutan prioritas dari berbagai alternatif dalam pemecahan suatu permasalahan.

PHA adalah suatu metoda yang sederhana dan fleksibel yang menampung kreativitas dalam ancangannya terhadap suatu masalah (dibuat sesuai dengan masing-masing pemakai). Kekuatan PHA terletak pada struktur hierarkinya sendiri yang memungkinkan seseorang memasukkan semua faktor penting, dan mengaturnya dari atas ke bawah mulai dengan yang paling penting ke tingkat yang berisi alternatif, untuk dipilih mana yang terbaik. (Saaty, 1993).

Kelebihan PHA ini adalah kemampuannya jika dihadapkan pada situasi yang kompleks atau berkerangka dimana data informasi statistik dari masalah yang dihadapi sedikit. Data yang ada hanya bersifat kualitatif yang didasarkan pada persepsi, pengalaman atau intuisi. Jadi, masalah tersebut dapat dirasakan dan diamati namun kelengkapan data numerik tidak menunjang untuk dimodelkan secara kuantitatif. (Suyono dan Mukti, 2009).

3.2 Aksioma Saaty

Ada beberapa landasan aksiomatik dalam metode PHA yang terdiri dari :

1. *Reciprocal comparison*, artinya matriks perbandingan berpasangan yang terbentuk harus bersifat berkebalikan. Misalnya, jika A adalah k kali lebih penting dari pada B maka B adalah $1/k$ lebih penting dari pada A.
2. *Homogeneity*, artinya kesamaan dalam melakukan perbandingan. Misalnya, tidak dimungkinkan membandingkan semangka dengan bola basket dalam hal rasa, akan tetapi lebih relevan jika membandingkan dalam hal berat.
3. *Dependence*, artinya setiap level mempunyai kaitan (*complete hierarchy*) walaupun mungkin saja terjadi hubungan yang tidak sempurna (*incomplete hierarchy*).
4. *Expectation*, artinya menonjolkan penilaian yang bersifat ekspektasi dan preferensi dari pengambilan keputusan. Penilaian dapat merupakan data kuantitatif maupun yang bersifat kualitatif.

3.3 Langkah-Langkah Proses Hierarki Analitik

Secara umum, pengambilan keputusan dengan metode PHA didasarkan pada langkah-langkah berikut :

- a. Mendefinisikan persoalan/masalah dan merinci pemecahan/solusi yang diinginkan.
- b. Membuat struktur hierarki dari tingkat puncak sampai ke tingkat di mana dimungkinkan campur tangan untuk memecahkan persoalan.

- c. Membuat sebuah matriks perbandingan berpasangan untuk kontribusi atau pengaruh setiap elemen yang relevan terhadap setiap kriteria yang berada setingkat di atasnya. Perbandingan dilakukan berdasarkan pilihan atau *judgement* dari pembuat keputusan dengan menilai tingkat kepentingan suatu elemen dibandingkan elemen lainnya.
- d. Menormalkan data yaitu dengan membagi nilai dari setiap elemen di dalam matriks dengan nilai total dari setiap kolom.
- e. Menghitung nilai *eigen vector* dan menguji konsistensinya, jika tidak konsisten maka pengambilan data (preferensi) perlu diulangi. Nilai *eigen vector* yang dimaksud adalah nilai *eigen vector* maksimum yang diperoleh dengan perhitungan manual.
- f. Mengulangi langkah c, d, dan e untuk seluruh tingkat hierarki.
- g. Menghitung *eigen vector* dari setiap matriks perbandingan berpasangan. Nilai *eigen vector* merupakan bobot setiap elemen. Langkah ini untuk mensintesis pilihan dalam penentuan prioritas elemen-elemen pada tingkat hierarki terendah sampai pencapaian tujuan.
- h. Menguji konsistensi hierarki. Jika tidak memenuhi syarat dengan nilai $CR < 0,100$; maka penilaian harus diulang kembali.

3.4 Prinsip-Prinsip Dasar Proses Hierarki Analitik

Dalam memecahkan persoalan, metode PHA didasarkan pada beberapa prinsip dasar yaitu :

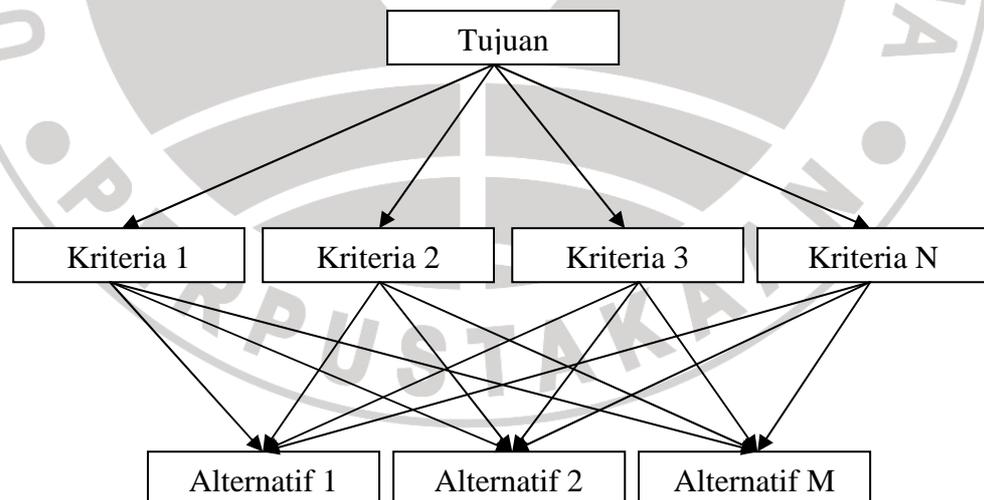
3.4.1 Dekomposisi (*Decomposition*)

Setelah persoalan didefinisikan, maka perlu dilakukan *decomposition* yaitu memecah persoalan yang utuh menjadi unsur-unsurnya. Jika ingin mendapatkan hasil yang akurat, pemecahan juga dilakukan terhadap unsur-unsur sampai tidak mungkin dilakukan pemecahan lebih lanjut, sehingga didapatkan beberapa tingkatan dari persoalan tadi. Karena alasan ini, maka proses analisis ini dinamakan hierarki (*hierarchy*). Ada dua jenis hierarki, yaitu lengkap dan tak lengkap. Dalam hierarki lengkap, semua elemen pada suatu tingkat memiliki semua elemen yang ada pada tingkat berikutnya (lihat gambar 3.1 dan 3.2). Jika tidak demikian, dinamakan hierarki tak lengkap. Bentuk struktur dekomposisi yakni :

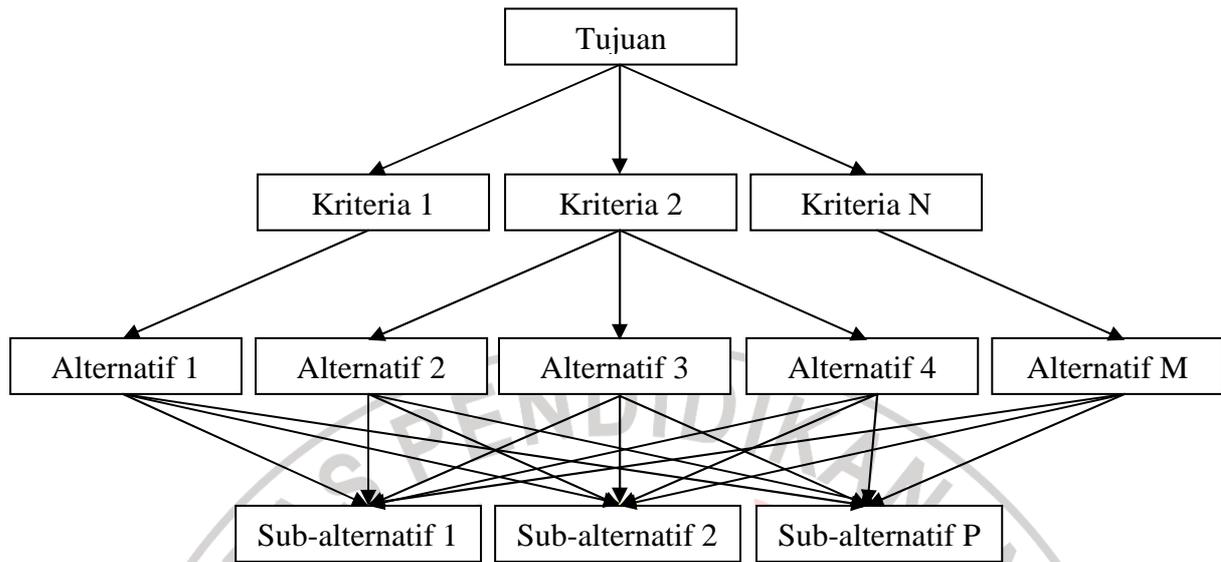
Tingkat pertama : Tujuan keputusan (*Goal*)

Tingkat kedua : Kriteria-kriteria

Tingkat ketiga : Alternatif-alternatif



Gambar 3.1 Struktur Hierarki Lengkap



Gambar 3.2 Struktur Hierarki Tak Lengkap

3.4.2 Penilaian Perbandingan (*Comparative Judgement*)

Prinsip ini berarti membuat penilaian tentang kepentingan relatif dua elemen pada suatu tingkat tertentu yang dalam kaitannya dengan tingkat di atasnya. Penilaian ini merupakan inti dari AHP, karena ia akan berpengaruh terhadap prioritas elemen-elemen. Hasil dari penilaian ini akan tampak lebih mudah bila disajikan dalam bentuk matriks yang dinamakan matriks *pairwise comparison* yaitu matriks perbandingan berpasangan memuat preferensi beberapa alternatif untuk tiap kriteria.

3.4.3 Sintesis Prioritas (*Synthesis of Priority*)

Synthesis of Priority dilakukan dengan menggunakan *eigen vector method* untuk mendapatkan bobot relatif bagi unsur-unsur pengambilan keputusan.

3.4.4 Konsistensi Logis (*Logical Consistency*)

Logical Consistency berarti dua hal. Pertama, pemikiran/objek yang serupa dikelompokkan menurut homogenitas dan relevansinya. Misalnya, anggur dan

kelereng dapat dikelompokkan dalam satu set homogen jika kriterianya adalah bulat, tetapi tidak dapat jika kriterianya adalah rasa. Kedua, tingkat hubungan antara gagasan/objek yang didasarkan pada suatu kriteria tertentu. Misalnya, jika manis merupakan kriteria dan madu dinilai 5 kali lebih manis dibanding gula, dan gula 2 kali lebih manis dibanding sirop, maka seharusnya madu dinilai manis 10 kali lebih manis dibanding sirop. Jika madu hanya dinilai 4 kali manisnya dibanding sirop, maka penilaian tak konsisten dan proses harus diulang jika ingin memperoleh penilaian yang lebih tepat.

3.5 Penyusunan Prioritas

Penyusunan prioritas adalah dengan membuat perbandingan berpasangan terhadap suatu kriteria yang ditentukan. Perbandingan tersebut ditransformasikan dalam bentuk matriks yang dikenal dengan matriks perbandingan (*pairwise comparison*). Contoh, terdapat n objek yang dinotasikan dengan (A_1, A_2, \dots, A_n) yang akan dinilai berdasarkan pada tingkat kepentingannya antara lain A_i dan A_j .

Tabel 3.1 Matriks Perbandingan Berpasangan

C	A_1	A_2	...	A_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nn}

Nilai a_{11} adalah nilai perbandingan elemen A_1 (baris) terhadap A_1 (kolom) yang menyatakan hubungan :

- a) Seberapa jauh tingkat kepentingan A_1 (baris) terhadap kriteria C dibandingkan dengan A_1 (kolom) atau
- b) Seberapa jauh dominasi A_1 (baris) terhadap A_1 (kolom) atau
- c) Seberapa banyak sifat kriteria C terdapat pada A_1 (baris) dibandingkan dengan A_1 (kolom).

Bentuk matriks ini simetri atau persegi, dimana diagonal utama dari matriks tersebut adalah satu karena yang diperbandingkan adalah dua elemen yang sama. Sedangkan elemen yang diluar diagonal utama berupa matriks reciprocal.

3.6 *Eigen Value dan Eigen Vector*

Defenisi : Jika A adalah matriks $n \times n$ maka vektor tak nol X di dalam R^n dinamakan *eigen vector* dari A jika AX kelipatan skalar X , yakni :

$$AX = \lambda X$$

Skalar λ dinamakan *eigen value* dari A dan X dikatakan *eigen vector* yang bersesuaian dengan λ . Untuk mencapai *eigen value* dari matriks A yang berukuran $n \times n$, maka dapat ditulis pada persamaan berikut :

$$AX = \lambda X$$

Atau secara ekivalen

$$(\lambda I - A)X = 0$$

Agar λ menjadi *eigen value*, maka harus ada pemecahan tak nol dari persamaan ini. Akan tetapi, persamaan di atas akan mempunyai pemecahan nol jika dan hanya jika :

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Ini dinamakan persamaan karakteristik A , skalar yang memenuhi persamaan ini adalah *eigen value* dari A . Bila diketahui bahwa nilai perbandingan elemen A_i terhadap elemen A_j adalah a_{ij} , maka secara teoritis matriks tersebut berciri positif berkebalikan, yakni $a_{ij} = 1/a_{ji}$. Bobot yang dicari dinyatakan dalam vektor $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n)$. Nilai ω_n menyatakan bobot kriteria A_n terhadap keseluruhan set kriteria pada sub sistem tersebut.

Jika a_{ij} mewakili derajat kepentingan i terhadap faktor j dan a_{jk} menyatakan kepentingan dari faktor j terhadap k , maka agar keputusan menjadi konsisten, kepentingan i terhadap faktor k harus sama dengan $a_{ij} \cdot a_{jk}$ atau jika $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$ untuk semua i, j, k maka matriks tersebut konsisten.

Untuk suatu matriks konsisten dengan vektor ω , maka elemen a_{ij} dapat ditulis menjadi :

$$a_{ij} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (1)$$

Jadi matriks konsisten adalah :

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = \frac{\omega_i}{\omega_j} \cdot \frac{\omega_j}{\omega_k} = \frac{\omega_i}{\omega_k} = a_{ik} \quad (2)$$

Seperti yang diuraikan di atas, maka untuk matriks *pairwise comparison* diuraikan seperti berikut ini :

$$a_{ij} = \frac{\omega_j}{\omega_i} = \frac{1}{\omega_i/\omega_j} = \frac{1}{a_{ji}} \quad (3)$$

Dari persamaan tersebut di atas dapat dilihat bahwa :

$$a_{ij} \frac{\omega_i}{\omega_j} = 1; \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (4)$$

Dengan demikian untuk matriks *pairwise comparison* yang konsisten menjadi :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \omega_{ij} \cdot \frac{1}{\omega_{ij}} = n; \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot \omega_{ij} = n \omega_{ij}; \quad \forall i, j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (6)$$

Persamaan di atas ekivalen dengan bentuk persamaan matriks di bawah ini :

$$A \omega = n \omega \quad (7)$$

Dalam teori matriks, formulasi ini diekspresikan bahwa ω adalah *eigen vector* dari matriks A dengan *eigen value* n . Perlu diketahui bahwa n merupakan dimensi matriks itu sendiri. Dalam bentuk persamaan matriks dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \frac{\omega_1}{\omega_1} & \frac{\omega_1}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_1}{\omega_n} \\ \frac{\omega_2}{\omega_1} & \frac{\omega_2}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_2}{\omega_n} \\ \frac{\omega_3}{\omega_1} & \frac{\omega_3}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_3}{\omega_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\omega_n}{\omega_1} & \frac{\omega_n}{\omega_2} & \dots & \frac{\omega_n}{\omega_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

Pada prakteknya, tidak dapat dijamin bahwa :

$$a_{ij} = \frac{a_{ik}}{a_{jk}} \quad (9)$$

Salah satu faktor penyebabnya yaitu karena unsur manusia tidak selalu dapat konsisten mutlak (*absolute consistent*) dalam mengekspresikan preferensinya terhadap elemen-elemen yang dibandingkan. Dengan kata lain, bahwa *judgement*

yang diberikan untuk setiap elemen persoalan pada suatu *level hierarchy* dapat saja *inconsistent*.

Jika :

- a. Jika $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ adalah bilangan-bilangan yang memenuhi persamaan :

$$A \omega = \lambda \omega \quad (10)$$

Dengan *eigen value* dari matriks A dan jika $a_{ij} = 1; \forall i = 1, 2, \dots, n$; maka dapat ditulis :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = n \quad (11)$$

Karena itu, jika $A \omega = \lambda \omega$ dipenuhi maka semua nilai eigen sama dengan nol, kecuali nilai eigen yang satu yaitu sebesar n maka jelas dalam kasus konsisten n merupakan nilai eigen A terbesar.

- b. Bila ada perubahan kecil dari elemen matriks a_{ij} maka *eigen value*-nya akan berubah menjadi semakin kecil pula.

Dengan menggabungkan kedua sifat matriks (aljabar linier), jika :

1. Elemen diagonal matriks A

$$(a_{ij} - 1) \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$$

2. Dan jika matriks A yang konsisten, maka variasi kecil dari $a_{ij}, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$ akan membuat harga *eigen value* yang lain mendekati nol.

Karena itu persoalannya adalah jika A merupakan matriks *pairwise comparison*, untuk mencari vektor prioritas harus dicari ω yang memenuhi :

$$A \omega = \lambda_{\max} \omega$$

3.7 Uji Konsistensi Indeks dan Rasio

Salah satu perbedaan model PHA dengan model-model pengambilan keputusan yang lainnya adalah tidak adanya syarat konsistensi mutlak.

Saaty telah membuktikan bahwa Indeks Konsistensi dari matriks berordo n dapat diperoleh dengan rumus :

$$CI = \frac{(\lambda_{\max} - n)}{(n - 1)} \quad (15)$$

dengan,

CI = Rasio penyimpangan (deviasi) konsistensi (*consistency index*)

λ_{\max} = Nilai eigen terbesar dari matriks berordo n

n = Orde matriks

Nilai eigen maksimum suatu matriks tidak akan lebih kecil dari nilai n sehingga tidak mungkin ada nilai CI yang negatif. Makin dekat nilai eigen maksimum dengan besarnya matriks, makin konsisten matriks tersebut. Dan bila nilai eigen suatu matriks sama besar dengan ukurannya, maka matriks tersebut memiliki konsistensi 100%.

Tidak ada batasan yang baku berapa Indeks Konsistensi yang dapat diterima atau tidak, namun menurut beberapa literatur tingkat inkonsistensi

sebesar 10% atau 0,1 ke bawah masih bisa diterima. Lebih dari itu harus direvisi karena terlalu besar bisa cenderung kepada suatu kesalahan yang cukup mendasar.

Batas ketidakkonsistenan (*inconsistency*) yang telah ditetapkan oleh Thomas L. Saaty ditentukan dengan menggunakan Rasio Konsistensi (*CR*), yaitu perbandingan indeks konsistensi dengan nilai random indeks (*RI*) yang didapatkan dari suatu eksperimen oleh Oak Ridge National Laboratory kemudian dikembangkan oleh Wharton School yang diperlihatkan seperti tabel 3.2 berikut.

Tabel 3.2 Nilai *Random Indeks (RI)*

<i>n</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>RI</i>	0,00	0,00	0,58	0,90	1,12	1,24	1,32	1,41	1,45	1,49

Maksud dari angka 1 sampai dengan 10 adalah menunjukkan banyaknya kriteria yang diambil oleh si pembuat keputusan. Angka ini juga menunjukkan besar matriks *pairwise comparison*. Jadi jika banyak kriteria yang diambil adalah tujuh, maka besar matriks *pairwise comparison*-nya adalah 7 x 7. Sedangkan angka-angka desimalnya adalah Indeks Random (*RI*) yang menyatakan rata-rata konsistensi dari matriks perbandingan berukuran 1 s/d 10.

Dengan demikian, Rasio Konsistensi dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

dengan,

CR = Rasio Konsistensi

RI = Indeks Random