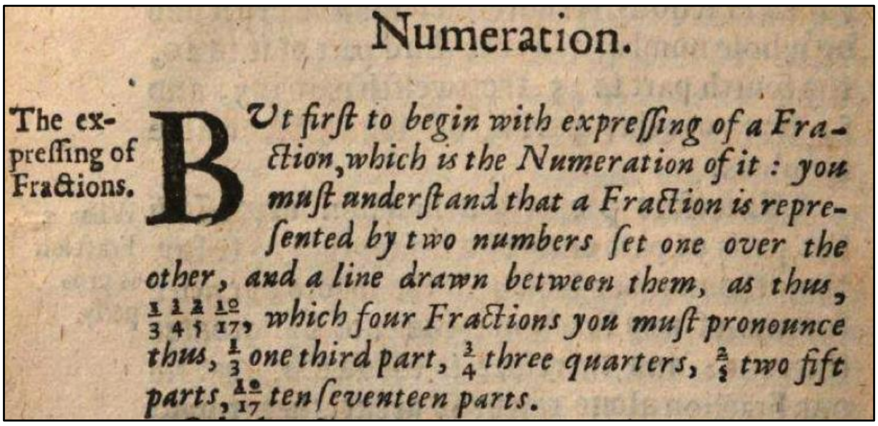
BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Penelitian

Ribuan tahun sejak ditemukan sepanjang sejarah aritmetika, hingga kini pecahan masih menjadi topik diskusi tahunan dalam studi mutakhir tentang aritmetika dan didaktiknya. Dialektika tentang pecahan terus berkembang dari masa awal zaman sebelum Masehi—periode bangsa-bangsa Mesir, Babilonia, Yunani, Hindu-Arab, hingga pecahan pada konvensi modern. Awal dari notasi pecahan yang dipakai sekarang adalah adaptasi dari notasi Arab tanpa garis pemisah yang diturunkan dari peradaban Hindu sebelumnya (Karpinski, 1925). Kemudian, Recorde (1543) adalah yang menyempurnakan notasi "pecahan biasa" yang digunakan hingga sekarang (lihat Gambar 1).



Numeration.

The ex-preſſing of Fra&ions.

BVt firſt to begin with expreſſing of a Fra-&ion, which is the Numeration of it: you muſt underſtand that a Fraction is repre-ſented by two numbers ſet one over the other, and a line drawn between them, as thus, $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{10}{17}$, which four Fractions you muſt pronounce thus, $\frac{1}{3}$ one third part, $\frac{3}{4}$ three quarters, $\frac{2}{5}$ two fift parts, $\frac{10}{17}$ ten ſeventeen parts.

Terjemahan:
Namun pertama untuk memulai ekspresi dari Pecahan, yang mana adalah numerasi darinya: anda harus memahami bahwa pecahan direpresentasikan dengan dua bilangan tersusun satu di atas yang lain, dan sebuah garis digambar di antaranya, sebagaimana sehingga, $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{10}{17}$, di mana empat pecahan sehingga anda harus ucapkan, $\frac{1}{3}$ satu pertiga bagian, $\frac{3}{4}$ tiga perempat, $\frac{2}{5}$ dua perlima bagian, $\frac{10}{17}$ sepuluh pertujuhbelas bagian.

Gambar 1. Notasi modern pecahan diperkenalkan (Recorde, 1543).

Pada konteks didaktik, yang menjadi diskusi pada umumnya bukanlah bagaimana pecahan sebagai sebuah pengetahuan ada, melainkan bagaimana pecahan tersebut menimbulkan situasi-situasi yang menyulitkan siswa dan fasilitator (guru). Di dalam kelas, siswa mencoba menemukan realitas dari pecahan yang coba dibangun melalui pendekatan yang biasanya diawali dengan pengalaman-pengalaman konkret mereka melalui objek-objek yang disediakan—objek fisik maupun matematis. Masalah kemudian timbul ketika siswa merasa apa yang mereka dapatkan sebagai pengalaman empirik berbeda dengan kasus-kasus yang ditemukan dalam matematika yang sebenarnya, seperti studi oleh Lortie-Forgues dan Siegler (2015) serta Mostert dan Hickendorff (2023). Masalah tersebut adalah satu dari kompleksnya situasi yang terjadi dalam bagian pengetahuan aritmetika pecahan. Oleh karenanya, sebelum memasuki rasional tentang aritmetika pecahan, terlebih dahulu dikaji bagaimana matematika sebagai sebuah ilmu yang tinggal dalam masyarakat sosial ilmuwan dan bagaimana di dalam sistem didaktik hal tersebut berjalan.

Pengetahuan matematika dibangun oleh siswa dengan pengalaman yang bersumber dari indra mereka di ruang belajar, yang kemudian diproses sebagai rasio. Sementara itu, realitas matematika sendiri berada di dalam pikiran manusia. Pandangan tersebut dimiliki oleh para filsuf naturalis seperti Plato yang membagi dunia menjadi dua objek yaitu objek material dan imaterial, atau Socrates yang meskipun tidak meninggalkan tulisan namun terwujud dalam tulisan-tulisan Plato sebagai seseorang yang mempertimbangkan matematika sebagai sarana melatih pikiran dan nalar secara abstrak seperti tercantum dalam beberapa studi (Clearly, 1995; Davis & Hersh, 1988; Huffman, 2015; Orton, 2014; Pellegrin, 2018; Skirry, 2005). Dalam salah satu dialog Socrates, “meno”, di mana ia menggunakan contoh geometri untuk menunjukkan bahwa pengetahuan harus bersifat bawaan atau *innate*, bukan diperoleh melalui pengalaman. Dialektika tersebut sejalan dengan apa yang ditulis Plato bahwa cara terbaik untuk belajar tentang realitas imaterial adalah dengan bermatematika dalam Republic (525c):

> *However, the best way to begin to know the immaterial realm is to do mathematics. One is to study number theory 'for facilitating the conversion of the soul itself from the world of generation to essence and truth. One is to study geometry to facilitate the apprehension of the idea of good* [Namun, cara terbaik untuk mulai memahami alam immaterial adalah dengan mempelajari matematika. Salah satunya adalah mempelajari teori bilangan untuk memudahkan konversi jiwa itu sendiri dari dunia kelahiran menuju hakikat dan kebenaran. Salah satunya adalah mempelajari geometri untuk memudahkan pemahaman gagasan tentang kebaikan].

Aristoteles tidak sependapat dengan pemikiran tersebut. Saat Plato memandang matematika sebagai objek immaterial (Huffman, 2015; Pellegrin, 2018) seperti halnya kebajikan, keadilan, cinta, dengan kebenaran yang mutlak (*necessary truth*), menurut Aristoteles, matematika harus ada secara objek dalam wujud yang berbeda, seperti yang dituliskannya dalam Book XII dari bukunya, Metaphysics (177a) *"conclusions contrary alike to truth and to the usual views follow, if one is to suppose the objects of mathematics to exist thus as separate entities"* [kesimpulan yang bertentangan dengan kebenaran dan pandangan umum dapat disimpulkan, jika kita menganggap objek matematika ada sebagai entitas yang terpisah].

Kedua pandangan filosofis yang berbeda terhadap matematika tersebut terbawa dari bagaimana secara natural pengetahuan proporsional ataupun *judgment* diperoleh secara apriori dan aposteriori. Perbedaan antara kedua cara mendapatkan pengetahuan tersebut secara langsung mempengaruhi diskusi antara rasionalisme dan empirisme, yang tentunya juga membahas pengetahuan matematika. Menurut para rasionalis, matematika sebagai pengetahuan berwujud konsepsi abstrak—gagasan, bentuk, struktur—yang ada di luar dunia fisik atau pengalaman indrawi (Dive, 2003; Dossey, 1992; Kossak, 2022). Peneliti dapat mempelajari ontologi matematika sebagai keberadaan yang nyata meskipun berwujud non-fisikal (Alcolea-Banegas, 2006; Duerlinger, 1988; Linnebo, 2009). Matematika ada di dunia yang terpisah dari dunia nyata peneliti, meskipun mempunyai korelasi dan pengaruh besar terhadapnya. Hal ini menunjukkan bahwa matematika adalah jendela menuju lapisan realitas yang lebih dalam, yang sama nyatanya, atau bahkan lebih nyata, dibandingkan dengan dunia fisik yang dapat peneliti dapat dari indra yang terbatas dan cenderung subjektif. Sedangkan sebaliknya, para empirisis yang radikal akan menantang gagasan matematika terutama ketika diterapkan di luar pembahasan tentang keterkaitan logika, dengan menunjukkan kesenjangan antara konsep matematika abstrak dan penerapan empirisnya, bahwa setiap ide dan impresi didapatkan dari pengalaman sensori, termasuk dalam matematika. Pembahasan lebih lanjut kemudian diteruskan oleh para filsuf rasionalis yang juga sekaligus seorang matematikawan seperti René Descartes dan Gottfried Wilhelm Leibniz, begitupun juga dengan David Hume, John Locke, dan George Berkeley, yang semuanya membawa kemajuan dalam matematika dan filsafat itu sendiri.

Dalam epistemologi, manusia berupaya untuk memahami landasan dan batasan pengetahuan manusia untuk menuju definisi klasik pengetahuan sebagai *justified true belief* yang disampaikan oleh Plato (Gettier, 2016; Parikh & Renero, 2017; Pritchard, 2013). Agar seseorang benar-benar "memahami" sesuatu, ada tiga kriteria yang harus dipenuhi: keyakinan tentang kebenaran, adanya justifikasi atas keyakinan tersebut, dan sesuatu tersebut harus benar-benar benar.

Demikian pula pada matematika, pengetahuan yang demikian terkemas dalam sebuah disiplin akademik matematika, yang kemudian disebut sebagai tubuh dari pengetahuan (*body of knowledge*) (Artigue & Bosch, 2014a; Bosch, dkk., 2020; Chevallard, 2019). Namun, apa yang disebut sebagai pengetahuan dalam matematika memiliki versi yang berbeda-beda. Pengetahuan matematika dapat tumbuh dan berkembang di lingkungan akademisi atau *scholar,* di sekolah, atau di lingkungan sosial yang lain yang disebut bagian dari pengetahuan. Versi pengetahuan yang dimiliki oleh *scholar* disebut sebagai *scholarly knowledge,* di mana versi pengetahuan ini hampir akan selalu berbeda dengan apa yang dimiliki oleh lingkup sosial lain, terutama ketika berkaitan dengan disiplin matematika. Setiap lingkup atau yang disebut dengan institusi memiliki versi yang spesifik dari suatu pengetahuan matematika. Secara umum, dalam sebuah institusi, akan terpenuhi satu dari tiga hal: (1) bagian dari pengetahuan dapat terbentuk di institusi tersebut, atau (2) digunakan sebagai alat di institusi, atau (3) diajarkan. Kondisi dari pengetahuan yang tinggal di suatu institusi tidak akan sama di institusi yang lainnya. Misal, pengetahuan yang dihasilkan oleh para matematikawan, dibandingkan dengan pengetahuan matematika akan diajarkan pada siswa Kelas 9 yang rata-rata berusia 14-15 tahun, tentu akan berbeda. Setiap institusi yang "mengimpor" pengetahuan dari institusi lain akan seharusnya mengadaptasi kondisi yang membentuk pengetahuan di institusi sebelumnya, dan juga bersamaan dengan ekologi dari institusi tersebut. Atau secara umum, pengetahuan dari satu institusi akan "disalin" dan "ditimpa" ke institusi lainnya.

Proses dari penyalinan dan penimpaan tersebut tentunya tidak akan berjalan sederhana. Akan selalu terdapat distorsi yang membuat satu pengetahuan tidak mungkin disalin dengan persis sama ketika ditimpakan ke institusi lainnya. Proses dari pengubahan satu pengetahuan ke pengetahuan dalam institusi lain tersebut dinamakan proses transposisi. Karena proses transposisi tersebut terjadi pada sistem didaktik dalam institusi, maka disebut sebagai transposisi didaktik (Chevallard, 2019). Satu contoh dari kasus distorsi tersebut adalah ketika seorang matematikawan membuat aksioma-aksioma seperti pada geometri Euclid yang terdiri dari 20 aksioma, dengan kondisi yang ada di *school establishment*, terutama dengan siswa pada tingkatan kognitif pada Kelas 9, akan mustahil untuk mengajarkan ke-20 aksioma tersebut karena kompleksitas dan panjangnya, dan karenanya pengetahuan tersebut tidak akan terpelajari tanpa proses transposisi. Namun, proses transposisi akan membuat perubahan yang signifikan dan pada kasus tersebut bahkan akan mengubah makna dari pengetahuan itu sendiri. Kondisi distorsi ini terkadang tidak terantisipasi sebelumnya.

Dalam lingkungan masyarakat sosial maju mana pun, institusi memainkan peran penting dalam membentuk dan menyebarkan pengetahuan (Välimaa & Hoffman, 2008). Dalam kehidupan masyarakat di negara-negara secara umum, terdapat institusi yang menjadi tempat dilaksanakannya sebuah aksi untuk membangun pengetahuan yang disebut lembaga pendidikan atau sekolah (*school establishment*) yang menjadi bagian dari sistem pendidikan atau sistem sekolah (*school system*). Secara historis, istilah "sekolah", yang berasal dari kata Yunani kuno "*scholē*" (Chevallard, 2019; Spelman, 2019), menekankan ruang yang didedikasikan untuk diskusi dan pengajaran santai, di mana urusan sehari-hari dikesampingkan untuk sementara waktu. Ide dasar ini menggarisbawahi esensi institusi sebagai tempat di mana pengetahuan dipupuk, diperdebatkan, dan disebarluaskan. Ekspresi dari "sistem sekolah" sendiri memiliki makna yang lebih luas yang dapat juga berarti jenis institusi yang lebih umum seperti keluarga, asosiasi olahraga, atau bahkan kelompok komunitas jalanan. Secara *de jure* maupun *de facto*, keberadaan dari masyarakat dan struktur sosial tersebut memiliki fungsi yang sama seperti sekolah formal.

Sekolah merupakan tempat di mana sistem didaktik terjadi di dalam sistem sekolah pada sebuah masyarakat sosial. Di dalam sistem didaktik yang terdapat komponen berupa siswa, pendidik, dan pengetahuan. Sistem tersebut dikaji mendalam dalam subteori transposisi didaktik (Chevallard, dkk., 2015). Dalam kajian tersebut, pertanyaan mendasar haruslah dapat dijawab, seperti: (1) apa yang disebut siswa dan siapa yang termasuk sebagai siswa? (2) apa juga yang dimaksud dengan fasilitator? (3) apa yang dimaksud dengan pengetahuan? (4) Sistem didaktik apa yang digunakan oleh siswa dan fasilitator dan sarana didaktik apa diperlukan untuk melakukan hal tersebut? (5) Peralatan pengetahuan apa yang dapat dihasilkan siswa sebagai hasil jangka pendek dan jangka panjang dari berfungsinya sistem didaktik? dan pertanyaan-pertanyaan lainnya.

Sebagai kondisi agar pengetahuan yang ditransposisi untuk diajarkan di institusi—sistem sekolah—dapat diterima, maka ada dua syarat: 1) bahwa pengetahuan matematika terkualifikasi sebagai pengetahuan matematika yang benar, dan 2) bahwa pengetahuan matematika tersebut diakui sebagai pengetahuan matematika oleh otoritas atau oleh legitimasi dari institusi *scholar* dari suatu disiplin, matematika misalnya. Sebagai catatan, kata "*scholar*" di sini merupakan terjemahan dari kata Perancis savant, yang berarti "orang yang berilmu, orang yang mempunyai pengetahuan". Dalam kasus matematika, saat ini, para *scholar* (atau "*savants*") ahli matematika profesional yang bekerja di universitas atau tempat penelitian matematika yang menciptakan pengetahuan matematika baru dan, secara langsung atau tidak langsung, menjamin—atau terkadang membantah—"keaslian matematis" dari pengetahuan yang diajarkan (Artigue & Bosch, 2014c; Chevallard, dkk., 2022). Setiap aktivitas manusia ahlinya sendiri, seperti halnya dalam disiplin ilmu matematika, atau pertukangan kayu, pengelasan, semuanya memiliki orang-

orang yang dianggap "lebih tahu" dibandingkan orang-orang lain di lingkup di mana mereka berada—mereka adalah orang-orang besar di dunia kecil mereka.

Dalam disiplin ilmu matematika, *scholar* telah lama membangun pengetahuan matematika selama ribuan tahun lamanya, baik sejak mereka hanya berfilsafat hingga menemukan disiplin ilmu itu sendiri. Dalam perjalanan tersebut, salah satu cabang yang tertua adalah aritmetika. Aritmetika memiliki fokus pada penomoran dan dasar penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian, telah ditemukan sejak peradaban Mesopotamia, Mesir kuno, India, dan Yunani. Di Mesopotamia, kira-kira sejak 2000 SM, orang sudah menggunakan sistem bilangan berbasis 60 untuk melakukan berbagai perhitungan aritmetika, sementara matematikawan Mesir melakukan pengembangan lebih jauh (L. C. Karpinski, 1965). Salah satu topik pembahasan dalam aritmetika adalah pecahan. Konsep pecahan pertama kali muncul sebagai solusi untuk masalah pembagian yang tidak penuh atau menyeluruh. Dalam peradaban Mesir kuno, pecahan digunakan dengan sistem berbasis pecahan mata uang untuk memudahkan perhitungan dan transaksi. Pada masa itu, mereka terutama menggunakan pecahan dengan penyebut 10, yang mencerminkan penggunaan sistem bilangan desimal awal.

Pecahan pun terus berkembang. Pada abad pertengahan, matematikawan Islam mengenalkan pecahan desimal dan menyempurnakan teknik perhitungan yang secara signifikan mempengaruhi matematika Eropa melalui terjemahan karya-karya mereka. Pada masa Renaisans, penggunaan pecahan menjadi lebih luas berkat karya matematikawan seperti Leonardo Fibonacci, yang mengenalkan sistem bilangan Hindu-Arab ke Eropa hingga menjadi sistem bilangan yang peneliti gunakan hingga sekarang. Namun, seperti halnya asumsi terhadap bagaimana pengetahuan ditransposisikan dalam institusi berbeda, akan selalu terdapat distorsi yang menyertainya, termasuk pada pecahan dan aritmetikanya.

Pecahan pun juga menjadi topik kajian dalam matematika sekolah, yang kini menjadi penting. Pentingnya hal ini ditegaskan oleh fakta bahwa pemahaman siswa kelas lima terhadap pecahan dapat memprediksi pengetahuan aljabar dan kecakapan matematika mereka secara keseluruhan pada kelas sepuluh, sebuah korelasi yang diamati di Inggris Raya dan Amerika Serikat (AS) (Braithwaite, dkk., 2019a, 2019b; Lortie-Forgues, dkk., 2015). Pada tahun 2014, 27% siswa Kelas 8 mengidentifikasi "2" sebagai estimasi terbaik untuk $\frac{13}{12}+\frac{8}{7}$ (Lortie-Forgues, dkk., 2015). Akibatnya, setelah lebih dari tiga dekade, melalui serangkaian reformasi pendidikan dari ratusan bahkan ribuan studi penelitian tentang pengajaran dan pembelajaran matematika dan miliaran dolar yang dihabiskan untuk melakukan perubahan pendidikan, hanya sedikit kemajuan yang terlihat dalam pemahaman siswa tentang aritmetika pecahan. Hasil tersebut sejatinya juga merupakan perkembangan dari beberapa asesmen sebelumnya. Misalnya, pada tahun 1983 National Assessment of Educational Progress (NAEP) melihat siswa yang mewakili siswa Kelas 8 AS untuk memilih bilangan bulat yang paling dekat dengan soal aritmetika desimal, $3{,}04 \times 5{,}3$. Pilihan jawabannya adalah $1, 6, 16, 160, 1600$, atau "tidak tahu". Hanya 21% siswa Kelas 8 memilih jawaban yang benar yaitu 16 (Carpenter dkk., 1983). Sementara jawaban paling umum adalah "1600". Atau penilaian NAEP lainnya yang mengungkapkan bahwa hanya setengah dari siswa Kelas 8 di AS yang dapat mengurutkan pecahan-pecahan $\frac{2}{7}, \frac{5}{9}$, dan $\frac{1}{12}$ dengan benar (Martin dkk., 2007).

Selain signifikansi akademis, pecahan juga merupakan dasar bagi berbagai profesi di luar bidang STEM (Sains, Teknologi, Teknik, dan Matematika), seperti keperawatan dan farmasi (Davidson, 2012; McCloskey, 2007; Sformo, 2008). Namun, meskipun penting, terdapat kesenjangan yang mengkhawatirkan dalam pemahaman pecahan di kalangan pelajar dan orang dewasa. Tantangan ini berlanjut hingga masa dewasa, dengan siswa *community college* kesulitan membandingkan pecahan secara akurat. Hasil yang mengkhawatirkan tersebut telah menyebabkan badan-badan pendidikan, seperti Panel Penasihat Matematika Nasional Amerika Serikat (NMAP) dan Dewan Guru Matematika Nasional Amerika Serikat (NCTM), menekankan pentingnya meningkatkan pemahaman guru dan siswa tentang pecahan.

Tantangan terkait pecahan tidak hanya terjadi di AS. melainkan juga menjadi perhatian global hingga mempengaruhi negara-negara yang terkenal dengan kemampuan matematikanya, seperti Taiwan dan Jepang (Chan, Leu, & Chen, 2007;

Yoshida & Sawano, 2002). Di luar relevansinya dalam bidang pendidikan dan pekerjaan, pecahan juga penting untuk memahami teori perkembangan numerik. Sebagaimana disoroti dalam teori perkembangan numerik terintegrasi (Siegler, Thompson, & Schneider, 2011), menguasai pecahan mengharuskan membedakan sifat-sifat bilangan asli dari sifat-sifat bilangan rasional. Misalnya saja, meskipun setiap bilangan asli mempunyai penerus yang berbeda, terdapat susunan pecahan tak terhingga yang terletak di antara dua pecahan tertentu. Demikian pula, meskipun mengalikan dua bilangan asli selalu menghasilkan hasil kali yang lebih besar dari bilangan aslinya, mengalikan dua pecahan biasa akan menghasilkan hasil kali yang lebih kecil.

Kompleksitas tersebut menggarisbawahi kompleksitas dari pecahan dan perlunya strategi pendidikan yang kuat untuk mentransposisikan pengetahuan ini secara efektif. Untuk menggali tentang bagaimana pengetahuan pecahan didifusikan sebagai *knowledge to be taught* yang salah satunya tersusun dalam buku ajar berdasarkan kurikulum, peneliti melaksanakan analisis *praxeology* dan analisis didaktik terhadap buku matematika Kelas 4 hingga 6 yang dipakai di kurikulum di Indonesia. Dari sana, ditemukan poin penting bahwa pecahan disajikan sebagai tiga hal sekaligus: bagian dari keseluruhan, rasio, dan pembagian. Pengajaran pecahan, khususnya di Kelas 4-6, muncul sebagai mata pelajaran yang memiliki banyak segi dan rumit.

Beberapa masalah tersebut terjabarkan sejalan seperti yang dilaporkan oleh Wu (2011). Salah satu tantangan yang paling membingungkan adalah definisi samar-samar tentang “keseluruhan” atau “bagian dari keseluruhan”. Seringnya menggunakan metafora sehari-hari, seperti pizza, meskipun bertujuan untuk menyederhanakan, sering kali menimbulkan lebih banyak ambiguitas. Misal, $\frac{3}{4}$ adalah 3 bagian ketika keseluruhan dibagi menjadi 4 bagian yang sama. Karena tidak jelas apa itu “keseluruhan”, maka buku seringkali menggunakan metafora. Sebagai contoh, keseluruhan bisa diibaratkan seperti pizza. Lalu, bagaimana peneliti membagi pizza menjadi 4 bagian yang sama? Berdasarkan bentuk? Berat? Atau luas? Literatur pendidikan tidak menjelaskan hal ini. Lalu, bagaimana cara mengalikan atau membagi dua potong pizza?

Jika berbicara tentang pecahan sebagai rasio, $\frac{3}{4}$ bisa mewakili situasi rasio, seperti 3 anak laki-laki untuk setiap 4 anak perempuan. Namun, apa hubungan logis antara anak laki-laki dan perempuan dengan pizza? Sekali lagi, buku sekolah tidak memberikan penjelasan. Namun, jelas bahwa setiap siswa kelas 5 harus memahami konsep pecahan, yaitu bisa memiliki dua makna sekaligus.

Pecahan $\frac{3}{4}$ juga dapat dipandang sebagai “3 dibagi oleh 4”. Ada banyak kesalahan dalam pernyataan ini, terutama ketika siswa mempelajari pecahan, mereka sedang belajar tentang pembagian bilangan bulat atau baru saja menyelesaikannya. Dalam situasi tersebut, memahami $m \div n$ (untuk bilangan bulat m dan n, di mana $n \neq 0$ sebagai pembagian ke dalam kelompok yang sama atau sebagai pengukuran hanya ketika m adalah kelipatan dari n. Jika m bukan kelipatan dari n, maka siswa belajar tentang pembagian dengan sisa, di mana $m \div n$ menghasilkan dua bilangan, yaitu hasil bagi dan sisa. Konsep angka tunggal $3 \div 4$ adalah hal baru bagi siswa yang mencoba memahami pecahan, dan mendefinisikan $\frac{3}{4}$ dalam hal 3 ÷ 4 adalah kesalahan besar dalam matematika. Yang benar adalah, ketika “bagian dari keseluruhan” didefinisikan dengan tepat dan ketika m ÷ n juga didefinisikan dengan tepat untuk bilangan bulat m dan n, di mana (n $\neq$ 0). Memang $\frac{m}{n} = \mathrm{m} \div \mathrm{n}$ dapat dibuktikan. Namun, justifikasi untuk presentasi tersebut juga normalnya tidak disajikan dalam pengetahuan yang diajarkan baik dalam buku ajar maupun bentuk lain.

Pada aritmetika pecahan, sejumlah masalah dan kesulitan seringkali terjadi pada siswa, terutama bagi mereka yang baru pertama kali mempelajarinya (Wu, 2011). Salah satu tantangan utama adalah penambahan dan pengurangan pecahan dengan penyebut yang berbeda. Untuk melakukan operasi ini, siswa harus mencari penyebut bersama, yang memerlukan pemahaman mendalam tentang faktor dan kelipatan. Kesalahan umum yang sering terjadi adalah siswa menambah atau mengurangkan penyebut langsung, bukan mencari penyebut bersama. Dalam perkalian dan pembagian pecahan, meskipun dianggap relatif lebih mudah, juga memiliki tantangannya sendiri. Siswa harus mengalikan pembilang dengan pembilang dan penyebut dengan penyebut. Namun, seringkali siswa mengalami kebingungan antara menyamakan penyebut terlebih dahulu sebagaimana pada penjumlahan-pengurangan, atau strategi lain yang harus mereka gunakan. Selain itu, ada kebingungan yang mungkin terjadi antara operasi perkalian dan penambahan, terutama saat berhadapan dengan pecahan campuran. Sementara itu, dalam pembagian pecahan, disampaikan bahwa siswa harus memahami konsep membalikkan pecahan kedua dan kemudian mengalikannya dengan pecahan pertama. Proses ini bisa membingungkan, dan sering kali hasil pembagian tidak disederhanakan ke bentuk terendah. Kemudian, contoh lain adalah pada pecahan campuran di mana contoh kegiatan dalam memanipulasi pecahan campuran menjadi pecahan biasa atau sebaliknya sering disajikan secara mekanikal tanpa mempertimbangkan justifikasi yang mendasarinya (lihat Gambar 2).

Mengubah ke bentuk pecahan biasa

Pecahan campuran pada hasil lompatan Yohana yaitu $2\frac{3}{4}$ dan $3\frac{1}{2}$ dapat diubah menjadi pecahan biasa.

Lengkapilah langkah berikut!

$$2\frac{3}{4} = \frac{(\cdots \times \cdots) + \cdots}{4} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

$$3\frac{1}{2} = \frac{(\cdots \times \cdots) + \cdots}{\cdots} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

Gambar 2. Contoh *task* tentang manipulasi pecahan campuran di buku teks Indonesia.

Informasi tersebut menjadi pemantik bagi peneliti untuk bersikap skeptis terhadap sajian pengetahuan aritmetika pecahan sebagai isu yang perlu diperhatikan baik dari sajian *tasks* hingga di luar tematik seperti ekologi yang tercakup dalam sajian pengetahuannya, untuk kemudian mengkaji mengkaji struktur pengetahuan dari aritmetika pecahan yang tersaji di buku teks Indonesia. Maka di atas semua fenomena ini, perlu dipertimbangkan kembali segala aspek yang mempengaruhi pemikiran sajian aritmetika pecahan sebagai sebuah pengetahuan sebagai dasar konstruksi pemikiran yang esensial. Pemikiran tersebut dapat terbentuk apabila dalam pembangunan pengetahuan siswa benar-benar memiliki landasan yang kuat serta justifikasi atas apa yang diyakininya. Pengetahuan tentang aritmetika pecahan yang dibangun secara epistemik akan memberikan fondasi yang kokoh untuk siswa dapat menyesuaikan dengan berbagai situasi yang akhirnya dapat beradaptasi dengan permasalahan-permasalahan yang dihadapi, dan tentu saja menyelesaikannya.

Untuk siswa dapat mencapai pengetahuan sebagai *justified true belief*, maka siswa—sebagai objek—harus difasilitasi melalui cara-cara yang dapat memandirikan proses berpikir untuk membentuk keyakinannya akan kebenaran dan realitas serta membangun justifikasi terhadap keyakinan tersebut untuk menuju sebuah keyakinan yang benar-benar benar. Sebagaimana metafora dari mitologi patung Daedalus yang melambangkan kekokohan dan keindahan hasilnya, kemampuannya untuk memahami dan merealisasikan konstruksi terhadap keyakinan tersebut merepresentasikan aspek justifikasi terhadap pengetahuan bagi siswa. Siswa sebagai seorang individu yang mandiri seyogyanya tidak hanya menerima informasi sebagai sesuatu yang benar, namun juga bersikap skeptis, mengetahui alasan dibalik informasi tersebut dan mampu menjadikannya dasar mengapa mereka meyakini keyakinan tertentu sebagai kebenaran.

Dalam rangka memfasilitasi siswa agar dapat mengonstruksi pengetahuan sebagai *justified true belief*, maka diperlukan sebuah proses di mana siswa, fasilitator, dan pengetahuan dapat berjalan sebagai sebuah sistem yang dikenal sebagai sistem didaktik (Chevallard, 2019). Sebelumnya, kata didaktik muncul sebagai sebuah terminologi pada abad pertengahan oleh Wolfgang Ratke (Turnbull, 1993). Kemudian, didaktik dikaji lebih jauh di Eropa dan salah satu penerusnya adalah Comenius (1910) yang memandang didaktik sebagai *"the art of teaching"* yaitu sebagai sebuah seni. Lebih jauh, Comenius juga menjelaskan tentang seni yang dipandang sebagai sebuah keindahan sehingga bersifat menyenangkan sehingga berdampak pada apresiasi dan impresi kesenangan atau kepuasan bagi yang mengalaminya. Maka, dalam sudut pandang tersebut, untuk mencapai tingkatan seni dalam didaktik maka diperlukan dua buah pihak baik fasilitator maupun siswa untuk mencapai keseimbangan dalam pembelajaran. Keseimbangan tersebut dapat berupa keseimbangan dalam adaptasi dan akulturasi sebagaimana yang dikaji dalam *theory of didactical situations in mathematics* (Brousseau, 1997) atau pun juga dalam difusi dan akuisisi pengetahuan, yang sekaligus menjadi sifat didaktik selanjutnya sebagai sains yaitu *"the science of knowledge diffusion and acquisition in society"* (Chevallard & Sensevy, 2014). Dalam definisi kontemporer ini, didaktik tidak hanya berkaitan dengan pengetahuan sebagai unit parsial namun sebagai unit integral, di mana satu unit pengetahuan atau *piece of knowledge* tidak dapat dipisahkan dari kajian pengetahuan lainnya di dalam sebuah disiplin ilmu atau *body of knowledge.* Jika memandang proses difusi dan akuisisi sebagai sebuah pengetahuan maka keduanya juga haruslah berupa pengetahuan. Sehingga makna pengetahuan sebagai *justified true belief* haruslah tertanam baik dalam memandang proses difusi dan akuisisi sebagai epistemologi. Pendangan tersebut lah yang sekaligus menjadi perspektif ketiga dari didaktik yaitu sebagai epistemologi, di mana implikasinya adalah perlunya paradigma interpretif sebelum dapat menyajikan sebuah pembelajaran bagi siswa. Berdasarkan perspektif-perspektif didaktik tersebut, sistem didaktik dapat dijalankan berdasarkan ketiga sifat didaktik yang demikian (Suryadi, 2019b).

Isu dalam aritmetika pecahan yang dipaparkan sebelumnya memotivasi peneliti dalam menghasilkan pengetahuan baru dalam bentuk desain didaktis dan kajian-kajiannya melalui Penelitian Desain Didaktis atau *Didactical Design Research* (DDR). DDR merupakan sebuah penelitian desain yang didasarkan atas sifat didaktik sebagai seni, sains, dan epistemologi dalam konteks difusi dan akuisisi pengetahuan dengan tujuan untuk memandirikan peserta didik dalam menghasilkan pengetahuan baru sebagai *justified true belief. Framework* ini digunakan karena mewadahi tujuan dari peneliti dalam memfasilitasi siswa untuk membangun pengetahuannya terkait aritmetika pecahan secara sistemik dan epistemik.

Sebuah desain yang mempertimbangkan didaktik sangat bertumpu pada kajian fenomena didaktik sebagai seni, sains, dan epistemologi. Sebelum dilaksanakannya perancangan yang berparadigma kritis, perlu sebelumnya dilakukan analisis yang komprehensif sebagai dasar agar pengetahuan yang dibangun memiliki pondasi yang kokoh dan terjustifikasi. Dalam membangun landasan tersebut, desain didaktis dapat memandang beberapa fenomena didaktik seperti apa yang dikaji dalam didaktik sebagai sains yaitu pada *the anthropological theory of the didactics* yang mencakup transposisi didaktik serta *praxeology.* Selain itu, fenomena dalam situasi didaktik matematika juga dikaji sebagai bagian keseimbangan difusi dan akuisisi pengetahuan pada *theory of didactical situations in mathematics* bersamaan di dalamnya dengan *learning obstacle* yang dapat diidentifikasi. Semuanya melalui proses yang epistemik yang pada akhirnya keseluruhan prosesnya juga merupakan sebuah pengetahuan.

Perancangan desain juga sangat identik dengan melihat masa depan dan melihat perubahan. Untuk mencapai perubahan, maka diperlukanlah kebiasaan yang berbeda dari apa yang bisa dikerjakan dan melihat hal baru yang mungkin akan terjadi. Para pembuat desain melihat ke depan dan mengantisipasi apa yang akan terjadi dalam lintasan belajar (Bakker, 2018). Begitu juga dalam sistem didaktik (Chevallard & Sensevy, 2014; Gascón, 2011), pentingnya sebuah desain yang efektif tidak dapat diabaikan. Desain tidak hanya dapat fokus pada hasil, tetapi juga pada alasan yang mendasari tentang bagaimana dan mengapa desain tertentu bekerja.

Pada kenyataannya, masa depan sangat erat kaitannya dengan pengalaman masa lalu dan masa sekarang. DDR menerapkan sebuah filosofi *transcendental idealism*. Pandangan ini dipopulerkan oleh Immanuel Kant yang menyatakan bahwa pengalaman peneliti terhadap realitas dibentuk oleh cara pikiran peneliti menyusun persepsinya (fenomena), bukan oleh sifat benda itu sendiri (noumena). Pikiran manusia berperan aktif dalam membentuk ciri-ciri objek dan struktur pengalaman peneliti melalui pengetahuan apriori. Dunia fenomenal dan dunia noumenal dipisahkan. Meskipun peneliti dapat mengetahui dunia fenomenal melalui kategori pemahaman dan bentuk sensibilitas (ruang dan waktu), dunia noumenal yang tidak dapat peneliti akses melalui persepsi dapat eksis sebagaimana adanya. Karena pemahaman peneliti tentang alam semesta terbatas pada kondisi kemungkinan pikiran peneliti sendiri untuk memproses dan mengatur informasi, yang berarti bahwa sifat-sifat yang peneliti atributkan pada objek (seperti ruang, waktu, dan kausalitas) tidak melekat pada diri peneliti sendiri, melainkan hasil dari kemampuan bawaan pikiran, maka begitu pula dalam pembentukan pengetahuan melalui desain juga mempertimbangkan aspek fenomena yang dapat dikaji sebelumnya.

Filosofi ini juga sekaligus sebagai sarana menyatukan pembahasan di awal tentang matematika—terutama kemudian pada aritmetika pecahan—dalam pandangan rasionalis dan empiris, dan untuk menjembatani kesenjangan antara sains dan moralitas dengan membangun landasan yang kokoh bagi keduanya. DDR mempertimbangkan aspek aposteriori untuk menyusun pengetahuan baru. Penelitian ini berusaha menunjukkan bahwa struktur pengetahuan dan kondisi pengalaman yang berakar pada subjek, bukan pada objek eksternal. Realitas yang peneliti hadapi adalah konstruksi bersama antara pikiran dan dunia, namun juga mempertahankan perbedaan tajam antara apa yang dapat diketahui dan apa yang harus tetap berada di luar jangkauan peneliti selamanya. jangkauan kognitif. Sehingga dalam kedua paradigma interpretif dan kritis, akan dipertimbangkan beberapa aspek seperti *synthetic aposteriori, synthetic apriori, serta synthetic judgment* dan *analytic judgment.* Sehingga, pengetahuan yang didapat siswa tidak hanya perseptual, namun masuk ke memorial, introspektif, hingga kembali ke apriori.

Berdasarkan penelitian-penelitian mutakhir pada topik pecahan sebagai bagian dari aritmetika terbit setiap tahun dengan pembahasan luas baik pada pengetahuan prosedural dan konseptual, kesulitan yang dialami siswa, kesulitan tentang aritmetika pecahan sendiri, perbedaan individu dalam belajar aritmetika pecahan, pendekatan-pendekatan serta model yang digunakan serta implementasinya di dalam sistem didaktik, serta diskusi lainnya yang dideskripsikan dalam kajian pustaka pada bab selanjutnya, peneliti menemukan titik-titik yang kemudian menjadi garis merah dari apa yang dapat terus diimprovisasi dan menjadi perbaikan dalam tindakan-tindakan untuk memandang status quo dengan lebih kritis. Penelitian tentang pecahan banyak berfokus pada bagaimana peneliti menyelesaikan permasalahan yang spesifik pada kasus tertentu. Misal, pada kasus di mana siswa mengalami kendala dalam menyelesaikan permasalahan pada konteks pecahan berbeda penyebut, banyak alternatif dengan konteks yang berbeda-beda dilaksanakan dengan kurangnya perhatian pada struktur pengetahuan aritmetika pecahan tersebut secara keseluruhan. Demikian juga pada kasus yang terjadi pada apa yang disajikan sendiri sebagaimana pada Gambar 2. Siswa mungkin memahami satu metode yang dapat menyelesaikan kasus pada penambahan pecahan, namun, ketika beranjak ke perkalian atau pembagian pecahan maka keyakinan yang mereka miliki goyah akibat konsep dan konteks yang berbeda yang diajarkan. Satu bagian dari pengetahuan tersebut tidak terhubung dengan pengetahuan selanjutnya, melainkan memilih untuk memberikan satu bagian pengetahuan baru yang terpisah.

Secara umum, peneliti menemukan beberapa celah dalam diskusi dalam artefak baik dari studi ilmiah maupun studi lanjut mengenai fenomena didaktik, yang belum diisi oleh diskusi pada penelitian-penelitian dan praktik pendidikan yang telah dijalankan. Beberapa studi seperti contoh oleh Wu (2002); Kara dkk. (2018); Braithwaite dkk. (2019); Mostert dan Hickendorff (2023), dan studi lain telah membahas bagaimana setiap kasus pada situasi yang spesifik, namun belum mencapai tingkat di mana satu solusi tersebut ditujukan untuk mencakup keseluruhan masalah-masalah yang terjadi dengan mempertimbangkan matematika sebagai satu pengetahuan. Sedangkan, kasus-kasus yang terjadi berada pada irisan pengetahuan yang sama yaitu aritmetika pecahan. Dari berbagai macam konteks yang disajikan dalam rangka memperkenalkan pecahan pada wujud fisik yang dapat dimanipulasi oleh siswa seperti *pizza,* kue, martabak, pita, atau contoh-contoh lain yang langsung membawakan ke pecahan, semuanya memberikan konteks yang tidak universal. Maksudnya, setiap objek yang digunakan selalu eksklusif pada satu topik aritmetika. Sebagai contoh, *pizza* kebanyakan digunakan hanya pada kasus di mana pecahannya adalah pecahan asli karena keterbatasannya pada unit satuan (Wu, 2011). Objek-objek lain juga serupa, yaitu memiliki kekurangan dalam merepresentasikan pecahan tak murni, atau juga dalam operasi aritmetika di mana penjelasan satu konsep tidak dapat dipakai di konsep lain. Kondisi yang demikian tentunya berpotensi mengganggu pengetahuan pecahan dalam tradisi matematika yaitu deduktik aksiomatik, yang karenanya juga sangat mungkin menimbulkan *learning obstacle.*

Sebagai kebaruan, peneliti menawarkan cara yang berbeda dalam memandang dan menilai fenomena tersebut dengan sebuah perspektif tentang bagaimana satu konteks yang disajikan dapat digunakan untuk menjelaskan dan memfasilitasi siswa dalam membangun pengetahuan aritmetika pecahan di sekolah dasar. Untuk memperkenalkan pecahan dari bentuk informasi yang dapat diterima secara empirik, peneliti memberikan kombinasi antara bagaimana pecahan dapat direpresentasikan dalam semua bentuk—pecahan biasa/murni, pecahan tak murni, pecahan campuran, hingga ke bilangan bulat—dalam kombinasi antara pita dengan garis bilangan. Pita adalah representasi dari unit pecahan, yang berfungsi sebagai jembatan bagi siswa untuk memahami pecahan secara utuh sebagai *numeral* atau angka, yaitu notasi dari bilangan, yang dipahami lebih presisi posisinya pada garis bilangan. Kedua objek tersebut tercantum dalam banyak penelitian yang dijabarkan lebih lanjut pada Kajian Pustaka, sebagai media efektif dalam pembelajaran pecahan. Kendati, seperti yang telah disampaikan, masih dalam titik-titik yang terpisah secara sistem pengetahuan. Oleh karenanya, peneliti memiliki niat untuk membuat peta universal sistem didaktik pecahan dengan sarana tersebut.

Jika pembelajaran di kelas adalah akses ke sumber utama dari pengalaman yang ditangkap oleh siswa dalam proses membangun pengetahuan, maka momen tersebutlah seharusnya yang terpenting bagi siswa dan bagi guru. Jika prinsip-prinsip yang terjadi dalam pembelajaran belum berjalan sesuai seharusnya, maka satu-satunya prinsip yang relevan adalah yang akan kita tentukan ke depan. Jika konteks yang tersaji hilang arah karena perbedaan satu kasus dengan yang lain, maka kita yang harus mendikte tujuan kita agar kembali sesuai dengan sifat alami pengetahuan. Siswa menerima informasi dan pengalaman sensori mereka hingga ditangkap menjadi sebuah fenomena. Namun bagaimana struktur kognitif yang memproses informasi tersebut adalah aspek yang tidak dapat ditinggalkan. Agar konteks dapat terhubung dengan baik, maka perlu disusun sebuah desain didaktis yang memfasilitasi sistem agar berjalan dengan baik dalam menggapai tujuan-tujuan yang diinginkan.

Penelitian ini akan menghasilkan pengetahuan-pengetahuan baru yang mengisi celah secara pengetahuan, hasil pada diskusi teoreris yang ada, maupun dalam implementasi praksisnya. Pada desain didaktis yang akan disusun, pita dan garis bilangan adalah sarana universal utama dalam mengantarkan siswa membangun pengetahuannya sendiri secara sistemik dan epistemik. Berdasarkan kasus-kasus dan berbagai pendekatan yang telah dijelaskan sebelumnya dengan kelebihan dan kekurangan masing-masing, peneliti berupaya menghadirkan keseimbangan antara difusi dan akuisisi pengetahuan—pengetahuan yang tidak terlalu jauh dari pengetahuan ilmiah sehingga keluar dari jalur transposisi serta tidak pula terlalu dekat sehingga memberikan beban kognitif berlebih, di mana pita-garis bilangan sebagai bagian dari *milieu* adalah suatu upaya mutahir yang menginisiasi langkah tersebut di antara artefak studi yang ada. Bentuk-bentuk pengetahuan tersebut selain terwujud dalam desain, juga terjabarkan dalam studi-studi turunannya seperti *reference epistemological model*, dan studi transposisi-*praxeology*, serta *worksheet* yang menjadi alat untuk mengeksekusi desain didaktisnya.

Pembelajaran dalam pandangan didaktik adalah interaksi ketiga komponen yang tidak terlepas: siswa, fasilitator, dan pengetahuan (Chevallard, 2019). Satu komponen tidak akan berdiri secara eksklusif, pun juga tidak akan mengganti peran satu dengan yang lain. Oleh karenanya, satu solusi yang holistik diperlukan dalam pembelajaran yang dilaksanakan. Dengan mengkaji pemahaman yang lebih baik tentang realitas, maka dapat menjadi satu peluang untuk mencari solusi dan mengaktualisasikannya secara lebih komprehensif. Untuk merealisasikannya, berdasarkan data perseptual, analisis terhadap temuan, tanggapan atas kesenjangan pada studi relevan dan untuk mencapai pengetahuan sebagai *justified true belief*, peneliti mengambil posisi untuk bergabung dalam diskusi dan melaksanakan penelitian pada *framework* DDR. Peneliti menggunakan kerangka penelitian ini sebagai wadah dalam melakukan analisis interpretif menghasilkan *critical change* dalam tujuan merancang dan mengembangkan desain didaktis dengan pita-garis bilangan sebagai sarana sistemik dan epistemik pada topik aritmetika pecahan.

1.2 Tujuan Penelitian

Berdasarkan apa yang telah dipaparkan pada latar belakang, maka penelitian ini memiliki tujuan pokok untuk menganalisis, merancang, dan mengembangkan desain didaktis pada materi aritmetika pecahan bagi siswa kelas 6 sekolah dasar. Tujuan pokok tersebut terjustifikasi dalam latar belakang dan terelaborasikan dalam setiap poin-poin tujuan khusus berikut:

1. Melaksanakan analisis fenomena didaktik sebagai dasar perancangan desain didaktis aritmetika pecahan sekolah dasar.
2. Menyusun *hypothetical learning trajectory* sebagai desain didaktis hipotetik aritmetika pecahan sekolah dasar.
3. Melaksanakan analisis situasi didaktik penerapan desain didaktis hipotetik.
4. Menganalisis *learning obstacles* siswa terhadap desain didaktis hipotesis.
5. Melaksanakan analisis retrospektif, merefleksi dan mengevaluasi desain didaktis.
6. Menyusun *hypothetical learning trajectory* sebagai desain didaktis empirik aritmetika pecahan sekolah dasar.

1.3 Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan tujuan penelitian tersebut, maka dapat dispesifikasikan pertanyaan penelitian untuk dijawab melalui penelitian ini yaitu:

1. Bagaimana hasil analisis fenomena didaktik sebagai dasar perancangan desain didaktis aritmetika pecahan sekolah dasar?
2. Bagaimana susunan *hypothetical learning trajectory* sebagai desain didaktis hipotetik aritmetika pecahan sekolah dasar?
3. Bagaimana hasil analisis situasi didaktik dalam implementasi desain didaktis aritmetika pecahan sekolah dasar?
4. Bagaimana hasil analisis retrospektif, refleksi, dan evaluasi desain didaktis aritmetika pecahan di sekolah dasar?
5. Bagaimana hasil analisis *learning obstacles* siswa dalam implementasi desain didaktis aritmetika pecahan di sekolah dasar?

6. Bagaimana susunan *hypothetical learning trajectory* sebagai desain didaktis empirik aritmetika pecahan sekolah dasar?

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi setiap elemen yang terlibat dan mendalami pendidikan matematika baik dari komunitas matematikawan, sistem pendidikan, maupun yang berada di ruang kelas. Oleh karenanya, penelitian ini diharapkan berkontribusi secara teoretis dan praksis yang secara umum dideskripsikan sebagai berikut.

1.4.1 Manfaat Segi Teoretis

Secara teoretis, hasil penelitian ini berguna baik secara analisis maupun sebagai bahan diskusi terkait hasil analisis fenomena didaktik dan lanjutannya berupa rancangan desain didaktis pada konsep aritmetika pecahan di sekolah dasar. Penelitian ini bergabung dalam kajian-kajian pada topik pecahan dan utamanya pada aritmetika pecahan baik dalam penelitian pada siswa sekolah dasar maupun kajian aritmetika pecahan secara umum. Selain itu, kajian teoretis yang dilaksanakan akan membuka diskusi tentang bagaimana pengetahuan pecahan ada secara ontologis dan kemudian dikaji epistemologinya yang dapat didiseminasikan dalam wujud publikasi ilmiah.

Desain didaktis yang dihasilkan diharapkan akan bermanfaat pada bagaimana kajian didaktik tentang aritmetika pecahan dibahas terkait pengajaran dan pembelajarannya, tentang tujuan pembelajaran, sajian materi dan aktivitas yang dilaksanakan, bagaimana siswa pada nantinya akan merespons difusi pengetahuan yang terjadi. Desain didaktis dapat dijadikan sebagai bahan diskusi dalam rangka perbaikan desain didaktis sehingga dapat membantu siswa mengatasi hambatan belajarnya serta mengembangkan potensi yang dimiliki. Kajian ini dipandang perlu dilakukan karena topik aritmetika pecahan merupakan konsep yang menjadi prasyarat topik atau mata kuliah lain, membekali kemampuan berpikir logis dan sistematis siswa sekolah dasar, dan memberi pengalaman dalam mengonstruksi pengetahuan matematika bagi siswa sekolah dasar.

1.4.2 Manfaat Segi Praksis

Penelitian diharapkan bermanfaat terhadap pelaksanaan pembelajaran atau implementasi didaktis sesuai dengan sifat didaktik sebagai epistemologi, sains, maupun seni. Selain itu, implementasi desain didaktik yang dihasilkan melalui serangkaian proses penelitian diharapkan membawa bentuk pengetahuan-pengetahuan baru memberikan perubahan secara langsung melalui jalannya sistem didaktik yang berbeda dari sebelumnya, baik dari interaksi antara siswa-guru-pengetahuan maupun dari masing-masing komponen tersebut.

Penelitian juga diharapkan diterima oleh guru sebagai fasilitator yang juga menjadi pendamping peneliti dalam menangkap fenomena yang terjadi juga mendapatkan timbal balik dan pemikiran-pemikiran baru hasil dari diskusi bersama peneliti, untuk menjalankan temuan-temuan dan memperbaiki bagian-bagian yang menjadi kekurangan dari kurikulum, bahan ajar, dan desain didaktis. Sementara itu, manfaat praksis yang diterima oleh siswa dapat diharapkan dapat berupa praktik membangun pengetahuan yang lebih epistemik dan sistemik sehingga didapatkan hasil yang sejalan.

1.4.3 Manfaat Segi *Policy and Governance*

Pada lingkup yang lebih meluas, penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat bagi pengambil keputusan dalam membuat kebijakan dan menerapkannya dalam sistem pendidikan yang berlaku di Indonesia. Hasil dan pembahasan yang dilaksanakan pada penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat untuk pengambil kebijakan dalam membuat *policy* yang tepat untuk dilaksanakan ke sistem pendidikan, ke sekolah, dan ke kurikulum untuk penerapan yang lebih general.

1.5 Struktur Organisasi Disertasi

Disertasi ini memuat BAB I (pendahuluan) yang berisi latar belakang masalah, tujuan penelitian, rumusan masalah, manfaat penelitian, dan struktur organisasi disertasi; BAB II (kajian literatur) membahas mengenai pecahan pada cabang aritmetika, teori metapedadidaktik, *the anthropological theory of the didactics, theory of didactical situations in mathematics, dan hypotherical learning trajectory*; BAB III (metodologi penelitian), di dalamnya memuat desain penelitian, partisipan dalam penelitian, keabsahan data penelitian, instrumen penelitian, tahapan penelitian, teknik penghimpunan data, dan teknik analisa data penelitian; BAB IV (hasil penelitian) memuat hasil penelitian yang terdiri dari hasil analisis prospektif, analisis metapedadidaktik, dan analisis retrospektif; BAB V (pembahasan) menyajikan pembahasan umum, yaitu interpretasi hasil penelitian dan menjelaskan makna dari hasil yang ditemukan berdasarkan subjektivitas penilaian peneliti sebagai instrumen penelitian kualitatif dan objektif terhadap landasan teori yang digunakan serta penelitian-penelitian relevan kontemporer dan terdahulu; BAB VI (simpulan dan implikasi) memuat menyajikan ringkasan temuan utama, serta jawaban atas rumusan masalah, membahas implikasi teoretis, praktis, dan kebijakan dari hasil penelitian serta rekomendasi untuk penelitian selanjutnya.

1.6 Ruang Lingkup/Batasan

Penelitian ini merupakan sebuah penelitian desain didaktis yang mengkaji tentang desain didaktis aritmetika pecahan di sekolah dasar berdasarkan sifat didaktik sebagai seni, sains, dan epistemologi. Materi pecahan yang dikaji merupakan pecahan yang merujuk pada pengetahuan ilmiah aritmetika sebagai salah satu cabang ilmu matematika dan bersifat menyeluruh terhadap kajian transposisi yang dijalankan dari pengetahuan ilmiah hingga ke pengetahuan yang diterima oleh siswa. Cakupan materi pecahan berfokus pada aritmetika pecahan, yaitu pecahan dikaji dari sudut pandang aritmetika sebagai cabang langsung dari matematika. Pada ruang lingkup tersebut, aritmetika pecahan mencakup: 1) Pendefinisian pecahan di dalam matematika, 2) operasi aritmetika yang melibatkannya, 3) proses reduksi yang terjadi. Sementara itu, batasan ruang lingkup teoretis berdasarkan pada *framework* penelitian desain didaktis. Implementasi desain didaktis dilaksanakan di kelas 6 sekolah dasar. Teori-teori, jalan berpikir, metode penelitian, dan hasil serta pembahasan yang menjustifikasi argumen dan landasan peneliti terhadap tujuan penelitian dijabarkan sepanjang susunan disertasi.