

**PENELITIAN DESAIN DIDAKTIS: PITA-GARIS BILANGAN SEBAGAI
SARANA SISTEMIK-EPISTEMIK SISTEM DIDAKTIK
ARITMETIKA PECAHAN SEKOLAH DASAR**



DISERTASI

Diajukan untuk memenuhi sebagian syarat untuk memperoleh gelar
dokter pendidikan matematika

Oleh:

SANI SAHARA

NIM 2217239

**PROGRAM STUDI DOKTOR PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
2025**

**PENELITIAN DESAIN DIDAKTIS: PITA-GARIS BILANGAN SEBAGAI
SARANA SISTEMIK-EPISTEMIK SISTEM DIDAKTIK
ARITMETIKA PECAHAN SEKOLAH DASAR**

Oleh:
SANI SAHARA
2217239

S.Pd. Universitas Jember, 2020
M.Pd. Universitas Sebelas Maret, 2022

Sebuah Disertasi yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh
gelar Doktor Pendidikan (Dr.) pada Fakultas Pendidikan Matematika
dan Ilmu Pengetahuan Alam

© Sani Sahara 2025
Universitas Pendidikan Indonesia
Juni 2025

Hak cipta dilindungi undang-undang.
Disertasi ini tidak diperkenankan untuk diperbanyak seluruh atau sebagian,
dengan dicetak ulang, fotokopi, atau cara lainnya tanpa izin dari penulis.

SANI SAHARA

**PENELITIAN DESAIN DIDAKTIS: PITA-GARIS BILANGAN SEBAGAI
SARANA SISTEMIK-EPISTEMIK SISTEM DIDAKTIK ARITMETIKA
PECAHAN SEKOLAH DASAR**

Disetujui dan disahkan oleh panitia disertasi,

Promotor



Prof. Dr. Didi Suryadi, M.Ed.

NIP. 195802011984031001

Kopromotor 1



Prof. Turmudi, M.Ed., M.Sc., Ph.D.

NIP. 196101121987031003

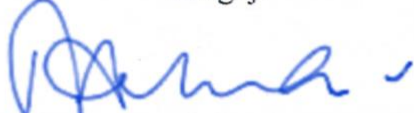
Kopromotor 2



Prof. Dr. Dadan Dasari, M.Si.

NIP. 196407171991021001

Penguji



Prof. Dr. Tatang Herman, M.Ed.

NIP. 196210111991101001

Penguji Luar Universitas



Prof. Dr. Cholis Sa'dijah, M.Pd., M.A.

NIP. 196104071987012001

Mengetahui,

a.n. Ketua Program Studi S1, S2, S3 Pendidikan Matematika
Sekretaris Program Studi S1, S2, S3 Pendidikan Matematika



Dr. Eyus Sudihartini, M.Pd.

NIP. 198404282009122004

PERNYATAAN BEBAS PLAGIARISME

Peneliti yang bertanda tangan di bawah ini:

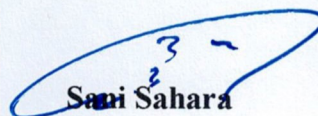
Nama : Sani Sahara
NIM : 2217239
Program Studi : S3 Pendidikan Matematika
Judul Karya : Penelitian Desain Didaktis: Pita-Garis Bilangan sebagai Sarana Sistemik-Epistemik Sistem Didaktik Aritmetika Pecahan Sekolah Dasar

Dengan ini menyatakan bahwa karya tulis ini merupakan hasil kerja peneliti sendiri. Peneliti menjamin bahwa seluruh isi karya ini, baik sebagian maupun keseluruhan, bukan merupakan plagiarisme dari karya orang lain, kecuali pada bagian yang telah dinyatakan dan disebutkan sumbernya dengan jelas.

Jika di kemudian hari ditemukan pelanggaran terhadap etika akademik atau unsur plagiarisme, peneliti bersedia menerima sanksi sesuai peraturan yang berlaku di Universitas Pendidikan Indonesia.

Bandung, Juni 2025




Sani Sahara

KATA PENGANTAR

Assalamualaikum Warrahmatullahi Wabarakatuh.

Sebagai awalan, perkenankan penulis menyampaikan sepatah kata pengantar. Disertasi ini memuat penelitian yang dilaksanakan oleh penulis selama studi doktoral pendidikan matematika di Universitas Pendidikan Indonesia, Bandung. Penelitian ini dilaksanakan di dalam *framework* penelitian desain didaktis (DDR) yang mengangkat topik aritmetika pecahan dari berbagai teori dan sudut pandang dalam proses mengungkap realitas di dalamnya.

Penulis tidak akan pernah bisa menyelesaikan disertasi ini sendiri. Oleh karenanya, disertasi ini penulis persembahkan untuk semua yang hadir selama beberapa tahun ke belakang, melalui perjalanan naik dan turun di hari-hari panjang dan malam-malam dingin dan sepi demi harapan dan cita-cita yang sama. Tahap ini dapat tercapai hanya atas bantuan dan dukungan mereka yang terlibat. Terima kasih kepada tim pembimbing: promotor Prof. Dr. Didi Suryadi, M.Ed., kopromotor satu Prof. Turmudi, M.Ed., M.Sc., Ph.D., dan kopromotor dua Prof. Dr. Dadan Dasari, M.Si., beserta tim penguji: Prof. Dr. Tatang Herman, M.Ed. dan Prof. Dr. Cholis Sa'dijah, M.Pd., M.A., atas kebijaksanaan dalam memfasilitasi penulis membangun pengetahuan-pengetahuan selama studi doktoral ini. Terima kasih kepada jajaran Departemen Pendidikan Matematika Universitas Pendidikan Indonesia, seluruh dosen, staf, dan teman-teman mahasiswa, khususnya angkatan 2023 genap yang telah mendampingi kelas-kelas kuliah bersama dengan penulis, kolega, Prof. Maarten, dan pihak lain yang tidak dapat secara keseluruhan disebutkan. Terima kasih atas ketulusan kedua orang tua penulis: Bapak Sukarno dan Ibu Yuli Astanti, dan adik penulis, Kenia Siste. Terima kasih kepada teman-teman serumah seperjuangan: keluarga PUSBANGDDRINDO, Mas Agus sekeluarga, Lukman sekeluarga, Alfyn, Pak Nashar, Dafa, Jonathan, Fuada, Muhtar, dan yang lainnya. Terima kasih kepada rekan-rekan seperjuangan selama studi sarjana dan magister: teman-teman "*Algebra*" khususnya Mohammad "*Iyek*" Alkatiri, Fajar, Aden, dan alumni pendidikan matematika UNS 2020. Terima kasih kepada Nadya Syifa Utami

sekeluarga atas makna tentang harapan dan masa depan, *you are my beautiful blessing*.

Terakhir, penulis sebagai peneliti menyampaikan terima kasih kepada seluruh masyarakat Indonesia melalui Lembaga Pengelola Dana Penelitian (LPDP) dalam amanah pendanaan dan dukungan studi pada keseluruhan kebutuhan penelitian ini dan turunannya. Penulis berharap tulisan ini dapat sedikit-banyak berkontribusi baik dalam diskusi teoretis maupun praktik terhadap pengetahuan dan kemanusiaan.

“Whatever is done out of love takes place beyond good and evil” (Friedrich Nietzsche dalam *Beyond Good and Evil: Prelude to a Philosophy of the Future*).

“While there is life, there is hope” (Stephen Hawking).

Wassalamualaikum Warrahmatullahi Wabarakatuh.

Bandung, Juni 2025

Sani Sahara

ABSTRAK

Sani Sahara (2217239). Penelitian Desain Didaktis: Pita-Garis Bilangan sebagai Sarana Sistemik-Epistemik Sistem Didaktik Aritmetika Pecahan Sekolah Dasar.

Diskusi mengenai pecahan sebagai bagian dari aritmetika telah berlangsung selama ribuan tahun, namun hingga sekarang publikasi terus berlanjut tiap tahun, terutama pada bagian bagaimana pecahan di sekolah ditransposisikan sebagai *knowledge to be taught*. Sementara itu, para rasionalis menganggap realitas matematika sendiri berada di pikiran manusia dan para empiris berpendapat bahwa setiap pengetahuan harus berasal dari dunia yang diterima oleh indra sensoris. Oleh karenanya, dalam disertasi ini, peneliti berlandaskan pada *transcendental idealism* sebagai solusi tentang bagaimana memandang matematika untuk diajarkan di kelas, yaitu memandang bahwa setiap tanda/gejala haruslah diproses melalui rasio terlebih dahulu untuk menjadi sebuah pengetahuan, dan yang paling penting adalah bagaimana proses berpikirnya berjalan. Dengan gap yang ada pada literatur, pada pengetahuan yang terjadi di sistem didaktik baik yang belum maupun yang telah terjadi, temuan tentang *learning obstacle* dalam studi prospektif, maka penelitian ini bermaksud untuk bergabung dalam diskusi yang telah ada untuk berkontribusi pada status quo dan implementasi didaktik dari pengetahuan pecahan yang bersifat sistemik dan epistemik. Untuk mewujudkannya, maka penelitian ini bertujuan untuk menghasilkan pengetahuan berupa desain didaktis yang dilandasi sifat-sifat didaktik sebagai seni, sains, dan pengetahuan. Dalam menggapai realitas yang ingin diketahui, peneliti berjalan di dalam framework penelitian desain didaktis (DDR) yang terdiri dari: 1) studi prospektif, di mana landasan-landasan *transcendental* penyusunan desain didaktis digali melalui studi fenomenologi dan hermeneutik dengan analisis transposisi didaktik, analisis praxeology, analisis didaktik mengenai situasi didaktik dan *learning obstacle* yang dialami siswa, kemudian 2) analisis metapedadidaktik, yaitu saat di mana peneliti sebagai instrumen utama menjalankan perannya juga sebagai fasilitator untuk memahami relasi antara siswa-fasilitator-pengetahuan, dan 3) analisis retrospektif, yaitu saat di mana segala langkah yang dijalankan dilihat kembali baik saat studi prospektif, analisis metapedadidaktik, serta secara keseluruhan untuk pada akhirnya dari desain didaktis hipotesis menghasilkan desain didaktis empirik. Penelitian ini menemukan fenomena-fenomena yang dikaji berdasarkan model referensi dan menghasilkan sebuah desain didaktis yang diimplementasikan di sekolah dasar. Sebagaimana penelitian desain didaktis berjalan pada paradigma interpretif dan kritis, hasil penelitian, diskusi, dan simpulan memberikan beberapa konsekuensi baik teoretis, praksis, maupun secara luas dalam kebijakan pendidikan dan institusi di mana di dalamnya membahas pembelajaran aritmetika pecahan. Selain itu, penelitian ini juga memiliki sasaran untuk dapat berkontribusi baik pada diskursus teoretis hingga ke implikasi praksis.

Kata kunci: Aritmetika pecahan, desain didaktis, *learning obstacle*, pecahan, *praxeology*, transposisi didaktik.

ABSTRACT

Sani Sahara (2217239). Didactical Design Research: Ribbon-Number Line as Means for Systemic-Epistemic Didactic System of Elementary School Fractions Arithmetic.

The discussion surrounding fractions as part of arithmetic has been ongoing for thousands of years, yet publications on the topic continue to emerge annually, particularly focusing on how fractions are transposed into knowledge to be taught in schools. Meanwhile, rationalists argue that the very essence of mathematical reality resides within the human mind, while empiricists contend that all knowledge must stem from the sensory world. Therefore, in this dissertation, the researcher adopts transcendental idealism as a solution for how mathematics should be taught in the classroom. This perspective views every sign or phenomenon as something that must first be processed through reason to become knowledge, with the process of thinking being the most crucial aspect. Given the gaps in the literature and the knowledge present in both established and evolving didactic systems, including the identification of learning obstacles in prospective studies, this research aims to contribute to existing discussions, offering insights into the status quo and the didactic implementation of systemic and epistemic fraction knowledge. To achieve this, the research seeks to produce knowledge in the form of a didactic design underpinned by the characteristics of didactics as an art, science, and body of knowledge. In pursuit of the reality that needs to be understood, the researcher follows a design didactic research framework (DDR), consisting of: 1) a prospective study, where the transcendental foundations of designing didactic models are explored through phenomenological and hermeneutic studies, along with didactic transposition analysis, praxeological analysis, and analysis of the didactic situation and learning obstacles encountered by students; 2) metapedagogical analysis, where the researcher, acting as the primary instrument, also takes on the role of facilitator to understand the relationship between students, facilitators, and knowledge; and 3) retrospective analysis, where all steps undertaken during the prospective study and metapedagogical analysis are revisited to ultimately lead from the hypothesis of didactic design to an empirical didactic design. This research uncovers various phenomena based on a reference model and results in a didactic design implemented at the primary school level. As didactic design research operates within an interpretative and critical paradigm, the research findings, discussions, and conclusions offer several implications, both theoretical and practical, as well as broader consequences for educational policy within the social and institutional contexts where fraction arithmetic knowledge is taught. Furthermore, this research aims to contribute to both the theoretical discourse and its practical implications.

Keywords: Didactic transposition, didactical design, fractions, fractions arithmetic, learning obstacle, praxeology.

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	i
LEMBAR HAK CIPTA.....	ii
HALAMAN PENGESAHAN.....	iii
PERNYATAAN BEBAS PLAGIARISME.....	iv
KATA PENGANTAR	v
ABSTRAK.....	vii
ABSTRACT.....	viii
DAFTAR ISI.....	ix
DAFTAR TABEL.....	xiii
DAFTAR GAMBAR	xiv
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang Penelitian	1
1.2 Tujuan Penelitian	19
1.3 Pertanyaan Penelitian.....	19
1.4 Manfaat Penelitian	20
1.4.1 Manfaat segi teoretis	20
1.4.2 Manfaat segi praksis	21
1.4.3 Manfaat segi <i>policy and governance</i>	21
1.5 Struktur Organisasi Disertasi	21
1.6 Ruang Lingkup/Batasan.....	22
BAB II KAJIAN PUSTAKA.....	23
2.1 Epistemologi dan Didaktik	23
2.1.1 Perkembangan Kajian Epistemologi sebagai Filsafat Pengetahuan.....	23
2.1.2 Perkembangan Didaktik dan Didaktik Matematika	28
2.1.3 Didaktik yang Dimaknai dalam Penelitian Desain Didaktis	30
2.2 Pecahan di dalam Aritmetika	31
2.3 Teori Metapedadidaktik	33
2.4 <i>The Anthropological Theory of the Didactics</i> (ATD).....	38

2.4.1 Transposisi Didaktik.....	38
2.4.2 Relasi Personal dan Relasi Institusional.....	40
2.4.3 <i>Praxeology</i> dan Contoh Penerapannya dalam Sistem Didaktik.	41
2.4.4 <i>Reference Epistemological Model</i>	50
2.5 <i>Theory of Didactical Situations in Mathematics</i> (TDS).....	52
2.5.1 Prinsip-prinsip pada TDS	54
2.5.2 Situasi Adidaktik dan <i>Milieu</i>	56
2.5.3 Situasi Didaktik dan Kontrak Didaktik	58
2.5.4 <i>Error</i> dan <i>Obstacle</i>	60
2.6 <i>Hypothetical Learning Trajectory</i> (HLT).....	63
2.7 <i>Task Design</i> pada Sistem Didaktis Matematika.....	64
2.8 Penelitian Relevan	67
BAB III METODE PENELITIAN	71
3.1 Desain Penelitian	71
3.1.1 Analisis Prospektif	73
3.1.2 Analisis Metapedadidaktik	74
3.1.3 Analisis Retrospektif	75
3.2 Partisipan dan Tempat (Situs) Penelitian	76
3.3 Pengumpulan Data	77
3.4 Analisis Data	81
3.4.1 Pengumpulan Data	81
3.4.2 Reduksi Data	82
3.4.3 Penyajian Data.....	83
3.4.4 Penarikan Simpulan/Verifikasi.....	83
3.5 Standar Validitas dan Evaluasi	84
3.6 Isu Etik	88
BAB IV HASIL PENELITIAN	90
4.1 Hasil Analisis Prospektif.....	90
4.1.1 Analisis Transposisi Didaktik Pengetahuan Matematika di Indonesia	90

4.1.2 Analisis <i>Praxeology</i> Buku Teks	96
4.1.3 Analisis Ekologi Buku Teks	114
4.1.4 Analisis Situasi Didaktis pra-Implementasi	122
4.1.5 Analisis <i>Learning Obstacle</i>	124
4.1.6 Sintesis Reference Epistemological Model	144
4.1.7 Desain Didaktis Hipotetik Aritmetika Pecahan.....	151
4.2 Analisis Metapedadidaktik.....	169
4.2.1 Kontrak Didaktik dan Devolusi.....	170
4.2.2 Analisis Situasi Adidaktis dan Didaktis	176
4.3 Analisis Retrospektif.....	225
4.3.1 Retrospeksi Implementasi Didaktik terhadap Analisis Prospektif.....	226
4.3.2 <i>Learning obstacle</i> Pasca Implementasi Didaktik	229
4.3.3 Desain didaktis empirik.....	231
BAB V PEMBAHASAN	232
5.1 Dialektika hasil analisis fenomena didaktik	232
5.2 Dialektika susunan <i>hypothetical learning trajectory</i> sebagai desain didaktis hipotetik.....	242
5.3 Dialektika hasil analisis situasi didaktik dalam implementasi desain didaktia	245
5.4 Dialektika hasil analisis retrospektif, refleksi, dan evaluasi desain didaktis aritmetika pecahan di sekolah dasar	250
5.5 Dialektika hasil analisis <i>learning obstacles</i> siswa dalam implementasi desain didaktis aritmetika pecahan di sekolah dasar.	254
5.6 Dialektika susunan <i>hypothetical learning trajectory</i> sebagai desain didaktis empirik aritmetika pecahan sekolah dasar.	257
BAB VI SIMPULAN DAN IMPLIKASI	260
6.1. Simpulan	260
6.1.1 Analisis Fenomena Didaktik sebagai Dasar Perancangan Desain Didaktis Aritmetika Pecahan Sekolah Dasar.....	260

6.1.2 Susunan <i>Hypothetical Learning Trajectory</i> sebagai Desain Didaktis Hipotetik Aritmetika Pecahan Sekolah Dasar.....	263
6.1.3 Situasi Didaktik dalam Implementasi Desain Didaktis Aritmetika Pecahan Sekolah Dasar	264
6.1.4 Retrospektif, Refleksi, dan Evaluasi Desain Didaktis Aritmetika Pecahan di Sekolah Dasar	266
6.1.5 <i>Learning Obstacles</i> Siswa dalam Implementasi Desain Didaktis Aritmetika Pecahan di Sekolah Dasar.....	267
6.1.6 Susunan <i>Hypothetical Learning Trajectory</i> (HLT) sebagai Desain Didaktis Empirik Aritmetika Pecahan Sekolah Dasar	269
6.2. Implikasi	270
6.3. Rekomendasi.....	273
DAFTAR PUSTAKA	277
LAMPIRAN.....	298

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. Perspektif terhadap teknologi	47
Tabel 2.2. Contoh task statistika pada lesson study (jugyo kenkyu)	65
Tabel 4.1 Type of task (T) dan banyaknya pada buku teks blok 2 (non-aritmetika)	98
Tabel 4.2 Type of task (T) dan banyaknya pada buku teks blok 2 (aritmetika pecahan)	100
Tabel 4.3 Teknik-teknik yang digunakan untuk menjalankan <i>tasks</i>	102
Tabel 4.4 Teknik, teknologi, dan <i>regional praxeology</i>	111
Tabel 4.5 Teknologi dan teori	112
Tabel 4.6 <i>Task mapping</i> terkait reduksi pada buku teks Indonesia	113
Tabel 4.7 Nilai-nilai di luar sistem didaktik yang terintegrasi	118
Tabel 4.8 Kesalahan yang dialami oleh siswa dalam permasalahan pecahan	125
Tabel 4.9 Unit potongan sebagai penyebut	181
Tabel 4.10 Unit potongan sebagai pembilang	185
Tabel 4.11 Pecahan baru untuk penjumlahan	187
Tabel 4.12 Konjektur yang muncul selama implementasi didaktik	226
Tabel 4.13 <i>Learning obstacle</i> sebelum dan setelah implementasi didaktik	229

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1. Notasi modern pecahan diperkenalkan	1
Gambar 2. Contoh task tentang manipulasi pecahan campuran di buku teks Indonesia	11
Gambar 3. Segitiga didaktis yang dimodifikasi	37
Gambar 4. Transposisi didaktik	39
Gambar 5. Skala level dalam didactic co-determinacy	45
Gambar 6. Posisi peneliti dalam menganalisis transposisi didaktis	51
Gambar 7. Diagram fishbone dan kesenjangan di penelitian relevan	70
Gambar 8. Tahapan penelitian DDR	73
Gambar 9. Bagan analisis metapedadidaktik	74
Gambar 10. Bagan analisis retrospektif	75
Gambar 11. Analisis data kualitatif	81
Gambar 12. Buku teks matematika di sekolah dengan konten pecahan	94
Gambar 13. Jawaban S3 terhadap soal tambahan yang diberikan peneliti	126
Gambar 14. Jawaban S2	126
Gambar 15. Jawaban S7	127
Gambar 16. Jawaban S9	128
Gambar 17. Jawaban S6	132
Gambar 18. Jawaban S12	133
Gambar 19. Jawaban S20	134
Gambar 20. Jawaban S8	136
Gambar 21. Jawaban S16	137
Gambar 22. Jawaban S10	138
Gambar 23. Jawaban S13	139
Gambar 24. Jawaban S15	140
Gambar 25. Jawaban S20	142
Gambar 26. Reference Epistemological Model aritmetika pecahan yang diajukan	144
Gambar 27. Pembukaan dan tujuan umum worksheet Sesi 1	177

Gambar 28. Bantuan untuk unit potongan pita	179
Gambar 29. Siswa menentukan cara membuat potongan sama panjang	179
Gambar 30. Siswa memotong pita secara berkelompok	181
Gambar 31. Formulasi pecahan dalam garis bilangan	183
Gambar 32. Lembar kerja menentukan definisi pecahan	183
Gambar 33. Contoh jawaban siswa terkait pendefinisian pecahan dari pita menuju ke notasi pecahan	184
Gambar 34. Intervensi dilaksanakan dalam institusionalisasi	185
Gambar 35. Contoh momen situasi validasi	187
Gambar 36. Contoh jawaban siswa terkait pengurangan pecahan	188
Gambar 37. Permasalahan pecahan dalam konteks	189
Gambar 38. Hasil pekerjaan siswa pada soal dengan konteks	190
Gambar 39. Hasil pekerjaan siswa pada soal dengan konteks	190
Gambar 40. Pembukaan worksheet Sesi 2	191
Gambar 41. Potongan pita dengan panjang berbeda	192
Gambar 42. Potongan pita dengan panjang berbeda dan tidak saling faktor	193
Gambar 43. Intervensi dilaksanakan dalam institusionalisasi	193
Gambar 44. Contoh jawaban-jawaban kelompok dalam menentukan potongan baru	195
Gambar 45. Jawaban siswa dalam menentukan potongan baru	196
Gambar 46. Penyamaan penyebut dalam presentasi notasi pecahan	196
Gambar 47. Jawaban siswa dalam menentukan penyebut pada kasus notasi pecahan	197
Gambar 48. Pembukaan worksheet Sesi 3	198
Gambar 49. Tugas memasang pecahan bernilai lebih dari 1	199
Gambar 50. Contoh tugas dalam penyajian garis bilangan dua sisi	200
Gambar 51. Kelompok menunjukkan hasil pekerjaannya dan berdiskusi	200
Gambar 52. Tugas manipulasi atau konversi pecahan	202
Gambar 53. Tugas manipulasi atau konversi pecahan	204
Gambar 54. Formulasi pecahan dalam garis bilangan	205
Gambar 55. Formulasi pecahan dalam garis bilangan	206

Gambar 56. Formulasi pecahan dalam garis bilangan	208
Gambar 57. Formulasi pecahan dalam notasi matematika	209
Gambar 58. Contoh konteks dalam perkalian pecahan	210
Gambar 59. Contoh jawaban siswa pada perkalian pecahan dalam konteks	211
Gambar 60. Pembukaan dan tujuan umum worksheet Sesi 5	212
Gambar 61. Intervensi dilaksanakan dalam institusionalisasi	213
Gambar 62. Pembagian sebagai pekalian dengan invers bilangan asli	213
Gambar 63. Contoh jawaban siswa pada pembagian pecahan	214
Gambar 64. Situasi validasi dalam menentukan invers pecahan	215
Gambar 65. Kendala yang dialami dalam pembagian pada konteks	216
Gambar 66. Intervensi didaktik dilaksanakan dalam institusionalisasi	217
Gambar 67. Gambaran siswa berinteraksi dengan milieu dalam proses adaptasi	222

DAFTAR PUSTAKA

- Alcolea-Banegas, J. (2006). Ontological and epistemological problems of mathematics. *Contemporary Perspectives in Philosophy and Methodology of Science*, 233.
- Angrosino, M. V. (2016). *Naturalistic observation*. Routledge.
- Aoki, M. (2024). *Didactic Transposition of Fraction Arithmetic in a Japanese Overseas School: Connecting a Classroom Episode to the Curriculum* (I. Florensa, N. Ruiz-Munzón, K. Markulin, B. Barquero, M. Bosch, & Y. Chevallard (eds.); pp. 625–631). Springer Nature Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-031-55939-6_48
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). APOS Theory. *APOS Theory*, 5–15. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6>
- Artigue, M., & Bosch, M. (2014a). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). In *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249–265). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9>
- Artigue, M., & Bosch, M. (2014b). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. 249–265. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9>
- Artigue, M., Haspekian, M., & Corblin-Lenfant, A. (2014). Introduction to the Theory of Didactical Situations (TDS). In *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249–265). <https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9>
- Audi, R. (2010). *Epistemology: A Contemporary Introduction to the Theory of Knowledge*. Routledge.
- Bachelard, G. (1938). La formation de l'esprit scientifique, Paris. *J. Vrin*.
- Bakker, A. (2018). *Design Research in Education: A Practical Guide for Early Career Researchers*. Taylor & Francis. <https://books.google.co.id/books?id=6jhjDwAAQBAJ>
- Bengtson, E. (2024). *The epistemology of rhetoric: Plato, doxa and post-truth*.

University of Windsor.

- Blum, W., Artigue, M., Maria, ·, Mariotti, A., Sträßer, R., & Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2016). *European Traditions in Didactics of Mathematics ICME-13 Monographs*. <http://www.springer.com/series/15585>
- Bolton, R., Code, A., & Hetherington, S. (2012). Aristotle on knowledge. *Epistemology: The Key Thinkers*, 50–71.
- Bosch, M., Chevallard, Y., García, F. J., & Monaghan, J. (2020). Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education. In *New Perspectives on Research In Mathematics Education – ERME Series*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780429198168>
- Bosch, M., & Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*, 67–83.
- Boyle, A. J. (1973). Plato's Divided Line: Essay I The Problem of Dianoia. *Apeiron*, 7(2), 1–12.
- Braithwaite, D. W., Leib, E. R., Siegler, R. S., & McMullen, J. (2019a). Individual differences in fraction arithmetic learning. *Cognitive Psychology*, 112, 81–98. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2019.04.002>
- Braithwaite, D. W., Leib, E. R., Siegler, R. S., & McMullen, J. (2019b). Individual differences in fraction arithmetic learning. *Cognitive Psychology*, 112(May), 81–98. <https://doi.org/10.1016/j.cogpsych.2019.04.002>
- Braithwaite, D. W., & Siegler, R. S. (2024). A unified model of arithmetic with whole numbers, fractions, and decimals. In *Psychological Review* (Vol. 131, Issue 2, pp. 431–455). American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/rev0000440>
- Breidenstein Jr, J. I. (2023). Pythagoras and Heraclitus. In *Nietzschean, Feminist, and Embodied Perspectives on the Presocratics: Philosophy as Partnership* (pp. 141–189). Springer.
- Brinkmann, S., & Kvale, S. (2018). *Doing interviews*. SAGE.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2002). Theory of Didactical Situations in Mathematics. In *Advances*

- in the Anthropological Theory of the Didactic*. Kluwer Academic Publishers.
https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_4
- Brousseau, G. (2011). *La théorie des situations didactiques en mathématiques* (Issues 5–1). Presses universitaires de Rennes.
- Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations* (Vol. 1). Courier Corporation.
- Čapková, D. (1984). Comenius on Emotional Education. *Paedagogica Historica*, 24(1), 39–50.
- Carnahan, W. H. (1946). History of arithmetic. *School Science and Mathematics*, 46(4), 329–334.
- Carpenter, T. P., Lindquist, M. M., Matthews, W., & Silver, E. A. (1983). Results of the third NAEP mathematics assessment: Secondary school. *The Mathematics Teacher*, 76(9), 652–659.
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Pensée sauvage.
<https://books.google.co.id/books?id=294PAQAAMAAJ>
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 19(2), 221–266.
- Chevallard, Y. (2019). Introducing the Anthropological Theory of the Didactic: an Attempt At a Principled Approach. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 12, 71–114.
- Chevallard, Y., Barquero, B., Bosch, M., Florensa, I., Gascón, J., Nicolás, P., & Ruiz-Munzón, N. (2022). Advances in the Anthropological Theory of the Didactic. In *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic*.
<https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4>
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Kim, S. (2015). What is a theory according to the Anthropological Theory of the Didactic? *CERME 9: Thematic Working Group 17, Theoretical Perspectives and Approaches in Mathematics Education Research*, January, 35–45. <http://www.cerme9.org/>
- Chevallard, Y., & Sensevy, G. (2014). Anthropological Approaches in Mathematics Education, French Perspectives. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 38–

43. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_9
- Clearly, J. J. (1995). Aristotle's Philosophy of Mathematics. In *Aristotle and Mathematics* (pp. 424–494). Brill.
- Comenius, J. A. (1910). *The great didactic*. Рипол Классик.
- Creswell, J. W. (2015). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research*. Pearson.
- Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2016). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches*. Sage publications.
- Davis, P. J., & Hersh, R. (1988). Descartes' dream: the world according to mathematics. In *Pelican books*. Courier Corporation.
- DeWolf, M., Grounds, M. A., Bassok, M., & Holyoak, K. J. (2014). Magnitude comparison with different types of rational numbers. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, 40(1), 71–82. <https://doi.org/10.1037/a0032916>
- Dicker, G. (2002). *Hume's epistemology and metaphysics: an introduction*. Routledge.
- Diputra, K. S. (2023). *Desain Didaktis Konsep Pecahan Berbasis Teori APOS untuk Mengembangkan Argumentasi Matematis Siswa Sekolah Dasar* (Disertasi, Universitas Pendidikan Indonesia)
- Dive, L. L. (2003). *An Epistemic structuralist account of mathematical knowledge*. <http://www.maths.unsw.edu.au/~jim/lisadivethesis.pdf>
- Doorman, M., Kieran, Carolyn, & Ohtani, M. (2018). *Task Design in Mathematics Classrooms*. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55781-5_11
- Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. *The Nature of Mathematics: Its Role and Its Influence*, 39, 39–48.
- Drijvers, P. (2004). Learning Algebra in a Computer Algebra Environment. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 11(3), 77–90.
- Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2005). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 275–282). Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_25

- Duerlinger, J. (1988). The Ontology of Plato's. *The Modern Schoolman*, 65(3), 151–184.
- Dumas, D., McNeish, D., Sarama, J., & Clements, D. (2019). Preschool Mathematics Intervention Can Significantly Improve Student Learning Trajectories Through Elementary School. *AERA Open*, 5(4), 233285841987944. <https://doi.org/10.1177/2332858419879446>
- Feenberg, A. (2003). Modernity theory and technology studies: Reflections on bridging the gap. *Modernity and Technology*, 73.
- Florensa, I., & Bosch, M. (2020). Reference epistemological model: what form and function in school institutions? *Educação Matemática Pesquisa*, 240–249. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p240-249>
- Florensa, I., Bosch, M., & Gascón, J. (2015). The epistemological dimension in didactics: Two problematic issues. *CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 9, 2635–2641.
- Furinghetti, F. (2020). Rethinking history and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51(6), 967–994.
- Gabriel, F., Coché, F., Szucs, D., Carette, V., Rey, B., & Content, A. (2013). A componential view of children's difficulties in learning fractions. *Frontiers in psychology*, 4, 715.
- García, F. J., Pérez, J. G., Higuera, L. R., & Casabó, M. B. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM*, 38, 226–246.
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. el caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación En Matemática Educativa*, 14(2), 203–231.
- Gettier, E. (2016). Is Justified True Belief Knowledge? *Journey into Philosophy: An Introduction with Classic and Contemporary Readings*, 23(6), 69–70. <https://doi.org/10.4324/9781315676784-22>
- González-Martín, A. S., Giraldo, V., & Souto, A. M. (2013). The introduction of real numbers in secondary education: An institutional analysis of textbooks. *Research in Mathematics Education*, 15(3), 230–248.

<https://doi.org/10.1080/14794802.2013.803778>

- Hariyani, M., Herman, T., Suryadi, D., & Prabawanto, S. (2022). Exploration of Student Learning Obstacles in Solving Fraction Problems in Elementary School. *International Journal of Educational Methodology*, 8(3), 505-515.
- Hariyani, M. (2023). *Desain Didaktis Konsep Dasar Pecahan di Sekolah Dasar (Studi Kasus di 2 Sekolah Dasar Negeri Kota Bandung)* (Disertasi, Universitas Pendidikan Indonesia).
- Hesiod, T. A. S. (1932). *Works and days*. Georg Olms Verlag.
- Heuvel-panhuizen, M. Van Den, Drijvers, P., Education, M., Sciences, B., & Goffree, F. (2020). Encyclopedia of Mathematics Education. *Encyclopedia of Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8>
- Hibbs, T. S. (1999). Aquinas, virtue, and recent epistemology. *The Review of Metaphysics*, 573–594.
- Huffman, C. A. (2015). Mathematics in Plato's Republic. *The Frontiers of Ancient Science: Essays in Honor of Heinrich von Staden*, 338, 211.
- Husserl, E. (1999). The essential Husserl: Basic writings in transcendental phenomenology. Indiana University Press.
- Ismawati, I. (2018). *Desain Didaktis Pembelajaran Pecahan untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Siswa Kelas IV* (Disertasi, Universitas Pendidikan Indonesia).
- Job, P., & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM*, 46, 635–646.
- Kansanen, P. (1999). Teaching as teaching-studying-learning interaction. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 43(1), 81–89.
- Kant, I. (1781). Critique of Pure Reason. *Critique of Pure Reason*. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511804649>
- Karpinski, L. (1925). *The history of arithmetic*. Rand McNally.
- Karpinski, L. C. (1965). *The History of Arithmetic* (Issue v. 10). Russell & Russell. <https://books.google.co.id/books?id=714LAQAAIAAJ>

- Kasim, F. F. (2017). *Desain Didaktis Konsep Operasi Hitung Bilangan Pecahan pada Pembelajaran Matematika SMP* (Disertasi, Universitas Pendidikan Indonesia)
- Kossak, R. (2022). Philosophy of Mathematics. *Mathematical Intelligencer*, 44(4), 397–398. <https://doi.org/10.1007/s00283-022-10173-2>
- Langdridge, D. (2007). *Phenomenological psychology: Theory, research and method*. Pearson education.
- Lawless, G. P. (1982). On Understanding Augustine of Hippo. *The Downside Review*, 100(338), 31–46.
- Linnebo, Ø. (2009). *Platonism in the Philosophy of Mathematics*.
- Lortie-Forgues, H., & Siegler, R. S. (2017). Conceptual Knowledge of Fraction Arithmetic. *Journal of Educational Psychology*, 209(3), 374–386.
- Lortie-Forgues, H., Tian, J., & Siegler, R. S. (2015). Why is learning fraction and decimal arithmetic so difficult? *Developmental Review*, 38, 201–221. <https://doi.org/10.1016/j.dr.2015.07.008>
- Lundberg, A. L. V., & Kilhamn, C. (2018). Transposition of Knowledge: Encountering Proportionality in an Algebra Task. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(3), 559–579. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9781-3>
- Mahmud, M. R. (2015). *Desain Didaktis untuk Mengatasi Learning Obstacles Materi Penjumlahan dan Pengurangan Pecahan pada Siswa Kelas IV SD* (Disertasi, Universitas Pendidikan Indonesia).
- Maksimović, J., Osmanović, J., & Simonović, N. (2020). Pansophism and pedagogy in the work of John Amos Comenius from the angle of pedagogy in Serbia. *Siedleckie Zeszyty Komeniologiczne Seria Pedagogika*, 7, 153–173.
- Marshall, C., & Rossman, G. B. (2014). *Designing qualitative research*. Sage publications.
- Martin, W. G., Strutchens, M. E., & Elliott, P. C. (2007). *The learning of mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Maula, S., & Arisetyawan, A. (2022). Desain Didaktis pada Materi Pecahan dan Pengaruhnya terhadap Kemampuan Problem Solving. *Didaktika*, 2(4), 671–678.

- Maviglia, D. (2016). The main principles of modern pedagogy in ‘Didactica Magna’ of John Amos Comenius. *Creative Approaches to Research*, 9(1), 57–67.
- Meyers, R. G. (2014). *Understanding empiricism*. Routledge.
- Mostert, T. M. M., & Hickendorff, M. (2023). Pizzas or no pizzas: An advantage of word problems in fraction arithmetic? *Learning and Instruction*, 86(April), 101775. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2023.101775>
- Newman, L. (1997). *Descartes’ epistemology*.
- Ni, Y., & Zhou, Y.-D. (2005). Teaching and Learning Fraction and Rational Numbers: The Origins and Implications of Whole Number Bias. *Educational Psychologist*, 40(1), 27–52. https://doi.org/10.1207/s15326985ep4001_3
- Nurhasanah, F., Kristanto, M. V., Susanti, V. A., & Rahmadi, I. (2023, December). Games for Learning Fractions: Digital or Physical Games?. In *6th International Conference on Learning Innovation and Quality Education (ICLIQE 2022)* (pp. 227-237). Atlantis Press.
- Orton, J. (2014). *Mathematical reasoning in Plato’s Epistemology*.
- Parikh, R., & Renero, A. (2017). Justified True Belief: Plato, Gettier, and Turing. *Boston Studies in the Philosophy and History of Science*, 324, 93–102. https://doi.org/10.1007/978-3-319-53280-6_4
- Pellegrin, P. (2018). Mathematics and the Physical World in Aristotle. *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, 43, 189–199. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93733-5_9
- Popper, K., & Austin, S. (2012). *The world of Parmenides: essays on the Presocratic enlightenment*. Routledge.
- Pritchard, D. (2013). *What is this thing called knowledge?* Routledge.
- Recorde, R. (1543). *The Grounde of Artes*. <https://books.google.co.id/books?id=i8NJomIVzlgC>
- Rodrigues, L. E. (2012). Epistemology: A Contemporary Introduction to The Theory of Knowledge. *Disputatio*, 4(33), 540–545. <https://doi.org/10.2478/disp-2012-0017>
- Rubin, H. J., & Rubin, I. S. (2011). *Qualitative interviewing: The art of hearing*

data. SAGE.

- Sary, R. M. (2023). *Desain Didaktis untuk Mengatasi Hambatan Belajar pada Pemecahan Masalah Matematis Materi Pecahan di Kelas V Sekolah Dasar* (Disertasi, Universitas Pendidikan Indonesia)
- Schulz, G. (1993). *Veritas est adaequatio intellectus et rei* (Vol. 36). Brill.
- Sharples, R. W. (2014). *Stoics, Epicureans and Sceptics: an introduction to Hellenistic philosophy*. Routledge.
- Simon, J. (1974). Phenomena and noumena: on the use and meaning of the categories. *Kant's Theory of Knowledge: Selected Papers from the Third International Kant Congress*, 45–51.
- Simon, M. A. (1995a). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145.
- Simon, M. A. (1995b). Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114–145. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.26.2.0114>
- Simon, M. A., Kara, M., & Placa, N. (2018). Promoting reinvention of a *Multiplication-of-fractions* algorithm: A study of the Learning Through Activity research program. *Journal of Mathematical Behavior*, 52(March), 174–187. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.007>
- Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018a). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *Journal of Mathematical Behavior*, 52(March), 122–133. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.03.004>
- Simon, M. A., Placa, N., Avitzur, A., & Kara, M. (2018b). Promoting a concept of fraction-as-measure: A study of the Learning Through Activity research program. *The Journal of Mathematical Behavior*, 52, 122–133.
- Şimşek, M., & Yazıcı, N. (2021). Examining the digital learning material preparation competencies of preservice mathematics teachers. *Participatory Educational Research*, 8(3), 323–343. <https://doi.org/10.17275/per.21.68.8.3>
- Skirry, J. (2005). Descartes and the Metaphysics of Human Nature. In *Review of Metaphysics* (Vol. 15). A&C Black. <http://www.amazon.ca/exec/obidos/redirect?tag=citeulike09->

20&path=ASIN/0826486371

- Sloan, A., & Bowe, B. (2014). Phenomenology and hermeneutic phenomenology: the philosophy, the methodologies, and using hermeneutic phenomenology to investigate lecturers' experiences of curriculum design. *Quality & Quantity*, 48(3), 1291–1303. <https://doi.org/10.1007/s11135-013-9835-3>
- Smith, D. E. (1958). *History of Mathematics* (Issue v. 2). Dover Publications. <https://books.google.co.id/books?id=uTytJGnTflkC>
- Sorina, G., & Griftsova, I. (2017). Kant's philosophy of education: A dialogue through centuries. *Espacios*, 38(40), 42–51.
- Spelman, H. (2019). Schools, reading and poetry in the early Greek world. *The Cambridge Classical Journal*, 65, 150–172.
- Suryadi, D. (2013). Didactical design research (DDR) dalam pengembangan pembelajaran matematika. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 1, 3–12.
- Suryadi, D. (2018). Didactical Design Research (DDR) dalam Pengembangan Pembelajaran Matematika. *Prosiding Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika STKIP Siliwangi Bandung*, 27(3), 259–280.
- Suryadi, D. (2019a). Landasan filosofis penelitian desain didaktis (DDR). *Pusat Pengembangan DDR Indonesia*.
- Suryadi, D. (2019b). *Penelitian Desain Didaktis (DDR) dan Implementasinya*. Gapura Press.
- Tall, D., de Lima, R. N., & Healy, L. (2014). Evolving a three-world framework for solving algebraic equations in the light of what a student has met before. *Journal of Mathematical Behavior*, 34, 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.003>
- Trotter, J. (1853). *A complete system of arithmetic*. <https://books.google.co.id/books?id=a0sDAAAAQAAJ>
- Turnbull, G. H. (1993). The educational ideas of Wolfgang Ratke. *Curriculum Studies*, 1(3), 383–394.
- Uzgalis, W. (2001). *John locke*. <https://plato.stanford.edu/entries/locke/>
- Välimaa, J., & Hoffman, D. (2008). Knowledge society discourse and higher

- education. *Higher Education*, 56, 265–285.
- Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human Development*, 52(2), 83–94. <https://doi.org/10.1159/000202727>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.
- Wijaya, A. (2017). The Relationships between Indonesian Fourth Graders' Difficulties in Fractions and the Opportunity to Learn Fractions: A Snapshot of TIMSS Results. *International Journal of Instruction*, 10(4), 221-236.
- Woleński, J. (2004). The history of epistemology. In *Handbook of epistemology* (pp. 3–54). Springer.
- Wu, H. (2002). Chapter 2: Fractions. In *University of California* (pp. 1–124). <http://www.math.berkeley.edu/~wu/>
- Wu, H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the AMS*, 58(3), 34–37. <http://www.ams.org/notices/201103/rtx110300372p.pdf>
- Zakaria, E., I., & Maat, S. M. (2010). Analysis of Students' Error in Learning of Quadratic Equations. *International Education Studies*, 3(3).
- Zilioli, U. (2016). *Protagoras and the challenge of relativism: Plato's subtlest enemy*. Routledge.