BAB III
METODE PENELITIAN

3.1 Jenis dan Sumber Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini ialah data sekunder berupa data harga saham Tesla, Inc (Saham TSLA). Data yang digunakan adalah data harian perdagangan saham dari Juli 2022 sampai dengan Februari 2025. Data tersebut diperoleh dari *website* Yahoo Finance yaitu https://finance.yahoo.com/ yang diakses pada tanggal 5 Maret 2025. Hari efektif perdagangan pada bursa saham adalah lima hari kerja, yaitu Senin sampai dengan Jumat. Dengan demikian, banyaknya pengamatan adalah 667 hari.

3.2 Variabel Penelitian

Variabel penelitian yang digunakan pada penelitian ini merupakan data harga penutupan saham Tesla, Inc (Saham TSLA) dari periode Juli 2022 sampai dengan Februari 2025 yang dilambangkan dengan Z_t. Z_t memiliki artian yaitu data harga penutupan saham TSLA pada waktu ke-t.

3.3 *Hybrid* ARFIMA dan GJR-GARCH

Pemodelan untuk meramalkan harga saham dilakukan menggunakan model *hybrid* ARFIMA dan GJR-GARCH. Pemodelan harga saham dilakukan menggunakan model ARFIMA. Kemudian, residu yang diperoleh dari peramalan dengan menggunakan model ARFIMA dimodelkan menggunakan model volatilitas yaitu GJR-GARCH.

Model ARFIMA(p,d,q)−GJR-GARCH(m,s) didefinisikan oleh:

$$\Phi(B)(1-B)^d Z_t = \Theta(B) a_t \quad (3.1)$$

$$a_t = \sigma_t e_t \quad (3.2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i N_{t-i} a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (3.3)$$

Dengan:

$$N_{t-j} = \begin{cases} 1\,, a_{t-j} < 0 \\ 0\,, a_{t-j} \geq 0 \end{cases}$$

3.3.1 Pemodelan ARFIMA

Dalam pemodelan *mean* digunakan model *Autoregressive Fractional Integrated Moving Average* (ARFIMA). Berikut adalah langkah-langkahnya:

3.3.1.1 Identifikasi Model ARFIMA

Model ARFIMA dipakai dalam memodelkan data runtun waktu yang memiliki karakteristik *long memory*. Apabila data terindikasi *long memory* maka dilakukan *differencing* menggunakan estimasi parameter d. Identifikasi model ARFIMA dilakukan dengan melihat plot FAK dan FAKP data yang telah dilakukan *differencing* (Akbar & Kharisudin, 2019). AR(p) memiliki ciri teoritis yaitu plot FAK turun secara eksponensial mendekati nol dan plot FAKP terputus setelah *lag* ke-p. MA(q) memiliki ciri teoritis yaitu plot FAK terputus setelah *lag* ke-q dan plot FAKP turun secara eksponensial menuju nol (Nabillah, 2019).

3.1.1.2 Estimasi Parameter ARFIMA

Estimasi parameter pada model ARFIMA dapat menggunakan MLE (*Maximum Likelihood Estimation*). Berikut merupakan langkah-langkah estimasi parameter pada model ARFIMA (Lardic & Mignon, 2004; Yau, 2006):

Misalkan $\{Z_t\}$ memenuhi proses:

$$\Phi(B)(1-B)^d Z_t = \Theta(B) a_t \tag{3.4}$$

untuk $-\frac{1}{2} < d < \frac{1}{2}$ dan $a_t \sim \text{i.i.d.}\, N(0, \sigma^2)$.

Dengan asumsi tersebut, proses $\{Z_t\}$ merupakan Gaussian dengan *mean* 0 dan Fungsi Kepadatan Peluang gabungan dari $\boldsymbol{Z} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_N)^T$ adalah

$$f(\boldsymbol{Z}|\boldsymbol{\varphi}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\boldsymbol{Z}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{Z}}{2}\right] \tag{3.5}$$

Dengan $\boldsymbol{\varphi} = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d)$ merupakan vektor parameter dan Σ merupakan matriks kovarians dari $\boldsymbol{Z}$.

Fungsi *likelihood*:

$$L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{2}\right] \tag{3.6}$$

Fungsi log-*likelihood*:

$$\ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})) = \ln\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}} \left(\frac{1}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{\boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{2}\right]\right) \tag{3.7}$$

$$\ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})) = \ln\left(\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{N}{2}}\right) + \ln\left(\left(\frac{1}{|\Sigma|}\right)^{\frac{1}{2}}\right) + \ln\left(\exp\left[-\frac{\boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{2}\right]\right) \tag{3.8}$$

$$\ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})) = \frac{N}{2}\ln\left(\frac{1}{2\pi}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{|\Sigma|}\right) - \left[\frac{\boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{2}\right] \tag{3.9}$$

$$\ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})) = \frac{N}{2}(\ln(1) - \ln(2\pi)) + \frac{1}{2}(\ln(1) - \ln(|\Sigma|)) - \left[\frac{\boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{2}\right] \tag{3.10}$$

$$\ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})) = -\frac{N}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(|\Sigma|) - \frac{1}{2}[\boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}] \tag{3.11}$$

Matriks Σ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{n-1} & \cdots & \gamma_0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Menurut Wei (2006), $\gamma(B)$ dapat dituliskan sebagai:

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k \tag{3.13}$$

$$\gamma(B) = \sigma^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{i-k} B^k \tag{3.14}$$

$$\gamma(B) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_i \psi_j B^{j-i} \tag{3.15}$$

$$\gamma(B) = \sigma^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^{-i} \tag{3.16}$$

$$\gamma(B) = \sigma^2 \psi(B) \psi(B^{-1}) \tag{3.17}$$

Model ARFIMA pada persamaan (3.4) dapat dituliskan dalam bentuk berikut:

$$Z_t = (1-B)^{-d}\left(\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\right) a_t \quad (3.18)$$

$$Z_t = \psi(B) a_t \quad (3.19)$$

Maka diperoleh $\gamma(B)$ untuk model ARFIMA adalah

$$\gamma(B) = \sigma^2\left((1-B)^{-d}\left(\frac{\Theta(B)}{\Phi(B)}\right)\right)\left((1-B^{-1})^{-d}\left(\frac{\Theta(B^{-1})}{\Phi(B^{-1})}\right)\right) \quad (3.20)$$

Dengan demikian, fungsi kepadatan spektral untuk model ARFIMA adalah:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma(e^{-i\omega}) \quad (3.21)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sigma^2\left(\left(1-e^{-i\omega}\right)^{-d}\left(\frac{\Theta\left(e^{-i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{-i\omega}\right)}\right)\right)\left(\left(1-e^{i\omega}\right)^{-d}\left(\frac{\Theta\left(e^{i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{i\omega}\right)}\right)\right) \quad (3.22)$$

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sigma^2\left(\left(1-e^{-(i\omega)}\right)^{-d}\left(\frac{\Theta\left(e^{-i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{-i\omega}\right)}\right)\right)\left(\left(1-e^{-(-i\omega)}\right)^{-d}\left(\frac{\Theta\left(e^{-(-i\omega)}\right)}{\Phi\left(e^{-(-i\omega)}\right)}\right)\right) \quad (3.23)$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\left(1-e^{-(i\omega)}\right)^{-d}\left(\frac{\Theta\left(e^{-i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{-i\omega}\right)}\right)\right|^2 \quad (3.24)$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{\Theta\left(e^{-i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{-i\omega}\right)}\right|^2 \left|1-e^{-(i\omega)}\right|^{-2d} \quad (3.25)$$

Untuk $\omega \in (-\pi, \pi)$ dan $\boldsymbol{\varphi} = (\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d)$.

Dengan γ_k diperoleh melalui:

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)e^{i\omega k}d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sigma^2}{2\pi}\left|\frac{\Theta\left(e^{-i\omega}\right)}{\Phi\left(e^{-i\omega}\right)}\right|^2 \left|1-e^{-(i\omega)}\right|^{-2d} e^{i\omega k}d\omega \quad (3.26)$$

Artinya, Σ bergantung pada parameter $\boldsymbol{\varphi} = \left(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d\right)$.

Selanjutnya, $\ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))$ diturunkan secara parsial terhadap parameter $\boldsymbol{\varphi} = \left(\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q, d\right)$.

1. $\ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))$ diturunkan secara parsial terhadap parameter AR yaitu $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)$.

$$\frac{\partial \ln\left(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})\right)}{\partial \phi_i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial|\Sigma|}{\partial \phi_i}\left(\frac{1}{|\Sigma|}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{\partial \phi_i}\right] \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \ln\left(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})\right)}{\partial \phi_i} = -\frac{1}{2}|\Sigma|\mathrm{tr}\left(\Sigma^{-1}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \phi_i}\right)\right)\left(\frac{1}{|\Sigma|}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{\partial \phi_i}\right] \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \ln\left(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})\right)}{\partial \phi_i} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \phi_i}\right)\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{\partial \phi_i}\right] \tag{3.29}$$

Untuk $i = 1, \dots, p$

2. $\ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))$ diturunkan secara parsial terhadap parameter MA yaitu $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q)$.

$$\frac{\partial \ln\left(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})\right)}{\partial \theta_i} = -\frac{1}{2}\frac{\partial|\Sigma|}{\partial \theta_i}\left(\frac{1}{|\Sigma|}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{\partial \theta_i}\right] \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial \ln\left(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})\right)}{\partial \theta_i} = -\frac{1}{2}|\Sigma|\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_i}\right)\right)\left(\frac{1}{|\Sigma|}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{\partial \theta_i}\right] \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial \ln\left(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})\right)}{\partial \theta_i} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial \theta_i}\right)\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{\partial \theta_i}\right] \tag{3.32}$$

Untuk $i = 1, \dots, q$

3. $\ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))$ diturunkan secara parsial terhadap parameter d.

$$\frac{\partial \ln\left(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})\right)}{\partial d} = -\frac{1}{2}\frac{\partial|\Sigma|}{\partial d}\left(\frac{1}{|\Sigma|}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{\partial d}\right] \tag{3.33}$$

$$\frac{\partial \ln\left(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})\right)}{\partial d} = -\frac{1}{2}|\Sigma|\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial d}\right)\right)\left(\frac{1}{|\Sigma|}\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{\partial d}\right] \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial \ln\left(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z})\right)}{\partial d} = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\Sigma^{-1}\left(\frac{\partial \Sigma}{\partial d}\right)\right) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial \boldsymbol{Z}^T\Sigma^{-1}\boldsymbol{Z}}{\partial d}\right] \tag{3.35}$$

Estimasi parameter diperoleh dengan memaksimalkan fungsi log-*likelihood*, yaitu dengan menyelesaikan persamaan $\frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))}{\partial \phi_i} = 0, \frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))}{\partial \theta_i} = 0,$ dan $\frac{\partial \ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))}{\partial d} = 0$ dengan $\frac{\partial^2 \ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))}{\partial \phi_i^2} < 0, \frac{\partial^2 \ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))}{\partial \theta_i^2} < 0,$ dan $\frac{\partial^2 \ln(L(\boldsymbol{\varphi}|\boldsymbol{Z}))}{\partial d^2} < 0$. Namun, karena kompleksitas perhitungan γ_k dan matriks Σ untuk dimensi yang besar, maka perhitungan dilakukan metode iteratif.

Estimasi parameter dilakukan dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation*. Namun, untuk membantu menguatkan hasil inferensi *Maximum Likelihood* ketika asumsi residu terlanggar dilakukan metode estimasi terhadap variansi-kovariansi parameter model seperti yang ditunjukkan pada persamaan (2.59). Metode tersebut disebut juga sebagai *Quasi Maximum Likelihood Estimation*.

3.3.2 Pemodelan GJR-GARCH

Dalam pemodelan volatilitas digunakan model GJR-GARCH (Glosten, Jagannathan, *and* Runkle *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*). Berikut adalah langkah-langkahnya.

3.3.2.1 Identifikasi Model GJR-GARCH

Model GJR-GARCH dipakai dalam memodelkan volatilitas dengan memperhatikan pengaruh asimetris (*leverage effects*). Dalam kasus heteroskedastisitas belum terdapat kriteria untuk mengidentifikasi model seperti pada identifikasi model Box Jenkins yang menggunakan plot FAK dan FAKP (Darmawan, 2015). Pada penelitian ini digunakan model GJR-GARCH sederhana yaitu GJR-GARCH (1,1), GJR-GARCH (1,2), GJR-GARCH (2,1), dan GJR-GARCH (2,2).

3.3.2.2 Estimasi Parameter GJR-GARCH

Estimasi parameter pada model GJR-GARCH dapat menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Model GJR-GARCH(m,s) didefinisikan sebagai berikut:

$$a_t = \sigma_t e_t \tag{3.36}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i N_{t-i} a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{3.37}$$

Dengan:

$$N_{t-j} = \begin{cases} 1\,, a_{t-j} < 0 \\ 0\,, a_{t-j} \geq 0 \end{cases}$$

Parameter yang diestimasi adalah α_0, α_i, γ_i, dan β_j. Diketahui bahwa a_t berdistribusi normal dengan *mean* nol dan varians σ_t^2 yang selanjutnya dituliskan sebagai $a_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ serta T banyaknya pengamatan. Dengan demikian model GJR-GARCH(m,s) dengan $a_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ memiliki Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) sebagai berikut:

$$f(a_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right] \tag{3.38}$$

Fungsi Kepadatan Peluang gabungan:

$$f\left(a_t \middle| \alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j\right) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right] \quad (3.39)$$

Fungsi *Likelihood*:

$$L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right] \quad (3.40)$$

Fungsi log-*Likelihood* diperoleh dengan melakukan logaritma natural dari fungsi *likelihood* sehingga diperoleh:

$$\ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right)\right) = \ln\left(\prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left[-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right]\right) \quad (3.41)$$

$$\ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right)\right) = \sum_{t=1}^{T} \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} exp\left[-\frac{a_t^2}{2\sigma_t^2}\right]\right) \quad (3.42)$$

$$\ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right)\right)$$

$$= \sum_{t=1}^{T} -\frac{1}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\sigma_t^2) - \frac{a_t^2}{2\sigma_t^2} \quad (3.43)$$

$$\ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right)\right)$$

$$= -\frac{\mathrm{T}}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2} \quad (3.44)$$

Selanjutnya, $\ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right)\right)$ diturunkan secara parsial terhadap parameter α_0, α_i, γ_i, dan β_j.

1. $\ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right)\right)$ diturunkan secara parsial terhadap parameter α_0.

$$\frac{\partial \ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right)\right)}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left(-\frac{\mathrm{T}}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial \ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right)\right)}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right) + \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) \quad (3.46)$$

Untuk bagian $\frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i} a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{t-j}^2\right)\right) \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\left(\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2\right)\right.\right.$$
$$+\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)+\cdots$$
$$\left.\left.+\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)\right)\right) \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2}\right.$$
$$+\frac{1}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2}+\cdots$$
$$\left.+\frac{1}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2}\right) \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)=-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2} \tag{3.50}$$

Untuk bagian $\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2}\right) \tag{3.51}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2}\right.\right.$$
$$+\frac{a_2^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2}+\cdots$$
$$\left.\left.+\frac{a_T^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2}\right)\right) \tag{3.52}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{-a_1^2}{(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2)^2}\right.$$
$$+\frac{-a_2^2}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)^2}+\cdots$$
$$\left.+\frac{-a_T^2}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)^2}\right) \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2\right)^2} \tag{3.54}$$

Untuk memaksimalkan fungsi log-*likelihood* maka

$$\frac{\partial\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j\middle|a_t\right)\right)}{\partial\alpha_0}=\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_0}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=0 \tag{3.55}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2\right)^2}\right)=0 \tag{3.56}$$

$$-\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2}$$
$$+\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-}^2\right.}$$
$$=0 \tag{3.57}$$

$$\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2-\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2\right)}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2\right)^2}=0 \tag{3.58}$$

Dengan $\frac{\partial^2 \ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial\alpha_0^2}<0.$

2. $\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)$ diturunkan secara parsial terhadap parameter α_i.

$$\frac{\partial \ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{\mathrm{T}}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) \tag{3.59}$$

$$\frac{\partial \ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial\alpha_i}=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) \tag{3.60}$$

Untuk bagian $\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2\right)\right) \tag{3.61}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\Bigg(-\frac{1}{2}\Bigg(&\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2\right)\\&+\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)+\cdots\\&+\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)\Bigg)\Bigg)\end{aligned} \tag{3.62}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)=-\frac{1}{2}\Bigg(&\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2\right)}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2}\\&+\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2}+\cdots\\&+\frac{\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2}\Bigg)\end{aligned} \tag{3.63}$$

Untuk bagian $\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2}\right) \tag{3.64}$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\Bigg(-\frac{1}{2}\Bigg(\frac{a_1^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2}$$
$$+\frac{a_2^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2}+\cdots$$
$$+\frac{a_T^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2}\Bigg)\Bigg) \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=\frac{1}{2}\Bigg(\frac{a_1^2\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2\right)}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2\right)^2}$$
$$+\frac{a_2^2\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)^2}+\cdots$$
$$+\frac{a_T^2\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)^2}\Bigg) \quad (3.66)$$

Untuk memaksimalkan fungsi log-*likelihood* maka

$$\frac{\partial \ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial \alpha_i}=\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)+\frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=0 \quad (3.67)$$

Dengan $\frac{\partial^2 \ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial \alpha_i^2}<0.$

Untuk $i=1,\dots,m.$

3. $\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)$ diturunkan secara parsial terhadap parameter γ_i.

$$\frac{\partial \ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial \gamma_i}=\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\left(-\frac{\mathrm{T}}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial \ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial \gamma_i}=\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)+\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) \quad (3.69)$$

Untuk bagian $\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)=\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2\right)\right) \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)=\frac{\partial}{\partial \gamma_i}\Bigg(-\frac{1}{2}\Bigg(\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2\right)$$
$$+\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)+\cdots$$
$$+\ln\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)\Bigg)\Bigg) \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2\right)}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2}\right.$$
$$+\frac{\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2}+\cdots$$
$$\left.+\frac{\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2}\right) \quad (3.72)$$

Untuk bagian $\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i}a_{t-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^2}\right) \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2}\right.\right.$$
$$+\frac{a_2^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2}+\cdots$$
$$\left.\left.+\frac{a_T^2}{\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2}\right)\right) \quad (3.74)$$

$$\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a_1^2\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2\right)}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i}a_{1-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{1-j}^2\right)^2}\right.$$
$$+\frac{a_2^2\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i}a_{2-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{2-j}^2\right)^2}+\cdots$$
$$\left.+\frac{a_T^2\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)}{\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i}a_{T-i}^2+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\sigma_{T-j}^2\right)^2}\right) \quad (3.75)$$

Untuk memaksimalkan fungsi log-*likelihood* maka

$$\frac{\partial\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial\gamma_i}=\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)+\frac{\partial}{\partial\gamma_i}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)=0 \quad (3.76)$$

Dengan $\frac{\partial^2\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial\gamma_i^2}<0.$

Untuk $i=1,\ldots,m.$

4. $\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)$ diturunkan secara parsial terhadap parameter β_j.

$$\frac{\partial\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial\beta_j}=\frac{\partial}{\partial\beta_j}\left(-\frac{\mathrm{T}}{2}\ln(2\pi)-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) \quad (3.77)$$

$$\frac{\partial\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j|a_t\right)\right)}{\partial\beta_j}=\frac{\partial}{\partial\beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)+\frac{\partial}{\partial\beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) \quad (3.78)$$

Untuk bagian $\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right) = \frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i} a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{t-j}^2\right)\right) \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right) = \frac{\partial}{\partial \beta_j}\Bigg(-\frac{1}{2}\Bigg(&\ln\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i} a_{1-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{1-j}^2\right) \\ &+ \ln\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i} a_{2-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{2-j}^2\right) + \cdots \\ &+ \ln\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i} a_{T-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{T-j}^2\right)\Bigg)\Bigg) \quad (3.80)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right) = -\frac{1}{2}\Bigg(&\frac{\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i} a_{1-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{1-j}^2\right)}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i} a_{1-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{1-j}^2} \\ &+ \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i} a_{2-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{2-j}^2\right)}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i} a_{2-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{2-j}^2} + \cdots \\ &+ \frac{\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i} a_{T-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{T-j}^2\right)}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i} a_{T-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{T-j}^2}\Bigg) \quad (3.81)\end{aligned}$$

Untuk bagian $\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)$:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{t-i} a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{t-j}^2}\right) \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) = \frac{\partial}{\partial \beta_j}\Bigg(-\frac{1}{2}\Bigg(&\frac{a_1^2}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i} a_{1-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{1-j}^2} \\ &+ \frac{a_2^2}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i} a_{2-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{2-j}^2} + \cdots \\ &+ \frac{a_T^2}{\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i} a_{T-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{T-j}^2}\Bigg)\Bigg) \quad (3.83)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) = \frac{1}{2}\Bigg(&\frac{a_1^2\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i} a_{1-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{1-j}^2\right)}{\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{1-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{1-i} a_{1-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{1-j}^2\right)^2} \\ &+ \frac{a_2^2\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i} a_{2-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{2-j}^2\right)}{\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{2-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{2-i} a_{2-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{2-j}^2\right)^2} + \cdots \\ &+ \frac{a_T^2\frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i} a_{T-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{T-j}^2\right)}{\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{m}\alpha_i a_{T-i}^2 + \sum_{i=1}^{m}\gamma_i N_{T-i} a_{T-i}^2 + \sum_{j=1}^{s}\beta_j \sigma_{T-j}^2\right)^2}\Bigg) \quad (3.84)\end{aligned}$$

Untuk memaksimalkan fungsi log-*likelihood* maka

$$\frac{\partial \ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j \middle| a_t\right)\right)}{\partial \beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln(\sigma_t^2)\right) + \frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) = 0 \quad (3.85)$$

Dengan $\frac{\partial^2 \ln\left(L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j | a_t\right)\right)}{\partial \beta_j^2} < 0$.

Untuk $j = 1, \dots, s$.

Namun, dalam beberapa aplikasi, lebih tepat apabila e_t diasumsikan mengikuti distribusi *heavy tailed* seperti distribusi *Student-t* (Tsay, 2005). Hal ini dilakukan karena pada umumnya data finansial mengikuti distribusi yang tidak normal yang memiliki karakteristik mendekati normal namun memiliki leptokurtis (Situngkir & Surya, 2004). Keberadaan leptokurtosis tersebut mengindikasikan adanya ekor distribusi yang lebih tebal (*heavy tailed*) dibandingkan dengan distribusi normal (Haas & Pigorsch, 2009). Dengan demikian, dilakukan juga estimasi parameter dengan menggunakan asumsi e_t berdistribusi *Student-t* yang memiliki Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) sebagai berikut (Tsay, 2005):

$$f(e_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{(v-2)\pi}}\left(1 + \frac{e_t^2}{v-2}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}} \quad (3.86)$$

Dimana $v > 2$ dan $\Gamma(x)$ merupakan fungsi gamma, yaitu $\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y} dy$. Dengan menggunakan $a_t = \sigma_t e_t$, diperoleh Fungsi Kepadatan Peluang (FKP) dari a_t sebagai berikut:

$$f(a_t) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{(v-2)\pi}}\frac{1}{\sigma_t}\left(1 + \frac{a_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}}$$

Dengan demikian, Fungsi Kepadatan Peluang gabungan dari a_t (Tsay, 2005):

$$f\left(a_t | \alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j\right) = \prod_{t=1}^{T} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{(v-2)\pi}}\frac{1}{\sigma_t}\left(1 + \frac{a_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}} \quad (3.87)$$

Fungsi *Likelihood*:

$$L\left(\alpha_0, \alpha_i, \gamma_i, \beta_j | a_t\right) = \prod_{t=1}^{T} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{(v-2)\pi}}\frac{1}{\sigma_t}\left(1 + \frac{a_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}} \quad (3.88)$$

Fungsi log-*Likelihood* diperoleh dengan melakukan logaritma natural dari fungsi *likelihood* sehingga diperoleh:

$$\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j\middle|a_t\right)\right) = \ln\left(\prod_{t=1}^{T}\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{(v-2)\pi}}\frac{1}{\sigma_t}\left(1+\frac{a_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}}\right) \quad (3.89)$$

$$\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j\middle|a_t\right)\right) = \sum_{t=1}^{T}\ln\left(\frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\sqrt{(v-2)\pi}}\frac{1}{\sigma_t}\left(1+\frac{a_t^2}{(v-2)\sigma_t^2}\right)^{-\frac{(v+1)}{2}}\right) \quad (3.90)$$

Apabila terdapat *skewness*, dapat digunakan distribusi *Skewed Student-t*. Berikut merupakan Fungsi log-*Likelihood* dari a_t dengan menggunakan distribusi *Skewed Student-t* (Polak & Polak, 2016):

$$\begin{aligned}\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j\middle|a_t\right)\right) = {} & \ln\left[\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\right]-\ln\left[\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right] \\ & -\frac{1}{2}\ln[\pi(v-2)]+\ln\left(\frac{2}{\omega+\frac{1}{\omega}}\right)+\ln(c) \\ & -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[\ln\sigma_t^2+(1+v)\ln\left(1+\frac{ca_t+b}{v-2}\omega^{-I_t}\right)\right] \quad (3.91)\end{aligned}$$

Dengan:

ω : parameter asimetri pada distribusi *Skewed Student-t*

v : derajat kebebasan pada distribusi *Skewed Student-t*

$$I_t = \begin{cases} 1, jika\ e_t \geq -\frac{b}{c} \\ -1, jika\ e_t < -\frac{b}{c} \end{cases}$$

$$b = \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\sqrt{v-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)}\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)$$

$$c = \sqrt{\omega^2+\frac{1}{\omega^2}-1-b^2}$$

Selanjutnya, $\ln\left(L\left(\alpha_0,\alpha_i,\gamma_i,\beta_j\middle|a_t\right)\right)$ diturunkan secara parsial terhadap parameter α_0, α_i, γ_i, dan β_j seperti pada pada persamaan (3.45) sampai dengan (3.85).

Estimasi parameter diperoleh dengan memaksimalkan fungsi *log-likelihood* namun karena kompleksitas perhitungan maka perhitungan dilakukan metode iteratif. Serupa dengan model ARFIMA, dalam model GJR-GARCH estimasi parameter dilakukan dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* namun untuk membantu menguatkan hasil inferensi *Maximum Likelihood* ketika asumsi residu terlanggar, dilakukan metode estimasi terhadap variansi-kovariansi parameter model seperti yang ditunjukkan pada persamaan (2.59).

3.3.3 Metode Iteratif

Metode iteratif yang digunakan dalam menyelesaikan estimasi parameter model ARFIMA adalah L-BFGS-B yang merupakan pengembangan metode BFGS. BFGS merupakan algoritma quasi-Newton paling populer dan dianggap sebagai yang paling efektif diantar semua formula pembaruan quasi-Newton dan L-BFGS merupakan BFGS yang menggunakan informasi kelengkungan hanya dari iterasi terbaru dalam membentuk pendekatan matriks Hessian (Nocedal & Wright, 2006). Sementara L-BFGS-B merupakan perluasan dari L-BFGS yang mampu menangani batasan dalam variabel (Zhu dkk., 1997). Lalu, metode iteratif yang digunakan untuk menyelesaikan estimasi parameter model GJR-GARCH adalah SOLNP yang dikembangkan oleh Ye (1989).

3.4 Langkah Analisis Data

Analisis data dilakukan dengan menggunakan bantuan *software* Python pada Google Colab dan Rstudio. Analisis data tahap pertama dilakukan untuk memperoleh peramalan harga saham dengan menggunakan model *hybrid* ARFIMA dan GJR-GARCH. Langkah-langkah analisis yang akan dilakukan pada peramalan harga saham adalah sebagai berikut:

1. Melakukan pengambilan data melalui Yahoo Finance dan melakukan *split data*. Pembagian data latih dan data uji dilakukan dengan menggunakan perbandingan 90:10, yaitu 90% digunakan sebagai data latih dan 10% digunakan sebagai data uji. Data latih digunakan untuk membuat model

peramalan dan data uji digunakan untuk menguji model peramalan yang telah diperoleh (Pitriyani & Permanasari, 2022).

2. Membentuk plot data untuk melihat pola data yang dianalisis.
3. Menguji stasioneritas data dalam varians dan melakukan transformasi jika data tidak stasioner dalam varians.
4. Menguji stasioneritas data dalam rata-rata menggunakan uji ADF dan melakukan uji Hurst untuk memastikan data bersifat *long memory* secara statistik.
5. Melakukan estimasi nilai d dengan menggunakan MLE.
6. Melakukan *differencing* data dengan menggunakan nilai d yang telah diperoleh.
7. Mengidentifikasi model ARFIMA dengan mengamati plot FAK dan FAKP dari data setelah dilakukan *differencing.*
8. Mengestimasi parameter model ARFIMA dan melakukan pengujian signifikansi parameter model ARFIMA serta memilih model yang signifikan.
9. Melakukan uji diagnostik terhadap residu model ARFIMA.
10. Memilih model ARFIMA terbaik berdasarkan kriteria AIC.
11. Melakukan uji ARCH-LM terhadap residu model ARFIMA untuk mengetahui kehomogenan varians residu.
12. Jika residu bersifat heteroskedastisitas, maka dilanjutkan dengan pemodelan volatilitas menggunakan GARCH.
13. Menguji efek asimetris dengan menggunakan *Sign and Size Bias Test*.
14. Jika terdapat efek asimetris maka residu dimodelkan menggunakan GJR-GARCH.
15. Mengestimasi parameter model GJR-GARCH dan melakukan pengujian signifikansi model GJR-GARCH serta memilih model yang signifikan.
16. Melakukan uji diagnostik terhadap residu model GJR-GARCH.
17. Melakukan uji ARCH-LM terhadap residu model GJR-GARCH untuk mengetahui kehomogenan varians residu.
18. Memilih model GJR-GARCH terbaik berdasarkan kriteria AIC.

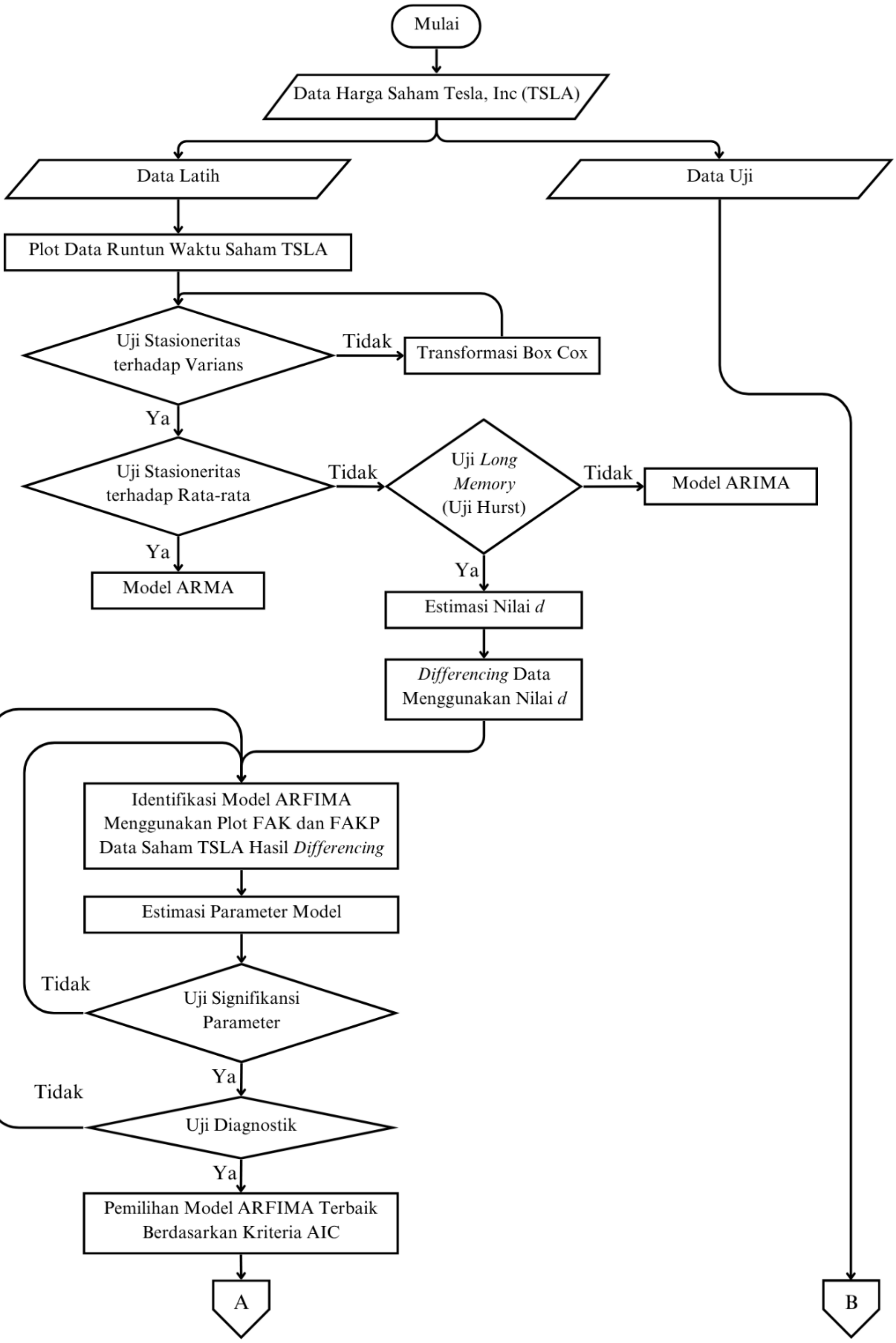
19. Menguji efek asimetris dengan menggunakan *Sign and Size Bias Test* terhadap model GJR-GARCH terbaik untuk memastikan bahwa efek asimetris sudah teratasi.
20. Melakukan evaluasi model peramalan dengan menghitung MAE, MAPE, SMAPE, dan RMSE.
21. Melakukan peramalan harga saham untuk lima periode kedepan menggunakan model *hybrid* ARFIMA−GJR-GARCH terbaik.

Analisis data tahap kedua dilakukan untuk memperoleh perhitungan risiko saham menggunakan *Value at Risk* dengan simulasi Monte Carlo. Langkah-langkah yang dilakukan pada perhitungan risiko saham, yaitu (Seru, 2023):

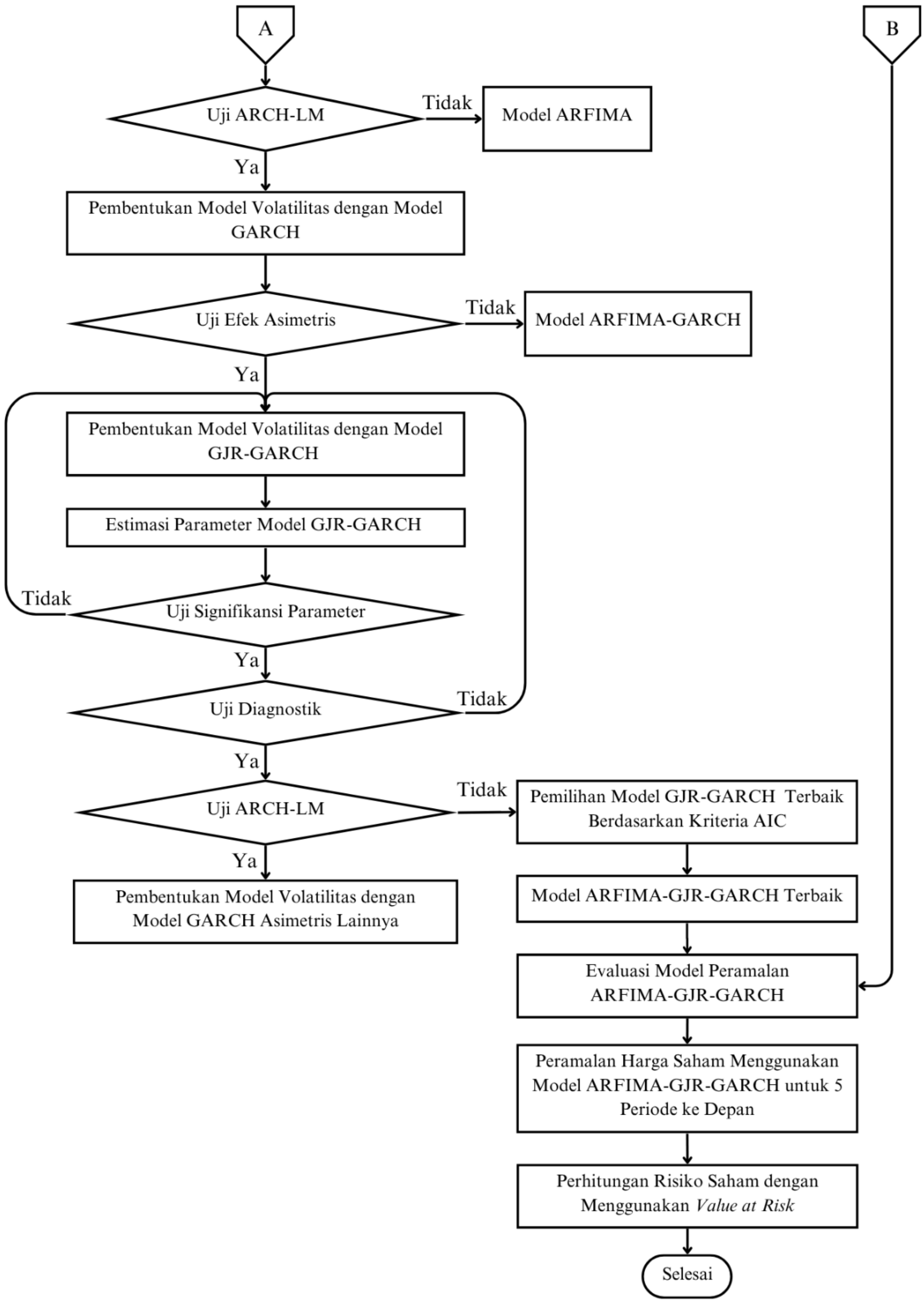
1. Melakukan perhitungan nilai *return* dari data saham.
2. Melakukan pengujian kecocokan distribusi terhadap data *return* saham.
3. Menghitung nilai parameter dari data *return* saham.
4. Melakukan simulasi nilai *return* dengan membangkitkan bilangan secara acak berdasarkan parameter yang telah diperoleh pada langkah 3 sebanyak n bilangan dan diulang sebanyak m kali. Pemilihan jumlah $m > n$ dilakukan supaya memperoleh nilai *Value at Risk* yang lebih akurat (McNeil dkk., 2015).
5. Melakukan perhitungan nilai *Value at Risk* untuk tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$ untuk masing-masing simulasi sehingga diperoleh $VaR_1, VaR_2, \dots, VaR_m$.
6. Melakukan perhitungan rata-rata VaR dari hasil pada langkah 5 guna memperoleh VaR yang akurat untuk tingkat kepercayaan $(1-\alpha)$.

Dalam perhitungan *Value at Risk* dengan menggunakan simulasi Monte Carlo terdapat berbagai jenis algoritma karena dalam simulasi Monte Carlo perlu membangkitkan bilangan secara acak dari suatu distribusi probabilitas. Dengan demikian, pada dasarnya perhitungan *Value at Risk* dengan menggunakan simulasi Monte Carlo adalah melakukan simulasi yang membangkitkan bilangan acak berdasarkan karakteristik dari data yang dibangkitkan dan kemudian digunakan untuk menghitung nilai *Value at Risk* (Lahi dkk., 2023).

3.5 Alur Penelitian



Gambar 3.1 *Flowchart* Alur Penelitian (a)



Gambar 3.2 *Flowchart* Alur Penelitian (b)