

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Pada tahun 2022, Indonesia mulai menerapkan Kurikulum Merdeka sebagai bentuk penyederhanaan dari Kurikulum 2013. Kerangka dasar dan struktur kurikulum yang disusun pemerintah pusat dijadikan pedoman untuk mengembangkan kurikulum operasional di level satuan pendidikan. Tujuan pendidikan nasional adalah “Membangun pelajar Indonesia yang memiliki jiwa Pancasila dan memiliki keterampilan abad ke-21” (Kemdikbudristek, 2021). Kurikulum Merdeka menjadikan Profil Pelajar Pancasila (PPP) sebagai acuan dalam merancang Standar Isi, Standar Proses, dan Standar Penilaian, Struktur Kurikulum, Capaian Pembelajaran (CP), Prinsip Pembelajaran, serta Asesmen. PPP memiliki enam dimensi utama: 1) beriman dan bertakwa kepada Tuhan Yang Maha Esa, serta berakhlak mulia, 2) berkebinekaan global, 3) mandiri, 4) bergotong royong, 5) bernalar kritis, dan 6) kreatif.

Sebagai upaya mewujudkan Profil Pelajar Pancasila dalam proses pendidikan, Kurikulum Merdeka menetapkan sejumlah prinsip pembelajaran yang berorientasi pada perkembangan peserta didik serta relevan dengan tantangan masa kini dan masa depan. Prinsip pembelajaran dalam Kurikulum Merdeka (Kemdikbudristek, 2021), meliputi: 1) Pembelajaran dirancang dengan memperhatikan tahapan perkembangan dan tingkat pencapaian peserta didik sehingga lebih bermakna dan menyenangkan. 2) Proses pembelajaran difokuskan pada pengembangan kemampuan belajar sepanjang hayat. 3) Pembelajaran dirancang untuk mendukung perkembangan kompetensi siswa secara holistik sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila. 4) Pembelajaran disesuaikan dengan konteks lingkungan dan budaya peserta didik, melibatkan peran aktif orang tua dan masyarakat sebagai mitra dalam prosesnya. 5) Pembelajaran juga difokuskan pada masa depan yang berkelanjutan.

Prinsip-prinsip pembelajaran dalam Kurikulum Merdeka tercermin dalam pengorganisasian mata pelajaran, termasuk Matematika tingkat lanjut (SMA), yang dirancang untuk mengembangkan pemahaman konseptual sekaligus keterampilan berpikir kritis dan analitis peserta didik. Karakteristik mata pelajaran Matematika tingkat lanjut pada Kurikulum Merdeka, diorganisasikan dalam lima lingkup elemen konten dan lima elemen proses. Elemen konten terkait dengan pandangan bahwa matematika sebagai materi pembelajaran (*subject matter*) yang harus dipahami peserta didik. Elemen konten dalam mata pelajaran Matematika meliputi bilangan, aljabar, pengukuran, geometri, analisis data dan peluang, dan kalkulus. Sedangkan elemen proses terkait dengan pandangan bahwa matematika sebagai alat konseptual untuk mengkonstruksi dan merekonstruksi materi pembelajaran matematika berupa aktivitas mental yang membentuk alur berpikir dan alur pemahaman yang dapat mengembangkan kecakapan-kecakapan. Elemen proses dalam mata pelajaran Matematika meliputi penalaran dan pembuktian matematis, pemecahan masalah matematis, komunikasi, representasi matematis, dan koneksi matematis (Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan, 2022). Selain dari sudut pandang kurikulum, dalam belajar matematika, siswa perlu memahami hubungan antar-konsep matematika, mampu menganalisis, serta menarik kesimpulan secara logis. Menurut Sumarmo (1987), pembelajaran matematika menuntut siswa untuk mengembangkan sikap kritis, tanggung jawab, dan kebiasaan berpikir sistematis. Perkembangan dari konsep sederhana ke konsep yang lebih kompleks dalam matematika menunjukkan perlunya struktur pembelajaran dengan perkembangan kognitif siswa yang selaras dengan peningkatan kompleksitas materi.

Tahap kognitif berkaitan dengan penalaran logis, erat kaitannya dengan materi aljabar yang membutuhkan kemampuan berpikir formal di tingkat SMA. Penalaran logis memungkinkan siswa untuk menganalisis dan menyelesaikan masalah matematis yang kompleks, merupakan bagian integral dari materi aljabar. Hasil penelitian menunjukkan bahwa siswa yang mampu menggunakan penalaran logis dengan baik dapat lebih efektif dalam menyelesaikan masalah aljabar, karena

mereka dapat mengidentifikasi pola, membuat generalisasi, dan menerapkan strategi pemecahan masalah yang sesuai (Agnes, dkk., 2023; Yusrina, dkk., 2023).

Penjelasan terkait penalaran logis yang berperan penting dalam memahami dan menyelesaikan permasalahan aljabar, pada Kurikulum Merdeka mengintegrasikan aljabar sebagai salah satu elemen konten dalam mata pelajaran Matematika, dengan berbagai subelemen yang mendukung pengembangan berpikir simbolik dan analitis siswa. Aljabar pada Kurikulum Merdeka membahas tentang aljabar nonformal yang menggunakan simbol gambar hingga aljabar formal yang melibatkan simbol huruf yang merepresentasikan bilangan tertentu. Pembahasan mencakup subelemen seperti persamaan dan pertidaksamaan, relasi dan pola bilangan, serta rasio dan proporsi (Kemendikbudristek, 2022). Melalui aljabar, siswa dapat melakukan pemecahan masalah menggunakan simbol atau konsep tertentu. Kriegler (2007) menjelaskan bahwa aljabar merupakan jalan masuk dalam belajar matematika lebih dalam. Aljabar dianggap sebagai salah satu topik yang memiliki peran penting di berbagai negara maju. Freudenthal (1975), menjelaskan bahwa aljabar tidak hanya sebatas pada simbol atau variabel, tetapi juga mencakup 'relasi'. Menurut Yackel (1997), pembelajaran aljabar menekankan pada proses berpikir dan penalaran. NCTM (2010) menyatakan bahwa pembelajaran aljabar sebaiknya difokuskan pada pengembangan keterampilan siswa untuk: (1) memahami pola, relasi, dan fungsi; (2) merepresentasikan serta menganalisis situasi matematis dengan menggunakan simbol dan prosedur aljabar; (3) memanfaatkan model matematika untuk menggambarkan dan memahami hubungan kuantitatif; serta (4) menganalisis perubahan dalam berbagai konteks yang berbeda.

Salah satu konsep kunci dalam aljabar adalah fungsi, yang merepresentasikan hubungan antara dua himpunan dan memungkinkan untuk menganalisis bagaimana satu nilai dipetakan ke nilai lainnya. Dalam pengembangan lebih lanjut, fungsi tidak hanya berdiri sendiri, tetapi juga dapat dikombinasikan atau dibalik melalui operasi fungsi komposisi dan invers. Fungsi komposisi memungkinkan kita menyusun dua fungsi sehingga keluaran dari satu fungsi menjadi masukan bagi fungsi lainnya, sementara fungsi invers berperan dalam mencari fungsi yang

membalikkan efek dari fungsi awal. Pemahaman terhadap kedua konsep ini sangat penting dalam berbagai bidang matematika dan ilmu terapan, karena memberikan wawasan tentang bagaimana proses perubahan dapat dibalik atau dikombinasikan secara sistematis. Hasil penelitian oleh Bagley, dkk., (2015), menekankan pentingnya pemahaman fungsi, komposisi, dan invers dalam konteks aljabar dan transformasi linier. Hasil penelitian tersebut menjelaskan bagaimana fungsi komposisi dan invers berfungsi dalam analisis matematis dan aplikasinya dalam berbagai disiplin ilmu. Selain itu, penelitian oleh Wasserman (2017) juga menunjukkan bagaimana pemahaman tentang fungsi invers dapat membantu dalam memahami struktur grup dalam aljabar, yang menunjukkan relevansi konsep ini dalam konteks yang lebih luas.

Berdasarkan hasil penelitian menunjukkan beberapa temuan kesulitan yang dialami oleh siswa pada materi fungsi komposisi dan invers, sebagai berikut: 1) siswa menghadapi berbagai kesulitan, meliputi pemahaman konsep, keterampilan teknis, dan pemecahan masalah (Pramesti & Ferdianto, 2019). 2) Hambatan epistemologis mencakup kesalahan dalam memahami notasi, rumus, dan prosedur fungsi invers, serta pemahaman definisi fungsi yang tidak lengkap (Rahayu, 2022; Rahmi & Yulianti, 2022). 3) Siswa juga mengalami keterbatasan dalam memahami konteks fungsi invers, seperti operasi aljabar; penentuan domain, kodomain, dan range; pemahaman sifat-sifat fungsi; penggambaran grafik fungsi; serta konsep eksponen dan logaritma (Pratamawati, 2020).

Kesulitan yang dialami siswa dalam memahami fungsi komposisi dan invers menunjukkan perlunya pendekatan yang lebih mendalam dalam pengembangan penalaran matematis. Hjelte, dkk., (2020) mengelompokkan penalaran matematis berdasarkan kontennya, salah satunya adalah *algebraic reasoning*. *Algebraic reasoning* atau penalaran secara aljabar adalah proses para siswa menggeneralisasi ide-ide matematika dari serangkaian contoh spesifik, menetapkan generalisasi tersebut melalui argumentasi, dan mengekspresikannya dengan cara yang semakin formal dan sesuai serta sesuai dengan tahap perkembangan usia mereka (Kaput & Blanton, 2005). Penalaran secara aljabar penting untuk diajarkan kepada siswa.

Alasannya adalah: 1) penalaran secara aljabar menopang semua pemikiran matematika, termasuk aritmetika, yang memungkinkan kita untuk mengeksplorasi struktur matematika. 2) Penalaran secara aljabar termuat dalam pembelajaran matematika sejak SD sampai dengan perguruan tinggi agar ide-ide matematika dasar yang kuat dapat diakses oleh semua siswa. 3) Setiap siswa memiliki kapasitas untuk berpikir aljabar, karena penalaran secara aljabar pada dasarnya adalah cara manusia berinteraksi dengan dunia. 4) Dalam penalaran secara aljabar termuat proses mencari pola, memperhatikan aspek pola yang penting, kemudian menggeneralisasi dari situasi yang biasa ke situasi yang belum dikenal (Blanton & Kaput, 2005; Ontario Ministry of Education, 2014).

Penalaran secara aljabar memiliki peran penting dalam memahami fungsi komposisi dan invers, karena memungkinkan siswa untuk menggeneralisasi hubungan antara fungsi-fungsi, menyusun pola dari berbagai representasi, serta memformalkan konsep yang lebih abstrak. Dalam fungsi komposisi, siswa perlu memahami bagaimana suatu fungsi dapat diterapkan secara berurutan dan bagaimana hubungan antara input serta output terbentuk secara sistematis. Sementara itu, dalam fungsi invers, penalaran secara aljabar membantu siswa mengidentifikasi hubungan timbal balik antara dua fungsi, menyusun langkah-langkah transformasi aljabar, serta memahami konsep domain dan range yang mempengaruhi keberadaan fungsi invers. Hasil penelitian Chrysostomou dan Christou (2019), menemukan bahwa siswa yang dapat menggeneralisasi sifat-sifat fungsi dan hubungan antara fungsi lebih mampu memahami konsep yang lebih kompleks, termasuk dalam materi fungsi komposisi dan invers. Penelitian Kobandaha, dkk., (2019), menemukan bahwa penalaran secara aljabar yang baik memungkinkan siswa untuk menyusun langkah-langkah transformasi aljabar dengan lebih efektif, yang sangat penting dalam memahami fungsi invers. Siswa yang memiliki kemampuan penalaran secara aljabar yang kuat dapat lebih mudah mengidentifikasi hubungan timbal balik antara fungsi dan memahami bagaimana perubahan dalam satu fungsi mempengaruhi fungsi lainnya.

Namun, fakta di lapangan ditemukan kesulitan yang dialami siswa pada penyelesaian tugas penalaran secara aljabar, antara lain: 1) pada proses analisis dan representasi, siswa mengalami kesulitan menyusun permodelan matematika suatu masalah matematis karena mereka mengalami kesulitan memahami informasi yang diberikan (Cahyaningtyas, dkk., 2018). 2) Siswa mempunyai kendala melaksanakan perhitungan berdasarkan aturan atau rumus tertentu, berupa kesulitan dalam mengekspresikan hubungan dan kesulitan dalam operasi aljabar (Damayanti, dkk., 2019; Hackenberg, 2013; Sadikin & Herutomo, 2018). 3) Siswa mengalami loncatan proses berpikir dari pola pikir aritmetika ke aljabar (Herutomo & Saputro, 2014; Rohimah, 2017). 4) Siswa masih belum mampu melakukan generalisasi (Akmal, dkk., 2020; Authary & Nazariah, 2019; Pearn, dkk., 2019; Razi, dkk., 2019). Beberapa contoh konkret kesulitan siswa diberikan sebagai berikut.

“Umur Anggi 30 tahun lebih muda dari umur ayahnya. Lima Tahun kemudian, jumlah umur keduanya adalah 46 tahun. Berapa umur ayah dan Anggi sekarang?”(Rohimah, 2017).

$$\begin{array}{l} 46 - 30 = 16 = 8 \text{ tahun} - 5 = 3 \text{ tahun} \\ \hline \text{Ayah} = 8 + 30 = 38 \text{ tahun} - 5 = 33 \text{ tahun} \end{array}$$

Gambar 1.1 Jawaban Siswa pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (Rohimah, 2017)

Pada Gambar 1.1, terlihat bahwa siswa hanya menguraikan cerita dalam penalaran aritmatikanya, belum direpresentasikan dalam bentuk aljabar (Rohimah, 2017). Permasalahan lain, siswa memahami bahwa terdapat hubungan antara usia ayah dan anak. Langkah pertama menunjukkan bahwa siswa mencoba menggunakan hubungan matematika untuk menentukan usia anak terlebih dahulu. Siswa menggunakan operasi dasar aljabar untuk menyelesaikan soal. Operasi awal $46 - 30 = 16$ benar, kemudian membagi 16 dengan 2 dan menghasilkan 8, dilanjutkan dengan 8 dikurangi 5 menghasilkan 3. Hal ini melanggar prinsip kesetaraan. Begitu

juga dengan baris kedua. Kesalahan ini menunjukkan bahwa siswa memahami beberapa aspek relasi (hubungan antara usia ayah dan anak), tetapi belum sepenuhnya memahami bagaimana prinsip-prinsip aljabar, seperti kesetaraan dan variabel dalam penyelesaian soal. Kesulitan lain ditunjukkan pada soal berikut.

“Dila ingin membeli spidol berwarna merah dan spidol berwarna biru. Spidol merah dan biru terdapat dalam kotak dengan isi yang berbeda-beda. Perhatikan kotak-kotak berikut. Kotak ke-1 berisi 2 spidol merah dan 4 spidol biru. Kotak ke-2 berisi 3 spidol merah dan 8 spidol biru. Selanjutnya, kotak ke-3 berisi 4 spidol merah dan 12 spidol biru. Jika kotak pertama harganya Rp. 8.000,00 dan kotak kedua harganya Rp.15.000,00. Berapa rupiahkah yang harus dibayar Dila jika dia membeli kotak ke-6?” (Authary & Nazariah, 2019)

2). Dik: Kotak pertama harganya Rp. 8.000,00
Kotak kedua harganya Rp. 15.000,00

Dit: Berapa harga yang harus dibayar jika membeli kotak ke-6?

Jwb = Harga kotak 1 = 8.000,00
 sp_1 -merah = 1.000 / 1 \times 2 = 2.000
 sp_1 -biru = 1.500 / 1 \times 4 = $\frac{6.000}{8.000}$ +

Harga kotak 2 = 15.000
 sp_1 -merah = 1.000 / 1 \times 3 = 3.000
 sp_1 -biru = 1.500 / 1 \times 8 = $\frac{12.000}{15.000}$ +

Harga kotak ke 6 =
 sp_1 -merah = 1.000 / 1 \times 7 = 7.000
 sp_1 -biru = 1.500 / 1 \times 24 = $\frac{36.000}{43.000}$ +

Gambar 1.2 Jawaban Siswa pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel (Authary & Nazariah, 2019)

Berdasarkan jawaban siswa pada Gambar 1.2, subjek belum dapat melakukan aktivitas penalaran secara aljabar dalam penyelesaian masalah yang diberikan. Meskipun subjek dapat menyelesaikan soal dengan benar, aktivitas penalaran secara aljabar dalam merepresentasikan masalah dalam bentuk aljabar belum tampak (Authary & Nazariah, 2019).

Kondisi lain, siswa diberikan soal, selesaikan $\frac{3(x-1)^2}{4} + \frac{2(x+1)^2}{2} = (x-3)$, hasil jawaban siswa sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 & -3(a-1)^2 + 4(b+1)^2 = (a-3) \\
 & \frac{-3(a-1)^2 + 4(b+1)^2}{4} = \frac{(a-3)}{4} \\
 & 7a^2 + 1 = 4a - 12 \\
 & 7a^2 - 4a + 13 = 0
 \end{aligned}$$

Gambar 1.3 Jawaban Siswa pada Materi Persamaan Kuadrat (Damayanti, dkk., 2019)

Gambar 1.3, menunjukkan bahwa siswa mengalami kesulitan pada operasi aljabar. Siswa langsung menuliskan penyebut dengan 4 tanpa ada penjelasan. Pada akhirnya, siswa tidak memperoleh penyelesaian (Damayanti, dkk., 2019). Siswa menggunakan penyebut yang sama, yaitu 4, di beberapa bagian ekspresi aljabar, seperti pada $\frac{3(x-1)^2}{4} + \frac{4(x+1)^2}{4}$. Hal ini menunjukkan bahwa siswa memahami konsep umum tentang menyatukan penyebut untuk operasi pecahan aljabar yang melibatkan ekspresi dengan bentuk yang serupa. Meskipun penyebutnya sudah sama, siswa tampaknya mengalami kesalahan dalam proses pengurangan. Dalam operasi pengurangan pecahan aljabar, siswa seharusnya mengurangkan pembilang secara langsung sementara penyebut tetap. Akan tetapi, hasil yang dituliskan menunjukkan kurangnya keterampilan dalam menyederhanakan pembilang yang mengandung ekspresi aljabar.

Hasil studi pendahuluan yang dilakukan oleh peneliti (Fitrianna, dkk., 2023) menunjukkan bahwa siswa yang berada pada tahap konkret dapat melakukan permodelan aljabar dan fungsional serta melakukan operasi pada variabel (berupa substitusi, pembatalan, dan lainnya). Adapun siswa yang berada pada tahap formal, dapat menggunakan parameter pada fungsi. Berikut soal yang diberikan.

Diberikan sebuah fungsi $f(x)$, dengan $f(x) = \begin{cases} 3x - p, & x \leq 2 \\ 2x + 1, & x > 2 \end{cases}$.

- Apakah informasi tersebut cukup untuk $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ memiliki nilai?
- Variabel apa yang harus diketahui untuk menentukan $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?
Tentukan nilai dari variabel tersebut!
- Tentukan $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$!

$f(x) = \begin{cases} 3x-p, & x \leq 2 \\ 2x+1, & x > 2 \end{cases}$
 $f(2) = 3(2) - p$
 $f(2) = 6 - p$
 a. Tidak cukup (Not enough)
 b. Variabel p
 $f(0) = 3(0) - p$
 $f(0) = -p$
 $f(1) = 3(1) - p$
 $f(1) = 3 - p$
 $f(2) = 6 - p$
 $f(2) - f(0) = 3$
 $f(1) = 3 - p$
 $f(2) - f(1) = 3$
 $f(2) = 3 + f(1)$
 $f(2) = 3 + (3 - p)$
 $f(2) = 6 - p$
 $3 + 3 - p = 6 - p$
 $6 - p = 6 - p$
 $p = 2$
 $f(2) = 6 - p$
 $f(2) = 6 - 2$
 $f(2) = 4$

Gambar 1.4 Proses Penalaran Secara Aljabar Siswa pada Tahap Konkret (Fitrianna, dkk., 2023)

Pada Gambar 1.4, subjek pada tahap konkret mampu memahami soal. Namun, dalam memunculkan bentuk matematis yang berkaitan dengan pemecahan masalah belum sesuai dengan yang diharapkan. Subjek belum mampu melakukan generalisasi dengan memunculkan bentuk matematis untuk menyelesaikan masalah. Jawaban yang diberikan untuk menyelesaikan soal tidak benar, pada saat operasi hitung pecahan.

Laju pertumbuhan penduduk tahunan dirumuskan sebagai

$$p(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}t^2\right) - 3t + 5} \text{ dengan } p(t) \text{ dalam persen dan } t \text{ dalam tahun.}$$

- Apakah informasi ini cukup untuk menentukan pertumbuhan penduduk?
- Bagaimana bentuk matematika untuk menentukan pertumbuhan penduduk pada tahun pertama hingga kelima?
- Tentukan pertumbuhan penduduk mendekati tahun kelima!

A. Jawab

B. $p(t) = \sqrt{\frac{t^2 - 3t + 5}{2}}$

Jawab

$$\lim_{t \rightarrow 5} p(t) = \left(\lim_{t \rightarrow 5} \sqrt{\frac{t^2 - 3t + 5}{2}} \right) t \rightarrow 5$$

Substitusikan $t = 5$

$$= \sqrt{\frac{5^2 - 3 \cdot 5 + 5}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{25 - 15 + 5}{2}} = \sqrt{\frac{25 - 10}{2}} = \sqrt{\frac{25 - 20}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{2.5} = 1.587$$

C. Maka pertumbuhan penduduk mencapai 2,5% saat tahun ke 5.

Gambar 1. 5 Proses Penalaran secara aljabar Siswa pada Tahap Formal (Fitrianna, dkk., 2023)

Gambar 1. 5, subjek pada tahap operasi formal mampu memahami masalah dengan baik. Siswa pun dapat memunculkan generalisasi dalam bentuk matematis untuk menyelesaikan masalah. Namun dalam menyelesaikan masalah, siswa terlihat masih melakukan prosedur secara rutin dan menyebabkan kesalahan.

Temuan bahwa siswa mengalami kesulitan dalam menyelesaikan tugas-tugas pada kemampuan penalaran secara aljabar serta kesulitan siswa pada materi fungsi komposisi dan invers, menggambarkan bahwa kemampuan penalaran secara aljabar tergolong tugas yang sulit. Untuk menyelesaikannya memerlukan dukungan aspek afektif yang kuat, di antaranya tekun, mau bekerja keras, tangguh, dan tidak mudah putus asa. Sikap tersebut mengilustrasikan sikap afektif yang dinamakan dengan resiliensi. Hendriana, dkk., (2017) menyatakan bahwa resiliensi matematis adalah kemampuan untuk bangkit dari kondisi matematis yang tidak menyenangkan. Selain itu, penulis lain (Kookan, dkk., 2016; Lee & Johnston-Wilder, 2017) mendefinisikan resiliensi matematis adalah derajat ketekunan dan sikap keras, seperti: yakin bahwa ia akan berhasil jika bekerja keras, menunjukkan sikap tegar dalam menghadapi kesulitan belajar, tidak mudah putus asa, keinginan kuat untuk menyelesaikan, berdiskusi, merenungkan, dan menyelidiki. Siswa yang memiliki sikap resiliensi matematis dikatakan berhasil dengan terlibat, termotivasi, dan memegang keyakinan yang kuat dalam diri mereka sendiri. Di banyak negara,

motivasi, kepercayaan diri, dan disposisi siswa terhadap pembelajaran matematika ditemukan berhubungan positif/baik dengan kinerja matematika. Selain itu, sebagian besar guru Matematika di negara-negara OECD percaya bahwa perkembangan sosial dan emosional siswa sama pentingnya dengan perolehan keterampilan matematika (Lee & Johnston-Wilder, 2017).

Resiliensi matematis sangat dibutuhkan dalam belajar matematika karena karakteristik mata pelajaran Matematika dan kesan bahwa Matematika adalah mata pelajaran yang sangat sulit bagi kebanyakan anak. Beberapa hasil penelitian terkait dengan indikator resiliensi matematis pada siswa SMA ditemukan bahwa siswa masih mempunyai sikap negatif, misalnya kurang percaya diri dalam keberhasilannya melalui usaha keras pada saat guru mengajukan pertanyaan kepada siswa dalam kegiatan konfirmasi dan menjelaskan jawaban kepada teman-temannya di kelas, mereka pun merasa malu dan khawatir jika mengalami kegagalan (Fitri, dkk., 2020). Pada indikator pembelajaran matematika yang berharga, bermakna, berguna, dan bermanfaat bagi kehidupan siswa, memperoleh persentase 52,4% dan berada dalam kategori sedang (Harsela & Asih, 2020). Pada mahasiswa, secara umum resiliensi matematis masih tergolong rendah. Dalam hal pengendalian diri dan menghadapi masalah dalam pembelajaran matematika masih tergolong lemah (Ariyanto, dkk., 2017).

Uraian terkait prinsip pembelajaran dalam Kurikulum Merdeka, materi fungsi komposisi dan invers, penalaran secara aljabar serta resiliensi matematis, menunjukkan bahwa pembelajaran harus menjadi lebih bermakna untuk peserta didik. Pada prinsip pembelajaran dalam Kurikulum Merdeka, guru perlu mengetahui lebih dulu tahap perkembangan dan tingkat pencapaian pengetahuan, karakteristik, dan kebutuhan belajar siswa. Berkenaan dengan tahap perkembangan kognitif, Inhelder dan Piaget (1958) melakukan pengamatan terhadap sejumlah anak dari berbagai kelompok umur. Berdasarkan hasil analisis terhadap cara berpikir siswa, kemudian Inhelder dan Piaget mengklasifikasikan perkembangan struktur berpikir anak ke dalam empat tahap utama perkembangan kognitif, yaitu: 1) sensorimotor (0-2 tahun), 2) praoperasional (2-7 tahun), 3) operasional konkret

(7–12 tahun), dan 4) operasional formal (13-14 tahun atau 14-15 tahun). Temuan Inhelder dan Piaget dikuatkan dengan penelitian Sumarmo (1987), yang menyatakan bahwa perkembangan kognitif anak di Indonesia meningkat mulai dari kelas III SMP sampai dengan III SMA. Namun, selain faktor usia, perkembangan kognitif anak di Indonesia dipengaruhi oleh kematangan, keseimbangan, sosialisasi, transmisi pendidikan, serta faktor kultural dari anak tersebut (Sumarmo (1987)).

Beberapa studi berkenaan dengan tahap kognitif (Fitrianna, dkk., 2023; Gunawan, dkk., 2019; Rohaeti, dkk., 2019; Romdon, dkk., 2018; Sukarna, dkk., 2020) menemukan bahwa siswa SMA dengan usia rata-rata 17,55 tahun, baru antara 23,3%–45% siswa yang mencapai tahap operasi formal. Pada dasarnya, temuan tersebut berbeda dengan hipotesis pertama Piaget yang mengemukakan bahwa siswa berumur (13-14 tahun atau 14-15 tahun) sudah mencapai tahap operasi formal. Namun, temuan tersebut tidak bertentangan dengan teori Piaget, karena ditemukan juga bahwa siswa pada tahap operasi formal mencapai kemampuan matematik yang lebih tinggi dari kemampuan siswa pada tahap konkrit. Temuan tersebut juga menunjukkan bahwa pencapaian tahap operasi formal bukan didasarkan atas usia biologis, melainkan lebih ditentukan oleh kematangan tingkat berpikir siswa. Masih terkait dengan beberapa penelitian tentang tahap kognitif (Gunawan, Prawoto, & Sumarmo, 2019; Rohaeti, Hindun, & Fitriani, 2019; Romdon, Puspowati, & Sumarmo, 2018; Sukarna, Sumarmo, & Kurniawan, 2020), diperoleh hasil bahwa pada tahap formal, siswa lebih banyak mencapai ketuntasan belajar dengan ditunjukkan pada persentase capaian pembelajaran yang lebih tinggi dari tahap konkret dan transisi.

Pengetahuan guru tentang kondisi awal, perkembangan kognitif anak, dan tingkat pencapaian belajar siswa dalam konten matematika tertentu memberi informasi berharga bagi guru dalam memilih pendekatan pembelajaran yang relevan dan cara guru mengawali pembelajaran dalam konten matematika baru. Uraian di atas pada dasarnya sesuai dengan hakikat matematika sebagai ilmu yang terstruktur. Oleh karena itu, pembelajarannya diawali dengan konten prasyarat dari

konten matematika baru yang akan diajarkan. Demikian pula penguasaan awal siswa dalam konten matematika tertentu melukiskan informasi kesulitan belajar ketika akan mempelajari suatu konten matematika tertentu. Brousseau (2002), menjelaskan bahwa kesulitan belajar siswa tidak hanya akibat dari ketidaktahuan siswa, tetapi juga bisa jadi akibat dari pengetahuan yang sebelumnya sudah didapat oleh siswa, yang tidak dapat disesuaikan dengan pengetahuan baru. Kesulitan seperti ini tidak menentu dan tidak terduga yang disebut sebagai hambatan belajar (*learning obstacle*). Interaksi yang terjadi antara siswa dan guru serta siswa dengan materi, berpotensi muncul tiga jenis hambatan belajar, yaitu hambatan siswa dalam memahami konsep (*epistemological obstacle*), hambatan dalam penyajian konsep (*didactical obstacle*), dan hambatan penyajian materi yang tidak sesuai dengan level berpikirnya (*ontogenic obstacle*). Dari hambatan belajar yang dialami oleh siswa, dibutuhkan sebuah situasi didaktis yang dapat mendukung tujuan pembelajaran yang diharapkan. Situasi didaktis yang dimaksud merujuk pada pendekatan pembelajaran yang dirancang untuk membantu siswa mengatasi hambatan belajar dan mencapai tujuan pembelajaran yang diharapkan. Konsep ini mengacu pada teori situasi didaktis Brousseau.

Dalam teori situasi didaktis yang dikembangkan oleh Brousseau (2002), identifikasi *learning obstacle* atau hambatan belajar menjadi pondasi utama dalam merancang desain didaktis yang efektif dan relevan. Hambatan belajar dianggap sebagai bagian alami dari proses pembelajaran, yang memungkinkan guru memahami kesulitan yang dihadapi siswa ketika berinteraksi dengan konsep matematika tertentu. Dengan mengidentifikasi hambatan tersebut, guru dapat menciptakan situasi didaktis yang mendukung proses *devolution* (penyerahan masalah kepada siswa) dan *adidactical situation* (situasi pembelajaran di mana siswa secara aktif membangun pengetahuannya sendiri tanpa intervensi langsung dari guru). Proses ini penting karena hambatan belajar memberikan gambaran tentang apa yang harus diatasi untuk mencapai pemahaman konseptual. Pendekatan ini memungkinkan siswa untuk melalui proses aksi, formulasi, validasi, dan institusionalisasi pengetahuan, yang sesuai dengan prinsip-prinsip teori situasi

didaktis (Brousseau, 2002). Situasi aksi merujuk pada kondisi di mana siswa perlu membangun pemahamannya sendiri terhadap permasalahan yang diberikan. Sedangkan situasi formulasi merupakan tahap di mana siswa merancang strategi untuk menyelesaikan masalah yang telah mereka identifikasi. Pada situasi validasi, guru turut mengonfirmasi pemahaman serta strategi yang dikembangkan oleh siswa secara kolaboratif. Dalam tahap ini, guru berperan dalam membimbing dan menyempurnakan strategi yang telah disusun siswa dengan memberikan penjelasan serta konsep teoretis yang relevan. Situasi institusionalisasi terjadi ketika siswa mengalami transformasi pengetahuan dari yang sebelumnya mereka miliki menjadi pemahaman baru setelah mendapatkan arahan dan bimbingan dari guru. Pada tahap ini, siswa diberikan kesempatan untuk menerapkan pengetahuan yang telah diperoleh dalam menyelesaikan berbagai permasalahan matematika lainnya (Suryadi, dkk., 2016).

Pentingnya identifikasi hambatan belajar dalam teori situasi didaktis, pada penelitian lebih lanjut diperlukan untuk mengeksplorasi bagaimana tahap kognitif, penalaran secara aljabar, dan resiliensi matematis berperan dalam proses pembelajaran matematika. Beberapa penelitian terdahulu terkait tahap kognitif, penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis, antara lain: 1) menilai dampak penggunaan pendekatan pembelajaran tertentu dalam meningkatkan kemampuan matematis siswa sesuai dengan tahap kognitif mereka (Maesaroh, dkk., 2020; Rohaeti, dkk., 2019; Romsih, dkk., 2019; Sukarna, dkk., 2020); 2) mengklasifikasikan siswa SMA ke dalam sublevel perkembangan kognitif menggunakan *Test of Logical Operations* (TLO) (Anwar & Santosa, 2013); 3) melihat hubungan antara kemampuan matematis dan afektif ditinjau dari tahap perkembangan kognitif siswa (Rohaeti, Hindun, dkk., 2019; Romdon, dkk., 2018); 4) memperkenalkan penalaran secara aljabar untuk dikembangkan di kelas bagi guru dan calon guru melalui implementasi pendekatan pembelajaran (Kramarski, 2008; Nathan & Koedinger, 2000; Store, dkk., 2010); 5) memiliki proses penalaran secara aljabar yang berbeda ditinjau dari kecemasan matematis, gaya belajar, jenis kelamin, gaya kognitif, dan berdasarkan intelegensi (Ayuningtyas, dkk., 2019;

Chrysostomou, dkk., 2013; Hackenberg, 2013; Indraswari, dkk., 2018; Kobandaha, dkk., 2019; Lepak, dkk., 2018; Rudin & Budiarto, 2019); 6) meningkatkan penalaran secara aljabar siswa dengan menggunakan media pembelajaran (Lee, dkk., 2018; Otten, dkk., 2019, 2020); 7) terdapat hubungan positif antara resiliensi matematis dan kemampuan matematis (Cahyani, dkk., 2018; Pratiwi, dkk., 2018); 8) siswa yang memperoleh pembelajaran inovatif berbeda, mencapai mutu resiliensi matematis yang tergolong cukup baik (Ariyanto, dkk., 2017; Hendriana, dkk., 2019).

Hasil penelitian yang telah diuraikan terkait kemampuan penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis, serta tahap kognitif siswa, belum ada yang mengkaji implementasi desain didaktis yang dirancang dengan memperhatikan hambatan belajar (*learning obstacle*). Penelitian-penelitian tersebut juga belum menyoroti desain yang mempertimbangkan materi fungsi komposisi dan invers serta memperhatikan tahap kognitif.

1.2. Pertanyaan Penelitian

Berdasarkan latar belakang di atas, maka pertanyaan penelitian adalah:

- 1.2.1. Bagaimana profil tahap kognitif siswa yang diukur dengan menggunakan *Test of Logical Thinking* (TOLT)?
- 1.2.2. Apa saja hambatan belajar siswa dalam menyelesaikan tugas kemampuan penalaran secara aljabar siswa pada materi fungsi komposisi dan invers ditinjau dari tahap perkembangan kognitif siswa?
- 1.2.3. Bagaimana karakter resiliensi matematis siswa ditinjau dari tahap perkembangan kognitif siswa?
- 1.2.4. Bagaimana desain didaktis materi fungsi komposisi dan invers berdasarkan tahap kognitif siswa terkait kemampuan penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis siswa?
- 1.2.5. Bagaimana kemampuan penalaran secara aljabar siswa berdasarkan tahap kognitif siswa setelah implementasi desain didaktis materi fungsi komposisi dan invers?

- 1.2.6. Bagaimana karakter resiliensi matematis siswa berdasarkan tahap kognitif siswa setelah implementasi desain didaktis materi fungsi komposisi dan invers?
- 1.2.7. Bagaimana desain didaktis empiris materi fungsi komposisi dan invers berdasarkan tahap kognitif siswa terkait kemampuan penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis siswa?

1.3. Tujuan Penelitian

Berdasarkan pertanyaan penelitian yang telah diuraikan, penelitian ini memiliki tujuan umum untuk mendeskripsikan secara komprehensif kemampuan penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis siswa melalui implementasi desain didaktis materi fungsi komposisi dan invers berdasarkan tahap kognitif. Sedangkan tujuan khusus dalam penelitian ini, untuk mendeskripsikan:

- 1.3.1 Profil tahap kognitif siswa yang diukur dengan menggunakan *Test of Logical Thinking* (TOLT).
- 1.3.2 Hambatan belajar siswa dalam menyelesaikan tugas kemampuan penalaran secara aljabar siswa pada materi fungsi komposisi dan invers ditinjau dari tahap perkembangan kognitif siswa.
- 1.3.3 Karakter resiliensi matematis siswa ditinjau dari tahap perkembangan kognitif siswa.
- 1.3.4 Desain didaktis materi fungsi komposisi dan invers berdasarkan tahap kognitif siswa terkait kemampuan penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis siswa.
- 1.3.5 Kemampuan penalaran secara aljabar siswa berdasarkan tahap kognitif siswa dengan menggunakan desain didaktis materi fungsi komposisi dan invers.
- 1.3.6 Karakter resiliensi matematis siswa berdasarkan tahap kognitif siswa dengan menggunakan desain didaktis materi fungsi komposisi dan invers.
- 1.3.7 Desain didaktis empiris materi fungsi komposisi dan invers berdasarkan tahap kognitif siswa terkait kemampuan penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis siswa.

1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi praktis dalam upaya perbaikan pembelajaran matematika secara umum dapat bermanfaat bagi:

- 1.4.1 Guru, penelitian ini diharapkan dapat digunakan sebagai dasar untuk mengembangkan materi pembelajaran, model, dan pendekatan pembelajaran. Penelitian ini bertujuan mengembangkan kemampuan penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis berdasarkan *learning obstacle* dan memperhatikan perkembangan tahap kognitif siswa sebagai dasar untuk mengembangkan desain didaktis pada materi yang lain terkait kemampuan penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis. Penelitian ini juga dapat dijadikan acuan oleh guru dalam mengembangkan bahan ajar berdasarkan *learning obstacle* dan perkembangan kognitif siswa dengan materi atau topik tertentu. Bahkan, pada jenjang yang lain, terkait dengan kemampuan penalaran secara aljabar dan resiliensi matematis atau kemampuan matematis yang lain.
- 1.4.2 Siswa, penelitian ini diharapkan dapat memberikan dampak positif bagi siswa dalam meningkatkan kemampuan penalaran secara aljabar serta menumbuhkan resiliensi matematis saat menyelesaikan permasalahan matematika.
- 1.4.3 Peneliti, untuk mendesain pembelajaran matematika yang relevan, mengacu pada Profil Pelajar Pancasila terhadap kemampuan penalaran secara aljabar dan kualitas karakter resiliensi matematis siswa, untuk mengetahui tahapan penalaran secara aljabar siswa pada setiap tahap kognitifnya dan menghasilkan desain didaktis pembelajaran matematika yang sesuai dengan tahap kognitif siswa, serta untuk mendeskripsikan kemampuan kemampuan penalaran secara aljabar dan karakter atau sikap resiliensi matematis.
- 1.4.4 Peminat penelitian, penelitian ini memberikan wawasan akan pentingnya pembelajaran matematika yang dirancang mengacu pada Profil Pelajar Pancasila dan sesuai dengan tahap perkembangan kognitif siswa dan

berdasarkan *learning obstacle* untuk meminimalkan hambatan belajar yang dialami siswa dalam menyelesaikan tugas-tugas pada kemampuan penalaran secara aljabar, dan mengembangkan kemampuan penalaran secara aljabar dan karakter resiliensi matematis siswa.

1.5. Struktur Organisasi Disertasi

Struktur organisasi disertasi ini terdiri atas: 1) Bab I Pendahuluan yang mencakup Latar Belakang Masalah, Pertanyaan Penelitian, Tujuan Penelitian, Manfaat Penelitian, dan Struktur Organisasi Disertasi. 2) Bab II Kajian Pustaka yang mencakup Penalaran Secara Aljabar, Resiliensi Matematis, Teori Situasi Didaktis, Fungsi Komposisi dan Invers, Tahap Perkembangan Kognitif, Kurikulum Merdeka dan Profil Pelajar Pancasila, Keterkaitan antara Penalaran Secara Aljabar, Resiliensi Matematis, dan Tahap Kognitif, Penelitian yang Relevan, Definisi Operasional, dan Kerangka Berpikir. 3) Bab III Metode Penelitian yang mencakup Desain Penelitian, Partisipan dan Tempat Penelitian, Fokus Penelitian, Pengumpulan Data, Uji Keabsahan Data, Analisis Data, dan Prosedur Penelitian. 4) Bab IV yang meliputi Hasil dan Pembahasan. 5) Bab V yang meliputi Simpulan, Keterbatasan Penelitian, Implikasi, dan Saran.