BAB I
PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Ruang Lebesgue dan perumumannya adalah salah satu topik yang banyak dikaji oleh matematikawan di bidang analisis karena ruang Lebesgue berfungsi sebagai purwarupa untuk semua ruang fungsi dalam beberapa hal (Adams dan Hedberg, 1999; Castillo dan Rafeiro, 2016). Salah satu hasil yang ditemukan dalam perumuman ruang Lebesgue adalah ruang Orlicz. Z. W. Birnbaun dan W. Orlicz memperkenalkan ruang Orlicz $L_\Phi = L_\Phi(\mathbb{R})$ sebagai perumuman dari ruang Lebesgue $L_p = L_p(\mathbb{R})$ dengan mengganti parameter p untuk $1 \leq p < \infty$ dengan fungsi Young $\Phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ (Birnbaun dan Orlicz, 1992). Selain ruang Orlicz, C. B. Morrey (1938) memperkenalkan ruang Morrey $\mathcal{M}_q^p = \mathcal{M}_q^p(\mathbb{R})$ dengan parameter p dan q dimana $1 \leq p < q < \infty$ sebagai perumuman lain dari ruang Lebesgue L_p dengan menambahkan ukuran bola buka $|B(a, r)|$ yang berpusat di $a \in \mathbb{R}$ dengan jari-jari $r > 0$ pada ruang Lebesgue L_p. Nakai (1994) memperumum ruang Morrey dengan mengganti parameter q dengan fungsi parameter $\phi: (0, \infty) \to (0, \infty)$ menjadi ruang Morrey diperumum $\mathcal{M}_\phi^p = \mathcal{M}_\phi^p(\mathbb{R})$. Setelah dikonstruksi ruang Orlicz dan ruang Morrey diperumum, Kedua ruang tersebut digabungkan sehingga diperoleh ruang Orlicz-Morrey $L_{\phi,\Phi} = L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R})$ yang dikenalkan oleh Nakai (2006).

Perumuman ruang Lebesgue pada penjelasan sebelumnya merupakan bentuk kontinu dari ruang-ruang tersebut yang menjadi awal pengenalan ruang Lebesgue dan perumumannya. Selain itu, terdapat bentuk lain dari ruang Lebesgue yakni ruang barisan Lebesgue (*p-summable spaces*) yang terdapat pada Castillo dan Rafeiro (2016) yang dinotasikan dengan $\ell_p = \ell_p(\mathbb{Z})$. Salah satu perumuman dari ruang barisan Lebesgue ℓ_p adalah ruang barisan Morrey $m_q^p = m_q^p(\mathbb{Z})$ yang dikaji oleh Gunawan, H., dkk. (2018). dengan mengganti ukuran bola $|B(a, r)|$ dengan kardinalitas $|S_{M,N}|$ dimana $S_{M,N} = \{M - N, \dots, M, \dots, M + N\}$ untuk suatu $M \in \mathbb{Z}$

dan $N \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Selain ruang barisan Morrey, Gunawan, H., dkk. (2018) juga mengkaji ruang barisan Morrey diperumum $m_\phi^p = m_\phi^p(\mathbb{Z})$ sebagai perumuman dari ruang barisan Morrey dengan mengganti parameter q dengan fungsi parameter $\phi: (0, \infty) \to (0, \infty)$. Selain itu, terdapat ruang barisan Orlicz $\ell_\Phi = \ell_\Phi(\mathbb{Z})$ dikaji oleh Prayoga, dkk. (2020) yang mengganti parameter p untuk $1 \leq p < \infty$ dengan fungsi Young $\Phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$. Setelah dikajinya ruang barisan Orlicz dan ruang barisan Morrey Diperumum, kedua ruang tersebut digabungkan sehingga menghasilkan ruang barisan Orlicz-Morrey $\ell_{\phi,\Phi} = \ell_{\phi,\Phi}(\mathbb{Z})$ dikaji oleh Fatimah, dkk. (2021).

Pada tahun 2022, Dermawan, dkk. (2023) memperumum fungsi Young Φ menjadi fungsi Young-*s* Φ_s dengan memperumum syarat Φ fungsi konveks menjadi fungsi konveks-*s* tipe kesatu. Berdasarkan penjelasan tersebut, penelitian ini difokuskan pada pendefinisian dan pengkajian sifat-sifat terutama sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz-Morrey dengan fungsi Young-*s* dengan memanfaatkan pengetahuan dan penelitian sebelumnya terkait ruang ℓ_p dan perumumannya.

Pada bagian ini, akan dijelaskan terlebih dahulu definsi ruang barisan Lebesgue ℓ_p pada Castillo dan Rafeiro (2016). Misalkan $1 \leq p < \infty$. Ruang barisan Lebesgue ℓ_p adalah himpunan barisan bilangan real $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ didefinisikan dengan

$$\ell_p = \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \mid \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^p < \infty\}$$

yang dilengkapi dengan norma

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Salah satu perumuman ruang barisan Lebesgue ℓ_p adalah ruang barisan Orlicz ℓ_Φ yang berkaitan dengan fungsi Young. Fungsi $\Phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ disebut fungsi Young jika Φ konveks, $\Phi(0) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = \infty$, dan Φ kontinu (Masta, dkk. 2017; Fatimah, dkk. 2021). Berdasarkan definisi fungsi Young yang digunakan tersebut, Prayoga, dkk. (2020) mengkaji ruang barisan Orlicz ℓ_Φ yang merupakan perumuman ruang barisan Lebesgue ℓ_p yang didefinisikan sebagai berikut.

Misalkan $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ merupakan fungsi Young. Untuk suatu $a > 0$, ruang barisan Orlicz ℓ_Φ adalah himpunan barisan bilangan real $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ yang didefinisikan dengan

$$\ell_\Phi = \left\{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \middle| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi\left(\frac{|x_k|}{a}\right) < \infty\right\}$$

yang dilengkapi dengan norma

$$\|x\|_{\ell_\Phi} = \inf\left\{b > 0 \middle| \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1\right\}.$$

$\|x\|_{\ell_\Phi}$ disebut Norma Luxemburg.

Jika $\Phi(t) = t^p$ dengan $1 \leq p < \infty$ maka $\|x\|_{\ell_\Phi} = \|x\|_{\ell_p}$. Ini menunjukkan bahwa ℓ_Φ merupakan perumuman dari ℓ_p.

Selain ruang barisan Orlicz, terdapat ruang barisan Morrey yang merupakan perumuman lain dari ruang ℓ_p. Berdasarkan Gunawan, H., dkk. (2018), disebutkan bahwa, misalkan himpunan

$$S_{M,N} = \{M - N, \dots, M, \dots, M + N\} \tag{1}$$

untuk suatu $M \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ sehingga $|S_{M,N}| = 2N + 1$ dimana $|S_{M,N}|$ kardinalitas dari $S_{M,N}$. Dengan $1 \leq p \leq q < \infty$, ruang barisan Morrey m_q^p adalah himpunan barisan bilangan real $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dengan norma

$$\|x\|_{m_q^p} = \sup_{M\in\mathbb{Z}, N\in\mathbb{N}} |S_{M,N}|^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|S_{M,N}|} \sum_{k\in S_{M,N}} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Jika $q = p$ maka $\|x\|_{m_q^p} = \|x\|_{\ell_p}$. Ini menunjukkan bahwa m_q^p merupakan perumuman dari ℓ_p.

Ruang barisan Morrey dapat diperumum dengan mengganti q dengan parameter $\phi \in G_\phi$ dimana G_ϕ merupakan koleksi fungsi $\phi: 2\mathbb{N}_0 + 1 \to (0,\infty)$ dimana $\phi(t)$ hampir turun dan $\psi(t) = t^{\frac{1}{p}}\phi(t)$ hampir naik. Berdasarkan Gunawan, H., dkk. (2018), disebutkan bahwa, misalkan $S_{M,N}$ adalah himpunan yang serupa pada persamaan (1), dan $\phi \in G_\phi$. Ruang barisan Morrey diperumum m_ϕ^p adalah ruang barisan bilangan real $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dengan norma

$$\|x\|_{m_\phi^p} = \sup_{M\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}} \frac{1}{\phi(2N+1)} \left(\frac{1}{|S_{M,N}|} \sum_{k\in S_{M,N}} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Jika $\phi(2N+1) = (2N+1)^{-\frac{1}{q}}$ maka $\|x\|_{m_\phi^p} = \|x\|_{m_q^p}$. Ini menunjukkan bahwa m_ϕ^p merupakan perumuman dari m_q^p.

Ruang barisan Orlicz dan ruang barisan Morrey diperumum dapat digabungkan menjadi ruang barisan Orlicz-Morrey. Pada penelitian ini, akan digunakan definisi Nakai (2006). Berdasarkan Fatimah, dkk. (2021), definisi dari ruang barisan Orlicz-Morrey adalah sebagai berikut. Misalkan $S_{M,N}$ adalah himpunan yang serupa pada persamaan (1), Φ fungsi Young, dan $\phi \in G_\phi$. Ruang barisan Orlicz-Morrey $\ell_{\phi,\Phi}$ adalah ruang barisan bilangan real $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ dengan norma

$$\|x\|_{\ell_{\phi,\Phi}} = \sup_{M\in\mathbb{Z},N\in\mathbb{N}_0} \|x\|_{\phi,\Phi,M,N}$$

dimana

$$\|x\|_{\phi,\Phi,M,N} = \inf\left\{ b > 0 \,\middle|\, \frac{\phi(2N+1)}{|S_{M,N}|} \sum_{k\in S_{M,N}} \Phi\left(\frac{|x_k|}{b}\right) \leq 1 \right\}.$$

$\|x\|_{\phi,\Phi,M,N}$ disebut norma Luxemburg.

Jika $\phi(2N+1) = 2N+1$ maka $\|x\|_{\ell_{\phi,\Phi}} = \|x\|_{\ell_\Phi}$. Disisi lain jika $\Phi(t) = t^p$ dengan $1 \leq p < \infty$ maka $\|x\|_{\ell_{\phi,\Phi}} = \|x\|_{m_\phi^p}$. Ini menunjukkan bahwa $\ell_{\phi,\Phi}$ merupakan perumuman dari ℓ_Φ dan m_ϕ^p.

Dari penjelasan tersebut, hal menarik yang dapat diteliti adalah pengkajian perumuman dari ruang barisan Orlicz-Morrey. Kajian perumuman ruang barisan Orlicz-Morrey dilakukan oleh Deringoz, dkk. (2014), namun karena perbedaan definisi, ruang barisan Orlicz-Morrey diperumum menjadi sama seperti definisi ruang barisan Morrey diperumum pada Gunawan, H., dkk. (2018) yang ditambahkan fungsi Young. Sedangkan pada penelitian ini, metode yang digunakan adalah mengganti fungsi Young pada definisi ruang barisan Orlicz-Morrey dengan fungsi Young-s sehingga diperoleh definisi ruang barisan Orlicz-Morrey diperumum atau ruang barisan Orlicz-Morrey-s. Pada bagian selanjutnya, ruang barisan Orlicz-Morrey Diperumum akan disebut sebagai ruang barisan Orlicz-Morrey-s.

Dermawan, dkk. (2023) mendefinisikan fungsi Young-s sebagai perumuman dari fungsi Young dimana suatu fungsi $\Phi_s: [0, \infty) \to [0, \infty)$ dikatakan sebagai fungsi Young-s jika Φ_s konveks-s, $\Phi_s(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \Phi_s(t) = \infty$, dan Φ_s kontinu. Misalkan $s \in (0,1]$. Fungsi $\Phi_s: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dikatakan fungsi konveks-s tipe kesatu jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in [0, \infty)$ dimana $a^s + b^s = 1$ berlaku $\Phi_s(ax_1 + bx_2) \leq a^s\Phi_s(x_1) + b^s\Phi_s(x_2)$ untuk setiap $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ (Hudzik dan Maligranda, 1994).

Dengan adanya fungsi Young-s, akan dikonstruksi ruang barisan Orlicz-Morrey-s dengan mengganti fungsi Young menjadi fungsi Young-s. Dengan adanya modifikasi tersebut, memungkinkan adanya perubahan sifat-sifat yang terdapat pada Ruang barisan Orlicz-Morrey seperti Ruang barisan Orlicz (Kustiawan, dkk., 2023).

Hal menarik lainnya yang dapat dikaji pada ruang barisan Orlicz-Morrey adalah sifat inklusi. Pada ruang barisan Lebesgue dan perumumannya, terdapat parameter-parameter yang merepresentasikan ruang tersebut. Seperti bilangan real $1 \leq p < \infty$ pada ruang barisan Lebesgue, bilangan real $1 \leq p \leq q < \infty$ pada ruang barisan Morrey, fungsi parameter $\phi: (0, \infty) \to (0, \infty)$ pada ruang barisan Morrey Diperumum dan ruang barisan Orlicz-Morrey, serta fungsi Young $\Phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ pada ruang barisan Orlicz dan ruang barisan Orlicz-Morrey. Berdasarkan penelitian Pradita (2017), Gunawan, H., dkk. (2018), Prayoga, dkk. (2020), dan Fatimah, dkk. (2021), hubungan antar dua buah parameter yang sejenis dapat mempengaruhi hubungan antar dua buah ruang yang sejenis. Dengan definisi fungsi Young-s, sifat yang sama berlaku pada ruang barisan Orlicz-s $\ell_{\Phi_s} = \ell_{\Phi_s}(\mathbb{Z})$ yang dikaji oleh Dasep, dkk. (2024). Dari pengkajian tersebut, penelitian ini akan mengkaji juga sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz-Morrey-s.

Selain sifat inklusi, sifat lain yang dapat dikaji adalah ketaksamaan Hölder dan perumumannya. Pada tahun 2020, Fatimah, dkk. meneliti ketaksamaan Hölder diperumum pada ruang barisan Orlicz beserta syarat cukupnya yang didasarkan pada kajiannya tentang ketaksamaan Hölder diperumum ruang barisan Lebesgue pada tahun 2019. Selanjutnya, Prayoga, dkk. (2020) mengkaji ketaksamaan Hölder diperumum pada ruang barisan Orlicz dengan menambahkan syarat perlu, beserta keterkaitan ketaksamaan Hölder dengan sifat inklusinya. Berdasarkan kajian tersebut, akan dikaji juga ketaksamaan Hölder dan perumumannya pada ruang barisan Orlicz-Morrey-*s* beserta keterkaitannya dengan sifat inklusinya.

Berdasarkan penjelasan sebelumnya, penelitian ini akan mengkaji sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz-Morrey-*s* dengan fungsi Young-*s*.

1.2. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, hal yang dapat diidentifikasi untuk diteliti adalah

1. Bagaimana pendefinisian ruang barisan Orlicz-Morrey-*s* dengan fungsi Young-*s*?
2. Sifat-sifat apa saja yang dapat diturunkan dari ruang barisan Orlicz-Morrey-*s*?
3. Bagaimana keberlakuan sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz-Morrey-*s*?
4. Bagaimana keberlakuan perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz-Morrey-*s*?

1.3. Tujuan Penelitian

Sesuai rumusan masalah yang telah dikemukakan, tujuan dari penelitian ini adalah

1. Memperoleh definisi ruang barisan Orlicz-Morrey-*s* dengan fungsi Young-*s*.
2. Mengkaji sifat-sifat pada ruang barisan Orlicz-Morrey-*s*.
3. Mengkaji keberlakuan sifat inklusi di ruang barisan Orlicz-Morrey-*s*.
4. Mengkaji keberlakuan perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz-Morrey-*s*.

1.4. Manfaat Penelitian

Penelitian ini dapat bermafaat baik secara teoritis maupun praktis, yaitu sebagai berikut

1.4.1. Manfaat Teoretis

Hasil penelitian ini diharapkan dapat menjadi inspirasi dan masukan dalam pengembagan ruang matematika. Penelitian ini pun akan memperkuat kajian pada Analisis Matematika yang di dalamnya banyak melibatkan ruang.

1.4.2. Manfaat Praktis

(a) Bagi Penulis

Setelah Penelitian ini, diharapkan dapat menjadi lebih terpacu dalam mengkaji ruang matematika, salah satunya ruang barisan Orlicz-Morrey-s.

(b) Bagi Peneliti Selanjutnya

Penelitian ini diharapkan dapat menjadi referensi bagi peneliti selanjutnya dalam melaksanakan penelitian lebih lanjut, terutama mengenai ruang barisan Orlicz-Morrey-s dan ruang lainnya.

1.5. Batasan Masalah

Penelitian ini berfokus pada definisi, sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz-Morrey-s atau ruang barisan Orlicz-Morrey-s.

1.6. Sistematika Penulisan

Skripsi ini terdiri atas 6 bab. Bab I Pendahuluan berisi tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, batasan penelitian, dan manfaat penelitian serta sistematika penulisan dalam skripsi ini. Selanjutnya pada Bab II Kajian Pustaka, disajikan teori-teori pendukung yang akan digunakan pada pembahasan Bab IV dan V. Kajian pada Bab II dimulai dengan definisi dan sifat-sifat dari fungsi hampir naik dan hampir turun, fungsi konveks, fungsi konveks-s, fungsi Young dan fungsi Young-s. Kemudian dilanjutkan dengan definisi dari barisan dan deret himpunan bilangan real beserta kekonvergenannya. Terakhir, pada Bab II dibahas mengenai definisi fungsi norma dan fungsi quasi-norma serta definisi ruang bernorma dan ruang lengkap atau ruang Banach. Selain itu dibahas pula ketaksamaan-ketaksamaan yang sering digunakan pada kajian mengenai ruang bernorma, yaitu ketaksamaan Young, ketaksamaan Hölder, dan ketaksamaan Minkowski.

Bagian selanjutnya adalah Bab III Metodologi Penelitian, dijabarkan objek penelitian, metodologi penelitian dan langkah-langkah yang dilakukan dalam menyelesaikan penelitian ini. Pada bab selanjutnya yaitu Bab IV Ruang Barisan Orlicz dan Ruang Barisan Morrey dan Perumumannya, berisi hasil-hasil penelitian terdahulu tentang sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Lebesgue, Orlicz, Morrey, Morrey Diperumum, dan Orlicz-Morrey. Hasil-hasil penelitian tersebut digunakan sebagai dasar untuk mengkonstruksi ruang barisan Orlicz-Morrey-*s*, sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder.

Berikutnya dilanjutkan dengan Bab V Ruang Barisan Orilcz-Morrey-*s*. Bab ini berisi hasil yang diperoleh dalam penelitian ini. Diawali dengan pendefinisian ruang barisan Orlicz-Morrey-*s* yang dilengkapi dengan suatu fungsi quasi-norma serta sifat-sifat yang berlaku pada ruang barisan Orlicz-Morrey-*s*. Selanjutnya pada bab V juga, dijabarkan sifat inklusi, ketaksamaan Hölder, serta perumumannya pada ruang barisan Orlicz-Morrey-*s*. Skripsi ini diakhiri pada Bab VI Kesimpulan dan Saran. Bab ini berisi simpulan dari hasil penelitian yang dilakukan dan saran untuk penelitian selanjutnya.