BAB III

MODEL ANRIAN (M/G/1):(FCFS/∞/∞) DAN (M/G/c):(FCFS/∞/∞)

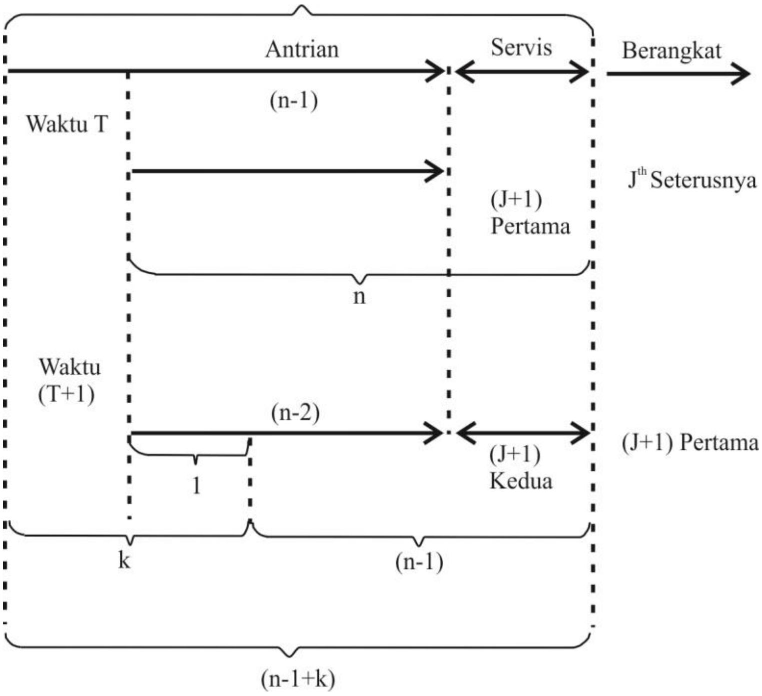
3.1 Model Antrian (M/G/1):(FCFS/∞/∞)

Model antrian (M/G/1):(FCFS/∞/∞) merupakan model antrian dengan banyak kedatangan berdistribusi Poisson atau waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial. Pada model ini waktu pelayanan dijabarkan dengan sebuah distribusi umum dengan *mean* $E(t)$ dan varians $Var(t)$. Sayangnya, analisis situasi ini agak dibatasi dalam arti bahwa analisis ini tidak memberikan ekspresi analitis yang dapat ditelusuri untuk probabilitas P_n. Sebaliknya, hasil-hasil dari model ini hanya memberikan ukuran-ukuran dasar dari kinerja, termasuk $L_s, L_q, W_s,$ dan W_q.

Formula Pollazck-Khintchine (P-K) digunakan untuk menguraikan sistem antrian ini. Formula ini diuraikan melalui pelayanan tunggal dengan situasi yang didasarkan tiga asumsi berikut :

a. Distribusi kedatangan mengikuti proses Poisson dengan tingkat rata-rata λ per unit waktu sebelum memasuki fasilitas pelayanan.
b. Distribusi waktu pelayanan yang umum dengan *mean* $E(t)$ dan varians $Var(t)$.
c. Kondisi *steady state* dinyatakan dengan $\rho = \lambda E(t) < 1$.

Pada asumsi yang kedua, distribusi pelayanan yang umum mengubah situasi sistem antrian menjadi tingkat kedatangan dan juga tingkat pelayanan mengikuti ditribusi Poisson.



Gambar 3.1

Sistem Antrian dari P-K

Simbol yang sudah digambarkan ini dapat diuraikan:

a. Waktu T = Bila pelanggan dengan waktu J^{th} meninggalkan fasilitas pelayanan.

b. Waktu (T+1) = Bila pelanggan dengan waktu (J+1) pertama meninggalkan fasilitas layanan.

c. Notasi dari J, J+1, ... tidak berarti bahwa pelanggan memasuki pelayanan dengan FCFS, namun hasil dari P-K ini dapat digunakan untuk salah satu dari ketiga disiplin antrian, yaitu FCFS, LCFS,dan SIRO.

Dengan demikian melalui asumsi *steady state* maka $E(n) = E(n_1)$ dan juga $E(n^2) = E[(n_1)^2]$ dapat diuraikan. Dengan catatan:

$$n_1 = \begin{cases} k & ; n = 0 \\ n + 1 + k & ; n > 0 \end{cases}$$

Jika diberikan δ

$$\delta = \begin{cases} 0 & ; n = 0 \\ 1 & ; n > 0 \end{cases}$$

Akan diperoleh :

$$E(n_1) = E(n) - E(\delta) + E(k)$$

Diketahui $E(n) = E(n_1)$, maka diperoleh $E(\delta) = E(k)$

Demikian juga :

$$(n_1)^2 = (n + k - \delta)^2 = n^2 + k^2 + \delta^2 + 2nk - 2n\delta - 2k\delta$$

Dari definisi dinyatakan $\delta^2 = \delta$ dan juga $n\delta = n$, maka diperoleh :

$$(n_1)^2 = n^2 + k^2 + 2nk + \delta - 2n - 2k\delta$$

Dengan menggunakan ekspektasi dan mengetahui $E(n^2) = E[(n_1)^2]$, maka :

$$E({n_1}^2) = E(n^2 + k^2 + 2nk + \delta - 2n - 2k\delta)$$

$$= E(n^2) + E(k^2) + E(2nk) + E(\delta) - E(2n) - E(2k\delta)$$

$$= E(n^2) + E(k^2) + 2E(n)E(k) + E(\delta) - 2E(n) - 2E(k)E(\delta)$$

$$2E(n) - 2E(n)E(k) = E(k^2) + E(\delta) - 2E(k)E(\delta)$$

$$E(n)[2(1 - E(k))] = E(k^2) - E(\delta)[2E(k) - 1]$$

diperoleh

$$E(n) = \frac{E(k^2) - E(\delta)[2E(k) - 1]}{2(1 - E(k))}$$

Dengan memasukkan $E(\delta) = E(k)$ diperoleh

$$E(n) = \frac{E(k^2) - E(k)[2E(k) - 1]}{2(1 - E(k))}$$

Dari rumus ini dapat diuraikan $E(k)$ dan $E(k^2)$ dengan memperhatikan kedatangan berdasarkan distribusi Poisson yang dinyatakan dengan :

$E(k|t) = \lambda t$ dan $E(k^2|t) = (\lambda t)^2 + \lambda t$

Diuraikan dengan :

$$E(k) = \int_0^\infty E(k|t)\, f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty (\lambda t)\, f(t)dt$$

$$= \lambda \int_0^\infty t\, f(t)dt$$

$$= \lambda E(t)$$

$$E(k^2) = \int_0^\infty E(k^2|t)\, f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty ((\lambda t)^2 + \lambda t)\, f(t)dt$$

$$= \lambda^2 var(t) + \lambda^2 E^2(t) + \lambda E(t)$$

Yang kemudian dapat disederhanakan menjadi ekspektasi pelanggan dalam sistem antrian, yaitu :

$$L_s = E(n) = \lambda E(t) + \frac{\lambda^2[E^2(t) + var(t)]}{2(1 - \lambda E(t))}$$

di mana $\lambda E(t) < 1$

dengan demikian dari formulasi P-K ini dapat diperoleh rumus selanjutnya:

Nilai rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda E(t) + \frac{\lambda^2[E^2(t)+var(t)]}{2(1-\lambda E(t))}}{\lambda}$$

$$= E(t) + \frac{\lambda^2[E^2(t) + var(t)]}{2\lambda(1 - \lambda E(t))}$$

Nilai rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian

$$L_q = L_s - \lambda E(t)$$

$$= \lambda E(t) + \frac{\lambda^2[E^2(t) + var(t)]}{2(1 - \lambda E(t))} - \lambda E(t)$$

$$= \frac{\lambda^2[E^2(t) + var(t)]}{2(1 - \lambda E(t))}$$

Nilai rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam antrian

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$= \frac{\frac{\lambda^2[E^2(t)+var(t)]}{2(1-\lambda E(t))}}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^2[E^2(t) + var(t)]}{2\lambda(1-\lambda E(t))}$$

3.2 Model Antrian (M/G/c):(FCFS/∞/∞)

Model antrian (M/G/c):(FCFS/∞/∞) adalah model antrian dengan pelayanan ganda, distribusi kedatangan Poisson dan distribusi pelayanan umum. Dari Donald Gross (2008) waktu tunggu dalam antrian didapat dari persamaan :

$$P_n = \pi_n^q = \Pr\{\text{n dalam antrian setelah keberangkatan}\}$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^\infty (\lambda t)^n e^{-\lambda t} dW_q(t)$$

Dari Ross, S. M. (1997), W_q dapat dicari dengan

$$W_q = \frac{\lambda^c E[t^2](E[t])^{c-1}}{2(c-1)!\,(c-\lambda E[t])^2\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda E[t])^n}{n!} + \frac{(\lambda E[t])^c}{(c-1)!(c-\lambda E[t])}\right]}$$

Nilai rata-rata jumlah pelanggan dalam antrian

$$L_q = \frac{W_q}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^c E[t^2](E[t])^{c-1}}{2(c-1)!\,(c-\lambda E[t])^2\,\lambda\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda E[t])^n}{n!} + \frac{(\lambda E[t])^c}{(c-1)!(c-\lambda E[t])}\right]}$$

Nilai rata-rata jumlah pelanggan dalam sistem

$$L_s = L_q + \lambda E(t)$$

$$= \frac{\lambda^c E[t^2](E[t])^{c-1}}{2(c-1)!\,(c-\lambda E[t])^2\,\lambda\left[\sum_{n=0}^{c-1}\frac{(\lambda E[t])^n}{n!} + \frac{(\lambda E[t])^c}{(c-1)!(c-\lambda E[t])}\right]} + \lambda E(t)$$

Nilai rata-rata waktu tunggu pelanggan dalam sistem

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

$$= \frac{\dfrac{\lambda^c E[t^2](E[t])^{c-1}}{2(c-1)!(c-\lambda E[t])^2\, \lambda\left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda E[t])^n}{n!} + \frac{(\lambda E[t])^c}{(c-1)!(c-\lambda E[t])}\right]} + \lambda E(t)}{\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^c E[t^2](E[t])^{c-1}}{2(c-1)!\,(c-\lambda E[t])^2\, \lambda^2 \left[\sum_{n=0}^{c-1} \frac{(\lambda E[t])^n}{n!} + \frac{(\lambda E[t])^c}{(c-1)!(c-\lambda E[t])}\right]} + E(t)$$