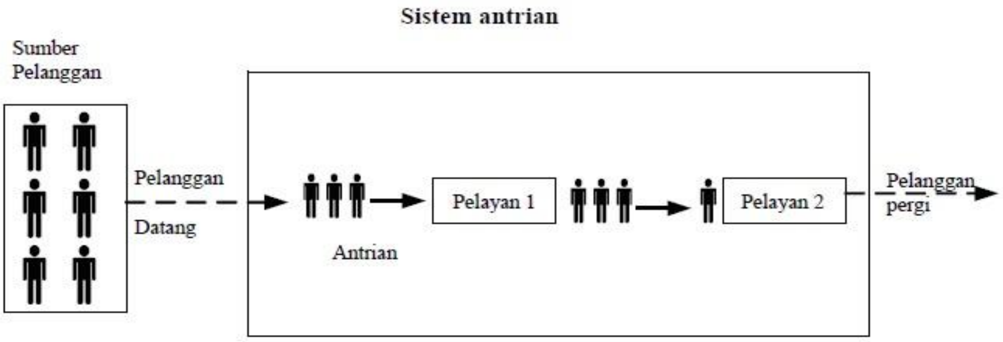
BAB III

MODEL ANTRIAN PADA PEMBUATAN SIM C

3.1 *Single Channel Multiple Phase*

Sistem antrian *single channel multiple phase* merupakan sistem antrian dimana pelanggan yang tiba, dapat memasuki sistem dengan mengantri di tempat yang telah disediakan. Selama proses antrian, pelanggan akan dipanggil oleh seorang pelayan untuk mendapatkan pelayanan di loket pertama. Setelah mendapatkan pelayanan di loket pertama, pelanggan mengantri kembali untuk mendapatkan pelayanan di loket selanjutnya. Antrian dilakukan pelanggan sampai proses pelayanan selesai dan pelanggan keluar dari sistem antrian.

Dibawah ini akan disajikan gambar dari sistem antrian *single channel multiple phase*:



Gambar 3.1*Single Channel Multiple Phase*

Berdasarkan gambar diatas, sistem *single channel multiple phase* memiliki saluran pelayanan tunggal dalam setiap tahap pelayanan dimana pada pada pelayanan pertama hingga pelayanan ke-k hanya terdapat satu loket pelayanan. Kedatangan pelanggan ke loket pelayanan dapat terjadi satu per satu ataupun secara berkelompok seperti halnya pada pelayanan pembuatan SIM di Polrestabes kota Bandung, saat proses ujian simulator pelanggan datang secara berkelompok untuk kemudian mendapatkan pelayanan secara bergiliran. Selain itu pula, pada ujian teori pelanggan datang satu persatu namun pelayanan dilakukan secara berkelompok/borongan. Oleh karena itu perlu dibahas terlebih dahulu model antrian pelayanan tunggal dengan pola kedatangan individu jugakedatangan berkelompok dan pelayanan berkelompok serta model antrian pelayanan majemuk pola kedatangan individu.

3.2 Model Antrian M/M/1

Dalam bagian ini akan dibahas cara mencari ekspektasi dari sistem antrian yang meliputi rata-rata banyak pelanggan dalam sistem (L_s), rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem (W_s), rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian (W_q) dan rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q). Pada model antrian M/M/1 diasumsikan bahwa proses kedatangan dengan pelayanan adalah *independent*(tidak ada kaitan dalam perhitungannya). Dengan demikian peluang dari satu kedatangan selama periode waktu Δt = h bersifat konstan yaitu λh (untuk satu kedatangan). Sedangkan peluang untuk pelayanan adalah μh (untuk satu pelayanan).Asumsi yang terakhir, harus dapat dianalisis dari periode waktu Δt yang sangat kecil, yang akan mencapai $(\Delta t)^2$ = h^2= 0.

Dalam menguraikan model antrian M/M/1 perlu diketahui terlebih dahulu:

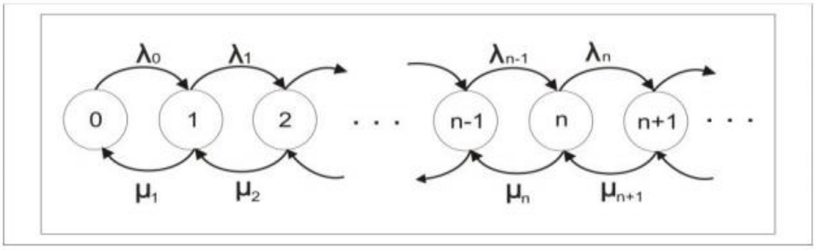
a. n yaitu jumlah pelanggan dalam sistem.
b. $P_n(t)$ yaitu peluang dari n pelanggan dalam sistem pada periode waktu t.
c. $\rho = \lambda/\mu$ yaitu peluang sistem dalam keadaan sibuk, dimana $\rho < 1$.

Berikut ini langkah-langkah yang dilakukan dalam menguraikan pelayanan tunggal yaitu:

a. Langkah 1: Tentukan besarnya $P_n(t)$ dalam parameter λ dan μ.
b. Langkah 2: Berdasarkanhasil (a), cari *expected number* atau jumlah ekspektasi dari banyaknya pelanggan dalam sistem untuk parameter-parameter λ dan μ.
c. Langkah 3: Gunakan hasil (b) untuk mendapatkan perumusan dari lamanya waktu di dalam sistem dan rumus-rumus lainnya.

Kedatangan dan kepergian merupakan kejadian-kejadian yang saling bebas, sehingga kejadian-kejadian pada interval waktu tertentu tidak mempengaruhi kejadian pada interval waktu sebelumnya atau sesudahnya.

Proses kedatangan dan kepergian dalam suatu sistem antrian ditunjukkan pada gambar berikut:



Gambar 3.2Proses Kedatangan dan kepergian

Berdasarkan gambar 3.2 kemungkinan-kemungkinan kejadian saling lepas yang dapat terjadi jika terdapat n ($n > 0$) pelanggan dalam sistem pada waktu (t+h) adalah sebagai berikut:

Tabel 3.1 Jumlah Pelanggan pada Waktu (t + h) pada Model Antrian M/M/1

Kasus	Jumlah pelanggan pada waktu t	Jumlahkedatangan pada waktu h	Jumlah pelayanan pada waktu h	Jumlah pelanggan pada waktu (t + h)
1	n	0	0	n
2	n + 1	0	1	n
3	n – 1	1	0	n
4	n	1	1	n

$P_n(t+h)$ = (peluang terdapat n pelanggan pada waktu t) x (peluang dari jumlah kedatangan pada waktu h) x (peluang dari jumlah pelayanan pada waktu h)

= $[P_n(t)]$ $(1- \lambda h)$ $(1- \mu h)$

= $P_n(t)$ $[1- \lambda h - \mu h + \lambda \mu h^2]$

= $P_n(t)$ $[1- \lambda h - \mu h]$

$P_n(t+h)$ = (peluang terdapat(n+1) pelanggan pada waktu t) x (peluang dari jumlah kedatangan pada waktu h) x (peluang dari jumlah pelayanan pada waktu h)

= $[P_{n+1}(t)]\ (1-\lambda h)\ (\mu h)$

= $P_{n+1}(t)\ [\mu h - \lambda\mu h^2]$

= $P_{n+1}(t)\ (\mu h)$

$P_n(t+h)$ = (peluang terdapat (n-1) pelanggan pada waktu t) x (peluang dari jumlah kedatangan pada waktu h) x (peluang dari jumlah pelayanan pada waktu h)

= $[P_{n-1}(t)]\ (\lambda h)\ (1-\mu h)$

= $P_{n-1}(t)\ [\lambda h - \lambda\mu h^2]$

= $P_{n-1}(t)\ (\lambda h)$

Peluang kasus 4 berdasarkan definisi proses poisson bahwa $P\{N(h) \geq 2\} = o(h)$ artinya peluang terdapat 2 atau lebih kejadian pada waktu h sangat kecil atau dianggap nol.

Karena kasus-kasus tersebut saling lepas, maka peluang terdapat n pelanggan dalam sistem pada waktu (t+h) dinyatakan dengan:

$P_n(t+h)$ = kasus 1 + kasus 2 + kasus 3

= $P_n(t)\ [1-\lambda h - \mu h] + P_{n+1}(t)\ (\mu h) + P_{n-1}(t)\ (\lambda h)$

= $P_n(t) - \lambda h P_n(t) - \mu h P_n(t) + \mu h P_{n+1}(t) + \lambda h P_{n-1}(t)$

Berdasarkan asumsi, untuk h yang kecil berlaku:

$P_n(t) = P_n(t+h)$

$P_n(t) = P_n(t)\ [1-\lambda h - \mu h] + P_{n+1}(t)\ (\mu h) + P_{n-1}(t)\ (\lambda h)$

atau

$P_{n+1}(t)\ (\mu h) = P_n(t) - P_n(t)\ [1-\lambda h - \mu h] - P_{n-1}(t)\ (\lambda h)$

= $P_n(t) - P_n(t) + \lambda h P_n(t) + \mu h P_n(t) - \lambda h P_{n-1}(t)$

= $P_n(t)\ .\ (\lambda h + \mu h) - \lambda h P_{n-1}(t)$

= $P_n(t)\ .\ h\ (\lambda + \mu) - \lambda h P_{n-1}(t)$

$$P_{n+1}(t) = \frac{P_n(t)\ .\ h(\lambda + \mu) - \lambda h P_{n-1}(t)}{\mu h}$$

$$P_{n+1}(t) = P_n(t)\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) - P_{n-1}(t)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \quad (3.1)$$

Selanjutnya, akan dicarai rumus umum $P_n(t)$ dalam bentuk $P_0(t)$ dalam parameter λ dan μ. Pertama-tama akan ditinjau segala cara untuk $P_0(t+h)$ yang dapat terjadi:

Kasus 1:

a. Tidak ada unit pada waktu t ($P_0(t)$)
b. Tidak ada kedatangan dengan peluang (1- λh)
c. Tidak ada pelayanan dengan peluang (1- μh), dimana μh = 0

Maka, $P_0(t+h)$ pada kasus 1 yaitu:

$P_0(t+h) = P_0(t) \cdot (1- \lambda h) \cdot 1$

Kasus 2:

d. Satu unit pada waktu t ($P_1(t)$)
e. Tidak ada kedatangan dengan peluang (1- λh)
f. Melayani satu unit dengan peluangμh

Maka, $P_0(t+h)$ pada kasus 2 yaitu:

$P_0(t+h) = P_1(t) \cdot (1- \lambda h) \cdot \mu h$

Berdasarkan kasus 1 dan kasus 2, maka kemungkinan $P_0(t+h)$ yang dapat terjadi yaitu:

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= \text{kasus 1} + \text{kasus 2} \\ &= P_0(t) \cdot (1- \lambda h) + P_1(t) \cdot (1- \lambda h) \cdot \mu h \\ &= P_0(t) - \lambda h P_0(t) + \mu h P_1(t) - \lambda \mu h^2 P_1(t) \\ &= P_0(t) - \lambda h P_0(t) + \mu h P_1(t) \end{aligned}$$

Berdasarkan asumsi, untuk h yang kecil berlaku:

$$\begin{aligned} P_0(t) &= P_0(t+h) \\ P_0(t) &= P_0(t) - \lambda h P_0(t) + \mu h P_1(t) \\ \lambda h\, P_0(t) &= P_0(t) - P_0(t) + \mu h P_1(t) \\ &= \mu h P_1(t) \end{aligned}$$

Atau

$$P_1(t) \quad = \frac{\lambda h P_0(t)}{\mu h}$$

$$= P_0(t)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Kemudian untuk perumusan $P_n(t)$ dalam bentuk P_0 dalam λ dan μ pada setiap waktu maka $P_0(t)$ = P_0 karena harus independen.

Sehingga diperoleh:

Langkah 1:

$$P_1 = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

Berdasarkan rumus (3.1) telah dibuktikan bahwa :

$$P_{n+1} = P_n\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) - P_{n-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

apabila n = 1, maka:

$$P_2 \quad = P_1\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) - P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) - P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{\lambda + \mu}{\mu} - 1\right]$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left[\frac{\lambda + \mu - \mu}{\mu}\right]$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$$

Untuk n = 3 didapat:

$$P_3 \quad = P_2\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) - P_1\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu}\right) - P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda^3 + \lambda^2\mu}{\mu^3}\right) - P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$$

$$= P_0 \left(\frac{\lambda^3 + \lambda^2\mu - \lambda^2\mu}{\mu^3} \right)$$

$$= P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^3$$

Untuk n = k didapat:

$$P_k \quad = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k$$

Sehingga didapatkan:

$$P_n \quad = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

Atau

$$P_n(t) = P_0(t) \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

Berdasarkan kesimpulan ini, sudah diketahui $P_n(t)$ dinyatakan dalam P_0 = $P_0(t)$ dalam parameter λ dan μ. Untuk mendapatkan P_0 dalam bentuk λ dan μ dapat dikaitkan dengan peluang sistem dalam keadaan sibuk yaitu $\rho = \lambda/\mu$, maka:

$$P_0 = 1 - \rho$$

$$= 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

Dengan demikian diperoleh:

$$P_n(t) = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \qquad (3.2)$$

Langkah 2:

Dalam langkah ini akan dicari rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem yang dinotasikan dengan L_s. Berdasarkan definisi ekspektasi:

$$L_s = \sum_{n=0}^{\infty} n \,.\; P(n)$$

Sehingga,

$$L_s \quad = 0.P(0) + 1.P(1) + 2.P(2) + 3.P(3) + 4.P(4) + \cdots$$

$$= 0\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^0 + 1\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^1 + 2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + 3\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3$$

$$+4\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+3\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+4\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right]+\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\right]+\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\cdots\right]$$

$$=\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\cdots\right]+$$

$$=\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\cdots\right]+\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\right.$$

$$\left.\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\cdots\right]+\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4+\cdots\right]+\cdots$$

$$=\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\cdots\right)\right]+\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(1+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\cdots\right)\right]+\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left(1+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\cdots\right)\right]+\cdots$$

Dengan menggunakan deret geometri berikut:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ax^n \text{ , dengan } a \neq 0$$

Akan konvergen dan mempunyai jumlah

$$S=\frac{a}{1-x} \text{ , apabila} |x|<1$$

Bentuk L_s diatas menjadi:

$$L_s \quad =\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)\right]+\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)\right]+$$

$$\left[\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)\right]+\cdots$$

$$=\left[\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)\right]+\left[\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)\right]+$$

$$\left[\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)\right]+\cdots$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\cdots$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(1+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\cdots\right)$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right)$$

$$=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\mu-\lambda}\right)$$

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \tag{3.3}$$

Jadi, rata-ratajumlah pelanggan dalam sistem yaitu

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Dengan demikian langkah kedua selesai dengan L_s dapat dinyatakan dalam bentuk λ dan μ.

Langkah 3:

Dalam penguraian lebih lanjut, perlu dicari rata-rata waktu yang dibutuhkan seorang pelanggan dalam sistem (W_s), Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian (W_q), rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q).

1. Rata-rata waktu yang dibutuhkan seorang pelanggan dalam sistem (W_s)

$$W_s = \frac{1}{\lambda}\,.L_s$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda} \tag{3.4}$$

2. Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian(W_q)

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu}$$

$$= \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} \tag{3.5}$$

3. Rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q)

$$L_q = \lambda . W_q$$

$$= \lambda . \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} \tag{3.6}$$

3.3 Model Antrian M/M/k

Penguraian untuk pelayanan majemuk model antrian M/M/k sama halnya pada pelayanan tunggal M/M/1, perbedaannya terletak pada pelanggan yang tidak perlu menunggu terlalu lama karena paling sedikit ada k pelayanan untuk melayani pelanggan. Pertama-tama dicari $P_n(t)$ dalam parameter λ, μ dan k. Disini akan diuraikan dua kasus yakni untuk populasi ($n \leq k$) dan ($n > k$) untuk k = 2

Sebelumnya akan dicari P_1 melalui kemungkinan kejadian-kejadian saling lepas dimanaP_0 dapat muncul pada saat (t+h)

1. Tidak terdapat pelanggan pada saat t ($P_0(t)$), tidak ada kedatangan dengan peluang $(1 - \lambda h)$ dan tidak ada pelayanan dengan peluang 1.
2. Hanya ada satu pelanggan pada saat t ($P_1(t)$), tidak ada kedatangan dengan peluang $(1 - \lambda h)$ dan melayani satu pelanggan dengan peluang (μh).

Dengan demikian:

$$P_0(t + h) = P_0(t)(1 - \lambda h) + P_1(t)(1 - \lambda h)(\mu h)$$

Bedasarkan asumsi, untuk h yang kecil berlaku:

$P_0(t + h) = P_0(t)$

maka

$P_0(t) = P_0(t)(1 - \lambda h) + P_1(t)(1 - \lambda h)(\mu h)$

$P_0(t) = P_0(t) - \lambda h P_0(t) + \mu h P_1(t) - \lambda \mu h^2 P_1(t)$

$0 = -\lambda h P_0(t) + \mu h P_1(t)$

$\lambda h P_0(t) = \mu h P_1(t)$

$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$ untuk setiap t (3.7)

3.3.1 Populasi dari n ≤ 2

Akan ditentukan kemungkinan-kemungkinan P_1 dapat muncul seperti yang terlihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 3.2 Tabel Kemungkinan P_1 pada Waktu (t+h)

Kasus	Jumlah pelanggan pada waktu t	Jumlahkedatangan pada waktu h	Jumlah pelayanan pada waktu h	Jumlah pelanggan pada waktu (t + h)
1	0	1	0	1
2	1	0	0	1
3	2	0	1	1

$P_1(t+h) = P_0(t)\lambda h$

$P_1(t+h) = P_1(t)(1 - \lambda h)(1 - \mu h)$

$P_1(t+h) = P_2(t)(1 - \lambda h)(2\mu h)$

Perlu diketahui bila kedua pelayanan diisi maka probabilitas satu server adalah $\mu h + \mu h = 2\mu h$, dimana $h^2 = 0$. Karena ketiganya merupakan kejadian saling lepas dan berlaku untuk setiap t, maka

$P_1 = P_0(\lambda h) + P_1(1 - \lambda h)(1 - \mu h) + P_2(1 - \lambda h)(2\mu h)$

$P_1 = (\lambda h)P_0 + P_1 - (\lambda h)P_1 - (\mu h)P_1 + \lambda \mu h^2 P_1 + (2\mu h)P_2 - (2\lambda \mu h^2)P_2$

$0 = (\lambda h)P_0 - (\lambda h)P_1 - (\mu h)P_1 + (2\mu h)P_2$

$P_2 = \frac{h(\lambda + \mu)}{2h\mu} P_1 - \frac{\lambda h}{2h\mu} P_0$

$$P_2 = \frac{(\lambda + \mu)}{2\mu} P_1 - \frac{\lambda}{2\mu} P_0$$

Rumus ini dapat diuraikan untuk peluang dalam n kedatangan, sehingga P_n dapat dirumuskan:

$$P_n = \frac{(\lambda + (n-1)\mu)}{n\mu} P_{n-1} - \frac{\lambda}{n\mu} P_{n-2} \qquad (3.8)$$

Untuk n = 2, 3, ..., k untuk n ≤ k

3.3.2 Populasi dari n > 2

Akan dicari peluang terdapat n pelanggan pada waktu (t+h) dengan kemungkinan kejadian sebagai berikut:

Tabel 3.3 Jumlah Pelanggan pada Waktu (t+h) pada Model Antrian M/M/k

Kasus	Jumlah pelanggan pada waktu t	Jumlahkedatangan pada waktu h	Jumlah pelayanan pada waktu h	Jumlah pelanggan pada waktu (t + h)
1	n	0	0	n
2	n+1	0	1	n
3	n-1	1	0	n

$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h)(1-2\mu h)$

$P_n(t+h) = P_{n+1}(t)(1-\lambda h)(2\mu h)$

$P_n(t+h) = P_{n-1}(t)(\lambda h)(1-2\mu h)$

Jadi,

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h)(1-2\mu h) + P_{n+1}(t)(1-\lambda h)(2\mu h) + P_{n-1}(t)(\lambda h)(1-2\mu h)$$

Berdasarkan asumsi, untuk h yang kecil berlaku:

$P_n(t+h) = P_n(t)$

Untuk setiap t didapat

$$P_n = P_n(1-\lambda h)(1-2\mu h) + P_{n+1}(1-\lambda h)(2\mu h) + P_{n-1}(\lambda h)(1-2\mu h)$$

$$P_n = P_n - (\lambda h)P_n - 2\mu h P_n + 2\lambda\mu h^2 P_n + (2\mu h)P_{n+1} - 2\lambda\mu h^2 P_{n+1} + (\lambda h)P_{n-1} - 2\lambda\mu h^2 P_{n-1}$$

$$P_n = P_n - (\lambda h)P_n - 2\mu h P_n + (2\mu h)P_{n+1} + (\lambda h)P_{n-1}$$

$$0 = -(\lambda h)P_n - 2\mu h P_n + (2\mu h)P_{n+1} + (\lambda h)P_{n-1}$$

$$(2\mu h)P_{n+1} = (\lambda h)P_n + 2\mu h P_n - (\lambda h)P_{n-1}$$

$$P_{n+1} = \frac{h(\lambda + 2\mu)}{2\mu h} P_n - \frac{\lambda h}{2\mu h} P_{n-1}$$

$$P_{n+1} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{2\mu} P_n - \frac{\lambda}{2\mu} P_{n-1} \text{untuk n} > 2$$

Rumus ini dapat dikembangkan untuk k pelayanan menjadi:

$$P_n = \frac{(\lambda + k\mu)}{k\mu} P_{n-1} - \frac{\lambda}{k\mu} P_{n-2} \text{untuk n } \geq \text{k} + 1 \qquad (3.9)$$

3.3.3 Hubungan Antara n dan k

1. Untuk kasus n < k

Telah diketahui:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu} P_0$$

$$P_2 = \frac{(\lambda + \mu)}{2\mu} P_1 - \frac{\lambda}{2\mu} P_0$$

Dengan melakukan substitusi didapat:

$$P_2 = \frac{(\lambda + \mu)}{2\mu} \frac{\lambda}{\mu} P_0 - \frac{\lambda}{2\mu} P_0$$

$$= \frac{\lambda}{2\mu} P_0 \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu} - 1\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\mu} P_0 \left(\frac{\lambda + \mu - \mu}{\mu}\right)$$

$$= \frac{\lambda}{2\mu} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$$

$$P_2 = \frac{P_0}{2} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2$$

$$P_3 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{3\mu} P_2 - \frac{\lambda}{3\mu} P_1$$

$$= \frac{(\lambda + 2\mu)}{3\mu}\frac{P_0}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 - \frac{\lambda}{3\mu}\frac{\lambda}{\mu}P_0$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(\frac{\lambda + 2\mu}{2.3\mu} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(\frac{\lambda + 2\mu - 2\mu}{2.3\mu}\right)$$

$$= P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\left(\frac{\lambda}{2.3\mu}\right)$$

$$P_3 = P_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\frac{1}{2.3}$$

⋮

$$P_n = P_0\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

Dimana n = 0, 1, 2, ..., k-1

2. Untuk n = k

   Dengan menggunakan rumus dari persamaan (3.8)

$$P_k = \frac{(\lambda + (k-1)\mu)}{k\mu}P_{k-1} - \frac{\lambda}{k\mu}P_{k-2}$$

$$= \frac{(\lambda + (k-1)\mu)}{k\mu}P_0\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} - \frac{\lambda}{k\mu}P_0\frac{1}{(k-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-2}$$

$$= \frac{(\lambda + (k-1)\mu)}{k\mu}\frac{P_0}{(k-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1} - \frac{P_0}{k(k-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{P_0}{k(k-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1}\left(\frac{\lambda + (k-1)\mu}{(k-1)\mu} - 1\right)$$

$$= \frac{P_0}{k(k-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1}\left(\frac{\lambda}{(k-1)\mu}\right)$$

$$= \frac{P_0}{k(k-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}\left(\frac{1}{k-1}\right)$$

$$P_k = \frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

3. Untuk n = k+1

dengan menggunakan pengembangan dari rumus (3.9) didapat

$$P_{k+1} = \frac{(\lambda + k\mu)}{k\mu}P_k - \frac{\lambda}{k\mu}P_{k-1}$$

$$= \frac{(\lambda + k\mu)}{k\mu}\frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k - \frac{\lambda}{k\mu}\frac{P_0}{(k-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{(\lambda + k\mu)}{k\mu}\frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k - \frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$= \frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{\lambda + k\mu}{k\mu} - 1\right)$$

$$= \frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)$$

$$P_{k+1} = \frac{P_0}{k!\,k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

4. Untuk n = k+2

dengan menggunakan pengembangan dari rumus (3.9) didapat

$$P_{k+2} = \frac{(\lambda + k\mu)}{k\mu}P_{k+1} - \frac{\lambda}{k\mu}P_k$$

$$= \frac{(\lambda + k\mu)}{k\mu}\frac{P_0}{k!\,k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} - \frac{\lambda}{k\mu}\frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$$

$$= \frac{(\lambda + k\mu)}{k\mu}\frac{P_0}{k!\,k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} - \frac{P_0}{k!\,k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

$$= \frac{P_0}{k!\,k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}\left(\frac{\lambda + k\mu}{k\mu} - 1\right)$$

$$= \frac{P_0}{k!\,k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)$$

$$P_{k+2} = \frac{P_0}{k!\,k^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+2}$$

$$\vdots$$

$$P_n = \frac{P_0}{k!\,k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} \qquad (3.10)$$

3.3.4 Penentuan Peluang dan Ekspektasi

Langkah terakhir adalah menentukan P_0 untuk n < k dan n ≥ k.

Perlu diketahui bahwa :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$$

P_n juga terbagi menjadi dua kasus:

1. n < k-1
2. n ≥ k

sehingga jumlah peluang dari kedua kasus tersebut adalah 1

$$\sum_{n=0}^{k-1} P_0 \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{P_0}{k!\,k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} = 1$$

$$P_0 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} + \frac{P_0}{k!}\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k^{n-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} = 1$$

$$P_0 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} + \frac{P_0}{k!}\left(\frac{1}{k^{k-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k} + \frac{1}{k^{(k+1)-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} + \frac{1}{k^{(k+2)-k}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+2} + \cdots\right) = 1$$

$$P_0 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} + \frac{P_0}{k!}\left(\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k} + \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+2} + \cdots\right) = 1$$

$$P_0 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} + \frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}\left(1 + \frac{1}{k}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2} + \cdots\right) = 1$$

$$P_0 \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n} + \frac{P_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}\left(\frac{1}{1-\frac{\lambda}{k\mu}}\right) = 1$$

$$P_0\left(\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\left(\frac{k\mu}{k\mu-\lambda}\right)\right)=1$$

$$P_0=\frac{1}{\left(\sum_{n=0}^{k-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n+\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\left(\frac{k\mu}{k\mu-\lambda}\right)\right)}$$

Rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q)

$$L_q=\sum_{n=k}^{\infty}(n-k)P_n$$

$$=\sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k)P_n$$

$$=\frac{k^k}{k!}\sum_{n=k+1}^{\infty}(n-k)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n P_0$$

$$=\frac{k^k}{k!}P_0\left[n\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n-k\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n\right]$$

$$=\frac{k^k}{k!}P_0\left[\sum_{n=k+1}^{\infty}(n+1)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n-(k+1)\sum_{n=k+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^n\right]$$

$$=\frac{k^k}{k!}P_0\left[\left((k+2)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}+(k+3)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}+(k+4)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}+\cdots\right)\right.$$
$$\left.-(k+1)\left(\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}+\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+2}+\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+3}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{k^k}{k!}P_0\left[\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}\left((k+2)+(k+2+1)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)+(k+2+2)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2+\cdots\right)\right.$$
$$\left.-(k+1)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}\left(1+\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)+\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2+\cdots\right)\right]$$

Perhatikan bahwa:

$$a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + \cdots = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$$

$$a = k+2, d = 1, r = \frac{\lambda}{k\mu}$$

Sehingga diperoleh,

$$L_q = \frac{k^k}{k!} P_0 \left[\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1} \left(\frac{(k+2)}{1-\frac{\lambda}{k\mu}} + \frac{\frac{\lambda}{k\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right) - (k+1)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1} \left(\frac{1}{1-\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)} \right) \right]$$

$$= \frac{k^k}{k!} P_0 \left[\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1} \left(\frac{(k+2)\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right) + \frac{\lambda}{k\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right) - (k+1) \left(\frac{\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}}{1-\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)} \right) \right]$$

$$= \frac{k^k}{k!} P_0 \left[\frac{(k+2)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1} - (k+2)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+2} + \left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+2}}{\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right.$$

$$\left. -(k+1) \frac{\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{k^k}{k!} P_0 \left[\frac{(k+2)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1} - (k+1)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+2}}{\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right.$$

$$\left. - \frac{(k+1)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1} - (k+1)\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{k^k}{k!} P_0 \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{k+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right]$$

$$= \frac{\frac{k^k}{k^{k+1}}}{k!} P_0 \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}{\left(1-\frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right]$$

$$L_q = \frac{1}{k.k!} P_0 \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right] \tag{3.11}$$

Rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem (L_s)

$$L_s = \frac{1}{k.k!} P_0 \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) \tag{3.12}$$

Rata-rata waktu yang dibutuhkan seorang pelanggan dalam sistem (W_s)

$$W_s = \frac{\frac{1}{k.k!} P_0 \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{\lambda} \tag{3.13}$$

Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian (W_q)

$$W_q = \frac{\frac{1}{k.k!} P_0 \left[\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}}{\left(1 - \frac{\lambda}{k\mu}\right)^2} \right]}{\lambda} \tag{3.14}$$

(Kakiay, 2004:90)

3.4 Model Antrian M/M/1 Pola Kedatangan Berkelompok

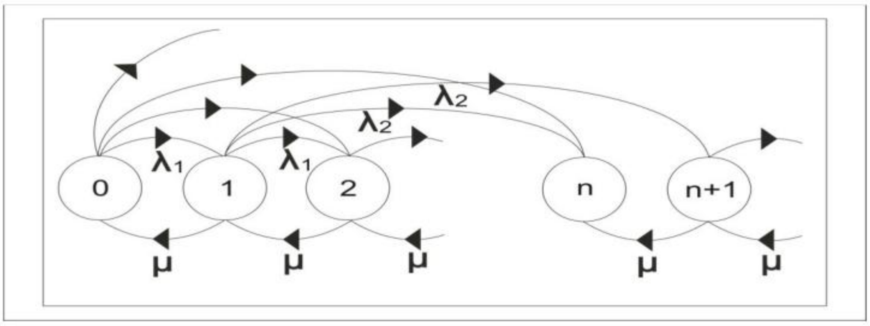
Pada model antrian ini para pelanggan datang secara berkelompok pada waktu yang sama dan mendapat pelayanan secara bergiliran. Jumlah pelanggan dalam kelompok yang satu berbeda dengan kelompok yang lain. Misalkan dalam antrian pembuatan SIM, pemohon SIM yang datang untuk melakukan ujian simulator datang secara berkelompok tergantung dari jumlah pemohon yang lulus pada tahap ujian tulis dimana jumlah pemohon yang lulus pada kelompok satu, dua dan selanjutnya berbeda-beda. Jadi, jumlah pelanggan dalam satu kelompok yang datang selalu acak.

Model antrian M/M/1 pola kedatangan berkelompok dinotasikan dengan M^X/M/1. Pada model antrian M^X/M/1, ukuran suatu kelompok yang masuk kedalam suatu sistem antrian merupakan variabel acak positif X. Jika laju kedatangan suatu kelompok yang terdiri dari k pelanggan dinyatakan dengan λ_k maka peluang kedatangan suatu kelompok berukuran k yaitu:

$$P(X = k) = a_k = \frac{\lambda_k}{\lambda}$$

Dimana $\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$

Berikut ini adalah ilustrasi gambar untuk model antrian M/M/1 dengan kedatangan kelompok acak, dengan jumlah pelanggan dalam kelompok satu, dua atau n pelanggan:



Gambar 3.3Pola Kedatangan Berkelompok Acak

Berdasarkan (Anaviroh, 2011:60),dari gambar di atas kemungkinan-kemungkinan kejadian saling lepas yang dapat terjadi dengan pola kedatangan berkelompok yang berukuran k ($1 \leq k \leq n$) jika terdapat n ($n > 0$) pelanggan dalam sistem pada waktu (t+h) adalah sebagai berikut:

Tabel 3.4 Jumlah Pelanggan pada Waktu (t+h) padaModel Antrian $M^X/M/1$

Kasus	Jumlah pelanggan pada waktu t	Jumlahkedatangan pada waktu h	Jumlah pelayanan pada waktu h	Jumlah pelanggan pada waktu (t + h)
1	n	0	0	n
2	n + 1	0	1	n
3	n – k	k	0	n

4	n	1	1	n

Peluang satu kedatangan secara individu selama periode $\Delta t = h$ adalah λh. Sedangkan pada model antrian dengan pola kedatangan berkelompok, peluang satu kedatangan yang terdiri dari k pelanggan selama periode $\Delta t = h$ adalah $\lambda a_k h$ dimana a_k merupakan distribusi ukuran kelompok kedatangan.

Berdasarkan tabel 3.4 terlihat perbedaan kemungkinan kejadian pada model antrian M/M/1 dengan model antrian M^X/M/1 yaitu pada kasus ketiga. Kasus ketiga dapat diuraikan sebagai berikut:

$P_n(t+h)$= peluang kedatangan berukuran 1 + peluang kedatangan berukuran 2 + ... + peluang kedatangan berukuran n

$$= P_{n-1}(t)\,(\lambda a_1 h)\,(1-\mu h) + P_{n-2}(t)\,(\lambda a_2 h)\,(1-\mu h) + \dots + P_0(t)\,(\lambda a_n h)\,(1-\mu h)$$

$$= P_{n-1}(t)\,(\lambda a_1 h) + P_{n-2}(t)\,(\lambda a_2 h) + \dots + P_0(t)\,(\lambda a_n h)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P_{n-k}(t)\lambda a_k h$$

maka $P_n(t+h)$ pada kasus model antrian dengan pola kedatangan berkelompok yaitu:

$P_n(t+h) = \text{kasus 1} + \text{kasus 2} + \text{kasus 3} + \text{kasus 4}$

$$= P_n(\mathrm{t})(1 - \lambda h - \mu h) + P_{n+1}(\mathrm{t})(\mu h) + \sum_{k=1}^{n} P_{n-k}(t)\lambda a_k h$$

$$= P_n(\mathrm{t}) - \lambda h P_n(\mathrm{t}) - \mu h P_n(\mathrm{t}) + \mu h P_{n+1}(\mathrm{t}) + \sum_{k=1}^{n} P_{n-k}(t)\lambda a_k h$$

Berdasarkan asumsi, untuk h yang kecil berlaku:

$P_n(t) = P_n(t+h)$

$$P_n(t) = P_n(\mathrm{t}) - \lambda h P_n(\mathrm{t}) - \mu h P_n(\mathrm{t}) + \mu h P_{n+1}(\mathrm{t}) + \sum_{k=1}^{n} P_{n-k}(t)\lambda a_k h$$

$$0 = -\lambda h P_n(\mathrm{t}) - \mu h P_n(\mathrm{t}) + \mu h P_{n+1}(\mathrm{t}) + \sum_{k=1}^{n} P_{n-k}(t)\lambda a_k h$$

$$0 = -(\lambda + \mu)hP_n(\mathrm{t}) + \mu hP_{n+1}(\mathrm{t}) + \sum_{k=1}^{n} P_{n-k}(t)\lambda a_k h \text{ , untuk n } \geq 1$$

Berdasarkan perumusan pada model antrian M/M/1 sebelumnya didapatkan:

$\lambda P_0 = \mu P_1$

$$\mu P_1 - \lambda P_0 = 0 \qquad (3.15a)$$

Untuk n ≥ 1

$$0 = -(\lambda + \mu)P_n + \mu P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} P_{n-k}\lambda a_k \text{ , untuk setiap t} \qquad (3.15b)$$

Perumusan peluang dan ekspektasi model antrian M^X/M/1 adalah sebagai berikut:

1. Peluang fasilitas pelayanan akan kosong (P_0), yaitu:

$$P_0 = 1 - \frac{\lambda \bar{a}}{\mu} \qquad (3.16)$$

Dengan $\bar{a} = E(X)$ adalah nilai harapan ukuran kelompok yang masuk dalam sistem.

2. Rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem (L_s), yaitu:

$$L_s = \frac{\left(\rho + \frac{\lambda}{\mu}E(X^2)\right)}{2(1-\rho)} \qquad (3.17)$$

atau

$$L_s = \left(\frac{K+1}{2}\right)\frac{\rho}{1-\rho} \qquad (3.18)$$

3. Rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q), yaitu:

$$L_q = \frac{\left(\rho + \frac{\lambda}{\mu}E(X^2)\right)}{2(1-\rho)} - \rho \qquad (3.19)$$

atau

$$L_q = \left(\frac{K+1}{2}\right)\frac{\rho}{1-\rho} - \rho \qquad (3.20)$$

4. Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem (W_s), yaitu:

$$W_s = \frac{\left(\rho + \frac{\lambda}{\mu}E(X^2)\right)}{2\lambda E(X)(1-\rho)} \tag{3.21}$$

atau

$$W_s = \frac{1}{2\mu(1-\rho)}\left[\frac{K+K^2}{K}\right] \tag{3.22}$$

5. Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian (W_q), yaitu:

$$W_q = \frac{\left(\rho + \frac{\lambda}{\mu}E(X^2)\right)}{2\lambda E(X)(1-\rho)} - \frac{1}{\mu} \tag{3.23}$$

atau

$$W_q = \frac{1}{2\mu(1-\rho)}\left[\frac{K^2 - K(1-2\rho)}{K}\right] \tag{3.24}$$

(Anaviroh, 2011:73-77)

3.5 Model Antrian M/M/1 Pola Pelayanan Berkelompok

Model antrian M/M/1 dengan pelayanan berkelompok adalah suatu sistem antrian yang pelayanannya mampu melayani pelanggan secara berkelompok/borongan sebanyak k pelanggan dalam satu waktu. Namun jika jumlah pelanggan yang datang kurang dari k pelanggan maka pelanggan tersebut akan tetap mendapatkan pelayanan tanpa harus menunggu hingga k pelanggan. Model antrian M/M/1 dengan pelayanan berkelompok dinotasikan dengan $M/M^K/1$.

Contoh kasus pada model antrian ini adalah antrian ujian teori pada proses pembuatan SIM di Polrestabes Bandung, dimana ruang ujian memuat paling banyak 20 pemohon.

Selanjutnya akan dicari perumusan probabilitas dan ekspektasi dari model antrian $M/M^K/1$. Pertama-tama akan dicari kemungkinan kejadian-kejadian saling lepas dimana P_0 dapat muncul pada saat (t+h):

1. Tidak terdapat kedatangan pada saat t ($P_0(t)$), tidak ada kedatangan dengan peluang $(1-\lambda h)$ dan tidak ada pelayanan dengan peluang 1.
2. Terdapat i pelanggan pada saat t ($P_i(t)$), tidak ada kedatangan dengan peluang $(1-\lambda h)$ dan terdapat i pelanggan yang dilayani dengan $i = 1, 2, \dots, k$ dengan peluang (μh)

Dengan demikian

$$P_0(t+h) = P_0(t)(1-\lambda h) + P_i(t)(1-\lambda h)(\mu h)$$

Berdasarkan asumsi, untuk h yang kecil berlaku:

$$P_0(t+h) = P_0(t)$$

Maka

$$P_0(t) = P_0(t)(1-\lambda h) + P_i(t)(1-\lambda h)(\mu h)$$

$$P_0(t) = P_0(t) - \lambda h P_0(t) + \mu h \sum_{i=1}^{k} P_i(t)$$

$$0 = -\lambda P_0(t) + \mu \sum_{i=1}^{k} P_i(t) \qquad (3.25)$$

Selanjutnya akan ditentukan kemungkinan-kemungkinan n pelanggan dapat muncul pada saat (t+h) seperti yang terlihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 3.5 Jumlah Pelanggan pada Waktu (t+h) Pada Model Antrian $M/M^K/1$

Kasus	Jumlah Pelanggan pada Waktu t	Jumlah Kedatangan pada Waktu h	Jumlah Pelayanan pada Waktu h	Jumlah Pelanggan pada waktu (t+h)
1	n	0	0	n

2	n – 1	1	0	n
3	n + k	0	k	n

Berdasarkan tabel di atas, terlihat perbedaan kemungkinan kejadian pada model antrian M/M/1 dengan model antrian $M/M^K/1$ yaitu pada kasus ketiga. Kasus ketiga dapat diuraikan sebagai berikut:

$P_n(t+h) = P_{n+k}(t)(1-\lambda h)(\mu h)$

Maka P_n (t+h) pada kasus model antrian $M/M^K/1$ yaitu:

$P_n(t+h) = \text{kasus 1} + \text{kasus 2} + \text{kasus 3}$

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h)(1-\mu h) + P_{n-1}(t)(\lambda h)(1-\mu h) + P_{n+k}(t)(1-\lambda h)(\mu h)$$

$$P_n(t+h) = P_n(t)(1-\lambda h-\mu h) + P_{n-1}(t)(\lambda h) + P_{n+k}(t)(\mu h)$$

$$P_n(t+h) = P_n(t) - \lambda h P_n(t) - \mu h P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + \mu h P_{n+k}(t)$$

Berdasarkan asumsi, untuk h yang kecil berlaku:

$P_n(t+h) = P_n(t)$

Sehingga

$$P_n(t) = P_n(t) - \lambda h P_n(t) - \mu h P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + \mu h P_{n+k}(t)$$

$$0 = -\lambda h P_n(t) - \mu h P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + \mu h P_{n+k}(t)$$

$$0 = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+k}(t) \qquad (n \geq 1) \qquad (3.26)$$

Persamaan (3.25) dan (3.26) dapat ditulis kembali menjadi

$$0 = \mu P_k + \mu P_{k-1} + \cdots + \mu P_1 - \lambda P_0 \qquad (3.27)$$

$$0 = -(\lambda+\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + \mu P_{n+k} (n \geq 1) \qquad (3.28)$$

Berdasarkan buku *Fundamentals of Queueing Theory*,Persamaan (3.28) dapat dinyatakan sebagai:

$$[\mu D^{k+1} - (\lambda+\mu)D + \lambda]P_n = 0 \qquad (n \geq 0) \qquad (3.29)$$

Dimana D merupakan persamaan karakteristik

Misalkan $r_1, r_2, \dots, r_{k+1}$ adalah akar-akar dari persamaan karakteristik, maka

$$P_n = \sum_{i=1}^{k+1} C_i r_i^n \qquad (n \geq 0)$$

Dengan C_i adalah konstanta

Kita tahu bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, sehingga masing-masing r_i harus kurang dari satu atau $C_i = 0$ untuk semua r_i yang lebih dari satu. Sehingga dapat di ketahui bahwa jumlah dari seluruh akar kurang dari satu. Berdasarkan teorema rouche hanya terdapat satu akar katakanlah r_0 yang nilainya berada pada selang (0,1) sehingga

$$P_n = Cr_0^n \qquad (n \geq 0, 0 < r_0 < 1)$$

Dengan menggunakan kondisi batas dan $\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1$, kita dapatkan

$$C = P_0 = 1 - r_0$$

Maka

$$P_n = (1 - r_0)r_0^n (n \geq 0, 0 < r_0 < 1) \tag{3.30}$$

Selanjutnya akan dicari ekspektasi dari model antrian M/M^K/1. Karena bentuk di atas serupa dengan model antrian M/M/1, kita dapat menulis

1. Rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem (L_s)

$$L_s = \frac{r_0}{1 - r_0} \tag{3.31}$$

2. Rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q)

$$L_q = \frac{r_0}{1 - r_0} - r_0 \tag{3.32}$$

3. Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem (W_s)

$$W_s = \frac{\frac{r_0}{1-r_0}}{\mu r_0} = \frac{1}{\mu(1 - r_0)} \tag{3.33}$$

4. Rata-rata jumlah waktu yang dibutuhkan seorang pelanggan dalam antrian (W_q)

$$W_q = \frac{\frac{r_0}{1-r_0} - r_0}{\mu r_0} = \frac{r_0}{\mu(1 - r_0)} \tag{3.34}$$