

**PERLUASAN RUANG ORLICZ—MORREY VERSI NAKAI**

**SKRIPSI**

Diajukan untuk memenuhi sebagian syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika



Oleh

Rifkhi Akbar Putra Rustandi

2007397

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA  
2024**

# Perluasan Ruang Orlicz—Morrey Versi Nakai

Oleh  
Rifkhi Akbar Putra Rustandi

Sebuah skripsi yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika pada Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

© Rifkhi Akbar Putra Rustandi 2024  
Universitas Pendidikan Indonesia  
Agustus 2024

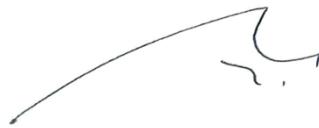
Hak Cipta dilindungi undang-undang.  
Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian,  
dengan dicetak ulang, difoto kopi, atau cara lainnya tanpa ijin dari penulis

**LEMBAR PENGESAHAN**

**PERLUASAN RUANG ORLICZ—MORREY VERSI NAKAI**

**RIFKHI AKBAR PUTRA RUSTANDI**  
**2007397**

Disetujui dan disahkan oleh:  
Pembimbing I



Dr. Al Azhary Masta, M.Si.  
NIP. 199006102015041001

Mengetahui,  
Pembimbing II



Dr. H. Cece Kustiawan, M.Si.  
NIP. 196612131992031001

Mengetahui,  
Ketua Prodi Matematika



Dr. Kartika Yulianti, M.Si.  
NIP. 198207282005012001

## LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul “Perluasan Ruang Orlicz—Morrey Versi Nakai” beserta seluruh isinya adalah benar-benar karya saya sendiri. Saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika ilmu yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung risiko/sanksi apabila dikemudian hari ditemukan adanya pelanggaran etika keilmuan atau ada klaim dari pihak lain terhadap keaslian karya saya ini.

Bandung, Agustus 2024

Penulis,



Rifkhi Akbar Putra Rustandi

NIM. 2007397

## KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadiran Allah SWT. karena dengan rahmat, karunia, serta taufik dan hidayah-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Perluasan Ruang Orlicz—Morrey Versi Nakai” sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia (UPI).

Penulis menyadari bahwa masih terdapat kekurangan dalam penyusunan skripsi ini dikarenakan keterbatasan pengetahuan dan pengalaman yang dimiliki penulis. Oleh karena itu, penulis menerima kritik dan saran yang dapat membangun penelitian ini. Penulis berharap skripsi ini dapat bermanfaat untuk berbagai pihak, baik penulis sendiri maupun para pembaca.

Bandung, Agustus 2024

Penulis,



Rifkhi Akbar Putra Rustandi

NIM. 2007397

## UCAPAN TERIMA KASIH

Penulisan skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, bantuan, dan do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis ingin menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Kedua orang tua penulis yaitu Rustandi dan Siti Nurjanah serta adik penulis yaitu Alike Zahira yang telah memberikan dukungan moral, dukungan materil, kasih sayang, semangat, serta do'a yang terus dipanjatkan kepada penulis sehingga penyusunan skripsi bisa berjalan dengan lancar.
2. Bapak Dr. Al Azhary Masta, M.Si., selaku Dosen Pembimbing yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, masukan dan motivasi yang banyak membantu penulis dari awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Cece Kustiawan, M.Si., selaku Dosen Pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, masukan dan motivasi yang banyak membantu penulis dari awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.
4. Ibu Dr. Kartika Yulianti, M.Si., selaku Ketua Program Studi Matematika UPI yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan arahan, masukan dan motivasi yang banyak membantu penulis dari awal hingga akhir penyusunan skripsi ini.
5. Ibu Prof. Siti Fatimah, Ph.D., selaku Dosen Pembimbing Akademik yang telah meluangkan waktunya untuk membantu dalam pendampingan akademik perkuliahan, memberikan arahan dan motivasi yang banyak membantu penulis dari awal perkuliahan.
6. Seluruh dosen dan civitas akademika di lingkungan Departemen Pendidikan Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia.
7. Rekan-rekan mahasiswa Matematika UPI 2020 dan rekan-rekan mahasiswa lainnya yang telah memberikan dukungan, motivasi, bantuan, dan kebersamaan selama menjalankan studi jenjang S1.
8. Pihak lainnya yang tidak bisa disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menempuh perkuliahan dan menyelesaikan skripsi ini.

## ABSTRAK

### Perluasan Ruang Orlicz—Morrey Versi Nakai

Oleh: Rifkhi Akbar Putra Rustandi

Ruang Lebesgue merupakan ruang yang banyak dikaji dan dikembangkan. Salah satunya adalah ruang Orlicz yang merupakan perumuman dari ruang Lebesgue yang dikaji oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz (1931). Selain itu, ruang Morrey juga merupakan perumuman dari ruang Lebesgue yang dikaji oleh C. B. Morrey (1938). Selanjutnya, Nakai (2006) telah membuat kajian dalam memperumum ruang Morrey. Selain mengkaji perumuman ruang Morrey, Nakai juga menggabungkan ruang tersebut dengan ruang Orlicz yang dinamakan ruang Orlicz—Morrey. Kemudian, Dermawan, dkk. (2022) mendefinisikan sebuah fungsi Young yang diperluas atau dinamakan fungsi Young diperluas. Berdasarkan hasil kajian tentang ruang Orlicz—Morrey dan fungsi Young diperluas, pada penelitian ini akan dikaji mengenai ruang Orlicz—Morrey dengan mengganti fungsi Young menjadi fungsi Young diperluas. Adapun hasil penelitian skripsi didefinisikan ruang Orlicz—Morrey diperluas, serta dikaji sifat-sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang tersebut.

**Kata kunci:** ruang Orlicz—Morrey diperluas, ruang Orlicz—Morrey, fungsi Young, fungsi Young diperluas, sifat Inklusi, ketaksamaan Hölder.

## *ABSTRACT*

### **Generalized Orlicz—Morrey Space Nakai's Version**

By: Rifkhi Akbar Putra Rustandi

Lebesgue space is a space that is widely studied and developed. One of them is Orlicz space which is a generalization of Lebesgue space studied by Z. W. Birnbaum and W. Orlicz (1931). In addition, Morrey space is also a generalization of Lebesgue space studied by C. B. Morrey (1938). Furthermore, Nakai (2006) has made a study in generalizing Morrey spaces. In addition to studying the generalization of Morrey space, Nakai also combines the space with Orlicz space called Orlicz-Morrey space. Then, Dermawan, et al. (2022) defined an extended Young function or called the extended Young function. Based on the results of the study of Orlicz-Morrey space and extended Young's function, this research will study the Orlicz-Morrey space by changing the Young's function into an extended Young's function. The thesis research results defined the extended Orlicz-Morrey space, and studied the properties of inclusion and Hölder's inequality on the space.

**Key words:** generalized Orlicz—Morrey space, Orlicz—Morrey space, Young function, generalized Young function, Inclusion property, Hölder's Inequality .



## DAFTAR ISI

<b>LEMBAR PENGESAHAN .....</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR PERNYATAAN .....</b>	<b>i</b>
<b>UCAPAN TERIMA KASIH.....</b>	<b>iv</b>
<b>ABSTRAK .....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>vi</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>vii</b>
<b>BAB I Pendahuluan.....</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	4
1.3 Batasan Masalah.....	4
1.4 Tujuan Penelitian.....	5
1.5 Manfaat Penelitian.....	5
1.6 Sistematika Penulisan .....	5
<b>BAB II Kajian Pustaka.....</b>	<b>7</b>
2.1 Fungsi .....	7
2.2 Ruang Bernorma dan Ruang Banach .....	7
2.3 Fungsi Konveks dan Konveks-s .....	9
2.4 Fungsi Young dan Young-s.....	12
2.5 Ruang Lebesgue .....	16
<b>BAB III Metode Penelitian .....</b>	<b>20</b>
<b>BAB IV Ruang Orlicz dan Ruang Morrey .....</b>	<b>21</b>
4.1 Ruang Orlicz.....	21
4.2 Ruang Morrey.....	29
<b>BAB V Perluasan Ruang Orlicz—Morrey .....</b>	<b>31</b>
5.1 Ruang Orlicz—Morrey.....	31
5.2 Sifat Inklusi pada Ruang Orlicz—Morrey .....	41
5.3 Ketaksamaan Hölder pada Ruang Orlicz—Morrey .....	42
5.4 Perluasan Ruang Orlicz—Morrey .....	43
5.5 Sifat Inklusi pada ruang Orlicz—Morrey diperluas .....	59
5.6 Ketaksamaan Hölder diperumum pada Ruang Orlicz—Morrey diperluas .	65
<b>BAB VI Kesimpulan dan Saran.....</b>	<b>68</b>

6.1 Kesimpulan.....	68
6.2 Saran.....	68
<b>DAFTAR PUSTAKA.....</b>	<b>69</b>

## DAFTAR PUSTAKA

- Bakery, A. A., & Elmatty, A. R. A. (2020). Some properties of pre-quasi norm on Orlicz sequence space. *Journal of Inequalities and Applications*, 2020(1), 1-13.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Introduction to real analysis* (Vol. 2). New York: Wiley
- Dermawan, R., Fatimah, S., Hazmy, S. A., Masta, A. A., & Kustiawan, C. (2023). Generalization of young's function. *AIP Conference Proceedings* 2734(1). doi: <https://doi.org/10.1063/5.0156150>
- Ifronika, Idris, M., Masta, A. A., & Gunawan, H. (2018). Generalized Hölder's Inequality in Morrey Spaces. *Matematicki Vesnik*, 70(4)
- Kustiawan, C., Dasep, D., Sumiaty, E., Fatimah, S., & Al Hazmy, S. (2023). Generalized Orlicz Sequence Spaces. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, 17(1), 0427-0438
- Kreyszig, E. 1978. "Introductory Functional Analysis with Applications," Canada: John Wiley & Sons Inc
- Léonard, C. (2007). Orlicz Spaces. Retrieved Januari 7, 2022, from <http://leonard.perso.math.cnrs.fr/papers/Leonard-Orlicz%20spaces.pdf>
- Luxemburg, W. A. (1955). *Banach Function Spaces*. Thesis: Technische Hogeschool te Delft.
- Masta, A. A. (2018). *Sifat Inklusi pada Ruang Orlicz-Morrey*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Masta, A. A., Gunawan, H., & Setya-Budhi, W. (2016). Inclusion property of Orlicz and weak Orlicz spaces. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 48-3, 193-203
- Masta, A. A., Gunawan, H. dan Setya-Budhi, W. (2017a): An inclusion property of Orlicz–Morrey, *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1(893), pp. 12.
- Masta, A. A., Gunawan, H., & Setya-Budhi, W. (2017b). On inclusion properties of two versions of Orlicz–Morrey spaces. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14, 1-12.

- Nakai, E. (2004): Orlicz–Morrey spaces and some integral operators, research report [http://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/26035/1/1399-13.pdf, accessed on August 17, 2015.], 144–156.
- Nakai, E. (2006). On Orlicz-Morrey spaces (The structure of Banach spaces and Function spaces). 数理解析研究所講究録, 1520, 78-88
- Orlicz, W. (1992). Linear Functional Analysis (Series in Real Analysis Volume 4). Singapore: World Scientific.
- Rao, M., & Ren, Z. (1991). Theory of Orlicz spaces. New York: Marcel Dekker, Inc
- Roberts, A. W., & Varberg, D. E. (1973). Convex Functions. New York and London: Academic Press, Inc
- Sawano, Y., Sugano, S., & Tanaka, H. (2010). A note on generalized fractional integral operators on generalized Morrey spaces. Boundary Value Problems, 2009, 1-18.
- Sawano, Y., Sugano, S., & Tanaka, H. (2012). Orlicz–Morrey spaces and fractional operators. Potential Analysis, 36(4), 517-556
- Tseng, K. L., Hwang, S. R., & Dragomir, S. S. (2007). On some new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér type involving convex functions. Demonstratio Mathematica, 40(1), 51-64.
- Welland, R. (1966). Inclusion relations among Orlicz spaces. Proceedings of the American Mathematical Society, 17(135)