BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Berbicara mengenai perkembangan ruang fungsi, salah satu ruang yang sering menjadi kajian adalah ruang Lebesgue L_p. Alasan dari banyaknya kajian mengenai ruang Lebesgue salah satunya adalah memberikan jalan yang luas dalam menciptakan keberagaman ruang Lebesgue itu sendiri, yang mana dapat digunakan dalam eksplorasi ke ruang fungsi lainnya. Salah satu hasil kajian mengenai ruang Lebesgue adalah ruang Orlicz yang diperkenalkan oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz pada tahun 1931. Kajian tersebut memperkenalkan bahwa ruang Orlicz L_Φ adalah perumuman dari ruang Lebesgue L_p dengan kasus $1 \leq p < \infty$. Terdapat dua tipe ruang Orlicz, yaitu ruang Orlicz kontinu dan ruang Orlicz barisan. Hasil kajian mengenai ruang Orlicz memberikan beberapa kerangka penelitian baru, diantaranya adalah mengenai ruang Orlicz kontinu, yang sudah dikaji oleh Maligranda, L. (1989), Rao, M. (1991), Masta, A. A. (2016). Untuk ruang barisan Orlicz sudah dikaji oleh Maligranda, L. & Mastylo, M. (2000), Awad A. Bakery & Rafaf, R. (2020).

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai ruang Orlicz, akan diperkenalkan ruang Lebesgue sebagai ruang dasar dalam pengembangan ruang Orlicz. Definisi dari ruang Lebesgue tersebut adalah:

Misalkan $X = \mathbb{R}^n$ adalah himpunan terukur, ruang Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$ dimana $0 < p < \infty$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

dengan norma

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Berbicara mengenai ruang Orlicz, salah satu dasar dalam mengontruksi ruang Orlicz adalah fungsi Young. Sebelum membahas lebih lanjut, akan diperkenalkan mengenai fungsi Young. Definisi dari fungsi Young tersebut adalah sebagai berikut:

Suatu fungsi $\Phi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ dikatakan fungsi Young jika Φ adalah fungsi konveks, $\Phi(0) = 0$, $\lim_{t \to \infty} \Phi(t) = \infty$ dan Φ kontinu (Masta, 2018).

Contoh dari fungsi Young adalah

$$\Phi(x) = x^2, x \in [0, \infty)$$

dimana fungsi tersebut adalah fungsi konveks, $\Phi(0) = 0, \lim_{t \to \infty} \Phi(t) = \infty$, dan Φ merupakan fungsi kontinu sehingga fungsi diatas dikatakan fungsi Young.

Fungsi Young inilah yang akan menjadi dasar dalam mengontruksi ruang Orlicz. Ruang Orlicz dikontruksi dengan melakukan perumuman pada fungsi yang digunakan dalam ruang Lebesgue. Setelah berhasil dalam mengontruksi ruang Orlicz, terdapat beberapa peneliti yang mengkaji mengenai ruang Orlicz, salah satunya adalah kajian mengenai perumuman dari ruang Orlicz oleh M. Rao dan Z. Ren pada tahun 1991. Berikut merupakan definisi perumuman dari ruang Orlicz:

Untuk Φ fungsi Young, ruang Orlicz $L_\Phi(\mathbb{R}^n)$ didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dimana terdapat $a > 0$ sedemikian sehingga

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(a|f(x)|)\, dx < \infty.$$

(Rao & Ren, 1991)

Salah satu contoh dari perumuman ruang Orlicz dapat dilihat dengan mengambil fungsi Young $\Phi = x^2$. Dimana norma pada ruang Orlicz tersebut

$$\|f\|_{L_\Phi(\mathbb{R}^n)} = \inf\left\{ b > 0: \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{|f(x)|}{b}\right)^2 dx \leq 1 \right\} < \infty$$

$$= \inf\left\{ b > 0: \frac{1}{b^2} \int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx \leq 1 \right\} < \infty.$$

Nilai infimum akan tercapai apabila $b = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx}$, sehingga

$$\|f\|_{L_\Phi(\mathbb{R}^n)} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx}\,.$$

Selain ruang Orlicz sebagai hasil kajian dari ruang Lebesgue, terdapat juga ruang Morrey $L_{p,\lambda}$ sebagai perumuman dan perluasan dari ruang Lebesgue L_p. Kajian mengenai ruang Morrey diperkenalkan oleh C. B. Morrey pada tahun 1938. Ruang Morrey juga memiliki beberapa variasi yaitu ruang Morrey $\mathcal{M}_p^q$, sehingga ruang Morrey $L_{p,\lambda}$ disebut sebagai ruang Morrey klasik. Berikut adalah definisi dari ruang Morrey:

Misalkan $1 \leq p \leq q < \infty$ dan $0 \leq \lambda < n$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Suatu himpunan

$$\{f \in L_{loc}^p(\mathbb{R}^n) \colon \|f\|_{\mathcal{M}_q^p} < \infty\}$$

Yang dilengkapi dengan

$$\|f\|_{\mathcal{M}_\phi^p} = \sup_{r>0, a\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{r^\lambda} \int_{B(a,r)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

didefinisikan sebagai ruang Morrey. (C.B. Morrey, 1938)

Kajian mengenai ruang Morrey terus dikembangkan, terdapat beberapa kajian mengenai ruang Morrey, salah satunya adalah kajian oleh E. Nakai pada tahun 2004. E. Nakai dalam kajiannya mengenai ruang Morrey diperumum, Nakai mengontruksi ruang Morrey menggunakan fungsi $\phi \colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ dimana ϕ hampir turun dimana-mana dan $r\phi(r)$ hampir naik dimana-mana. Selain itu, berdasarkan ruang Orlicz dan ruang Morrey, Nakai juga mendefinisikan ruang Orlicz—Morrey hasil penggabungan ruang Orlicz dan ruang Morrey diperumum. Adapun definisi dari ruang Orlicz—Morrey sebagai berikut:

Misalkan $\mathcal{G}$ adalah koleksi semua $\phi \colon (0, \infty) \to (0, \infty)$ dimana ϕ hampir turun dimana-mana dan $r\phi(r)$ hampir naik dimana-mana. Selanjutnya untuk Φ sebagai fungsi Young dan $\phi \in \mathcal{G}$, didefinisikan himpunan

$$L_{\phi,\Phi}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^1 \colon \|f\|_{L_{\phi,\Phi}} < \infty \right\}$$

yang dilengkapi

$$\|f\|_{L_{\phi,\Phi}} = \sup_{r>0, a\in\mathbb{R}^n} \|f\|_{(\phi,\Phi,B(a,r))}$$

dengan $\|f\|_{(\phi,\Phi,B)} = \inf\left\{ b > 0 : \frac{1}{|B|\phi(|B|)} \int_B \Phi\left(\frac{f(x)}{b}\right) d\mu \leq 1 \right\}$ dan $B : B(a,r)$ adalah bola yang berpusat di $a \in \mathbb{R}^n$ dan berjari-jari r positif. Keterkaitan mengenai ruang Orlicz—Morrey dengan ruang Orlicz dan ruang Morrey dapat dilihat apabila dipilih $\phi(r) = \frac{1}{r}$, maka $\|f\|_{L_{\phi,\Phi}} = \|f\|_{L_\Phi}$, yang mana menunjukkan jika ruang Orlicz—Morrey merupakan perumuman dari ruang Orlicz. Selain itu, jika dipilih $\Phi(r) = r^p$, untuk $1 \leq p < \infty$ dan $\phi(r) = r^{-1+\frac{\lambda}{n}}$ dimana $0 \leq \lambda \leq n$, maka diperoleh $\|f\|_{L_{p,\phi}}$ dan $\|f\|_{L_{p,\lambda}}$ ekuivalen, hal ini menunjukkan jika ruang Orlicz—Morrey merupakan perumuman dari ruang Morrey.

Kajian demi kajian mengenai ruang Orlicz—Morrey membuat penulis termotivasi untuk mengkaji ruang Orlicz—Morrey dengan versi yang lain. Berbeda dengan definisi Nakai, penulis memodifikasi fungsi Young yang digunakan dalam ruang Orlicz—Morrey menggunakan fungsi Young diperluas yang didefinisikan oleh Dermawan pada tahun 2022. Dari hasil kajian Dermawan, dkk., (2022) mengenai fungsi Young diperluas pada ruang Orlicz diperluas, fungsi tersebut dapat digunakan untuk mengontruksi ruang Orlicz—Morrey diperluas dengan mengganti fungsi Young dengan fungsi Young diperluas. Setelah itu penulis akan mengkaji juga sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder yang berlaku pada ruang Orlicz—Morrey diperluas.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah dikemukakan di atas, rumusan masalah pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana mengontruksi ruang Orlicz—Morrey versi Nakai diperluas?
2. Bagaimana keterkaitan antara ruang Orlicz—Morrey diperluas dengan ruang Orlicz—Morrey versi Nakai?
3. Bagaimana sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz—Morrey versi Nakai diperluas?

1.3 Batasan Masalah

Penelitian ini berfokus pada fungsi Young yang domain dan kodomain real non-negatif. Selanjutnya dengan menggunakan fungsi Young diperluas, akan dikontruksi ruang Orlicz—Morrey diperluas serta akan dikaji keterkaitannya dengan ruang Orlicz—Morrey dan sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder pada ruang Orlicz—Morrey diperluas.

1.4 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penulisan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengontruksi ruang Orlicz—Morrey diperluas.
2. Mencari keterkaitan antara ruang Orlicz—Morrey diperluas dengan ruang Orlicz—Morrey
3. Memperoleh sifat inklusi dan ketaksamaan Hölder dari ruang Orlicz—Morrey diperluas.

1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat menambah referensi baik bagi para pembaca maupun dalam memperdalam kajian mengenai ruang Orlicz—Morrey. Selain itu, penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi para peneliti selanjutnya terutama peneliti yang mengkaji topik serupa dengan memberikan inspirasi atau gambaran mengenai ruang Orlicz—Morrey diperluas.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan penelitian ini diawali oleh pendahuluan, dimana bab ini menjelaskan mengenai latar belakang penelitian, rumusan masalah, tujuan penelitian dan manfaat penelitian. Selanjutnya terdapat kajian pustakan yang mengandung teori-teori yang mendukung penelitian yang selanjutnya akan dibahas. Beberapa teori yang dibahas seperti definisi ruang vektor dan ruang Banach. Lalu dilanjutkan bahasan mengenai fungsi fungsi konveks, fungsi konveks-s. Terakhir dibahas mengenai fungsi Young dan fungsi Young diperluas. Pada bab ketiga akan dibahas mengenai metode penelitian, dimana bab ini penulis menjabarkan mengenai topik penelitian, metode penelitian, dan langkah-langkah yang ditempuh penulis dalam melakukan penelitian. Lalu dilanjutkan bahasan mengenai ruang Orlicz—Morrey, yang mana bab ini menjelaskan mengenai teori-teori yang mendukung pembahasan pada bab kelima. Bab ini berisi hasil-hasil dari penelitian terdahulu mengenai norma Luxemburg, ruang Orlicz, ruang Morrey, dan ruang Orlicz—Morrey. Setelah membahas mengenai ruang Orlicz—Morrey, selanjutnya dibahas mengenai pembahasan berkenaan ruang Orlicz—Morrey diperluas yang akan berisi pembahasan mengenai ruang Orlicz—Morrey diperluas yang diperoleh pada penelitian ini. Pada bab keenam, akan terdapat penutup yang berisi simpulan dari hasil penelitian yang sudah dilakukan dan juga saran dari penulis untuk penelitian selanjutnya mengenai topik yang serupa dengan penulis.