

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Teori graf merupakan cabang matematika yang memungkinkan representasi objek-objek diskrit dan hubungan di antara objek-objek tersebut (Christianti, 2015). Keunggulan dari teori graf terletak pada kebermanfaatannya untuk memecahkan berbagai masalah dalam kehidupan sehari-hari, seperti masalah pedagang keliling (*travelling salesperson problem*), masalah tukang pos Cina (*Chinese postman problem*), pewarnaan graf (*graph coloring*), analisis jejaring sosial (*social network analysis*), dan penentuan lokasi pemancar radio (Febryani, 2023).

Menurut Buhaerah, Busrah, dan Sanjaya (2021), sebuah graf adalah sistem yang terdiri dari simpul-simpul dan sisi-sisi yang menghubungkannya. Suatu graf dikatakan graf khusus jika memiliki ciri-ciri tertentu yang mudah dikenali atau karakteristik yang spesifik. Salah satu jenis graf yang termasuk graf khusus adalah graf *Lollipop*. Vijayan dan Negarajan (2015) mendefinisikan graf *Lollipop*  $L_{m,n}$  sebagai graf yang terbentuk dengan menghubungkan satu simpul dari graf lengkap yang memiliki  $m$  buah simpul (dinotasikan dengan  $K_m$ ) dengan satu simpul dari graf lintasan yang memiliki  $n$  buah simpul (dinotasikan  $P_n$ ) melalui sebuah sisi.

Dalam teori graf, terdapat istilah ‘graf hasil operasi *comb*’, yang merupakan salah satu teknik penggabungan dua graf menjadi sebuah graf. Graf hasil operasi *comb* adalah gabungan antara dua graf, dan graf kedua diulang sebanyak simpul pada graf pertama, lalu salah satu simpul pada graf kedua ditempelkan di masing-masing simpul pada graf pertama (Rosyidah dkk., 2021).

Selain itu, dalam teori graf, terdapat beragam konsep atau topik yang terkait dengan graf, salah satunya pelabelan graf. Pelabelan graf adalah pemberian label atau nilai pada elemen-elemen dalam graf, seperti simpul atau sisi, biasanya dengan bilangan bulat non-negatif (Ilyas, Yundari, & Pasaribu, 2021). Pelabelan graf bisa digunakan dalam berbagai bidang pengetahuan seperti teori koding, radar, perancangan sirkuit, manajemen basis data, berbagi pesan rahasia, dan kriptografi (Firmansah & Syaifuddin, 2016).

Terdapat berbagai macam jenis pelabelan graf yang masing-masing memiliki karakteristik. Salah satu jenis pelabelan graf yang telah menjadi subjek penelitian yang intensif adalah pelabelan  $L(h, k)$ . Pelabelan  $L(h, k)$  adalah jenis pelabelan yang diterapkan pada simpul dalam suatu graf dan tidak hanya bergantung pada hubungan berjarak satu langkah, tetapi juga melibatkan hubungan dengan simpul yang berjarak dua langkah (Griggs & Yeh, 1992). Dalam pelabelan  $L(h, k)$ , " $h$ " dan " $k$ " adalah parameter-parameter yang mengatur aturan atau ketentuan pelabelan. Parameter " $h$ " mengatur perbedaan minimum antara label simpul yang terhubung dengan jarak 1, sementara parameter " $k$ " mengatur perbedaan minimum antara label simpul yang terhubung dengan jarak 2. Bilangan bulat terbesar dalam rentang pelabelan disebut *span* (Fernandez, Flores, Tomova, & Wyels, 2008). *Span* dalam suatu graf bisa bervariasi dengan beberapa nilai yang mungkin, dan nilai minimum *span* dari graf  $G$  dinotasikan sebagai  $\lambda(G)$  (Shao, Yeh, & Zhang, 2008).

Dalam konteks penugasan frekuensi pada pemancar radio, menemukan nilai minimum *span* pada pelabelan graf dapat membantu meminimumkan interferensi antar pemancar (Shao dkk., 2008). Dengan kata lain, hal ini dapat membantu dalam mencari solusi di mana pemancar yang saling berdekatan diberi frekuensi yang memiliki selisih minimum sesuai dengan aturan yang ditentukan. Ini memungkinkan pengaturan frekuensi yang efisien untuk menghindari gangguan yang dapat muncul, akibat pemancar yang terlalu dekat satu sama lain.

Penelitian-penelitian sebelumnya dalam bidang pelabelan graf, khususnya pelabelan  $L(h, k)$ , telah menghasilkan berbagai hasil menarik. Contoh penelitian terkait mencakup penelitian tentang pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf *Sierpinski*  $S(n, k)$  (Sagala & Susiana, 2018), pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf *Lollipop*  $L_{m, n}$  (Umam, 2021), pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf operasi *comb* graf siklus dan graf bintang (Kustanti, 2017), serta penelitian tentang pelabelan  $L(2, 1)$  pada graf buku segitiga, graf kerucut, graf *tadpole*, dan graf *dumbbell*, serta graf hasil identifikasi simpul dari graf buku segitiga dan graf lintasan (Komarullah, 2020). Studi-studi ini telah memberikan wawasan penting dalam sifat-sifat pelabelan  $L(h, k)$  pada berbagai jenis graf.

Terkait pelabelan  $L(3,1)$ , sebelumnya telah ada penelitian oleh Ghosh dan Pal pada tahun 2016 yang mengulas pelabelan  $L(3,1)$  pada beberapa jenis graf, seperti graf lintasan, graf siklus, graf lengkap, graf *bipartite*, graf *star*, graf *bi-star*, dan graf *n-ary tree*. Terdapat pula penelitian yang dilakukan oleh Febryani (2023) mengenai pelabelan simpul  $L(3,1)$  pada graf *Supercycle*  $Sc(n, r)$ .

Pada penelitian ini dikaji pelabelan  $L(3,1)$  pada graf *Lollipop*  $L_{m,n}$  untuk  $m \geq 3$  dan  $n$  adalah suatu bilangan bulat positif. Selain itu, penelitian ini juga mengeksplorasi pelabelan  $L(3,1)$  pada graf yang dihasilkan dari operasi *comb* antara graf bintang dan graf siklus (dinotasikan sebagai  $S_q \triangleright C_r$ ), dengan  $q \geq 3$  dan  $r \geq 3$ . Tujuan utama dari penelitian ini adalah untuk menentukan nilai minimum *span* yang merupakan nilai *span* terkecil dari seluruh pelabelan  $L(3,1)$  pada graf *Lollipop*  $L_{m,n}$  serta graf  $S_q \triangleright C_r$ .

Pemilihan topik penelitian mengenai pelabelan  $L(3,1)$  pada graf *Lollipop*  $L_{m,n}$  dan graf  $S_q \triangleright C_r$  didasarkan pada belum ada kajian atau penelitian terdahulu yang mendalami pelabelan  $L(3,1)$  pada kedua graf tersebut. Graf *Lollipop*  $L_{m,n}$  dan graf  $S_q \triangleright C_r$  menarik karena memiliki struktur yang unik dan mempelajari pelabelan  $L(3,1)$  pada graf-graf tersebut dapat memperluas pemahaman tentang penerapan pelabelan pada variasi graf yang berbeda.

## 1.2 Rumusan Masalah

Dalam latar belakang masalah yang telah diberikan, masalah penelitian ini adalah:

- Berapakah nilai minimum *span* untuk pelabelan  $L(3,1)$  pada graf *Lollipop*  $L_{m,n}$  untuk  $m \geq 3$  dan  $n$  adalah suatu bilangan bulat positif?
- Berapakah nilai minimum *span* untuk pelabelan  $L(3,1)$  pada graf  $S_q \triangleright C_r$  untuk  $q \geq 3$  dan  $r \geq 3$ ?

## 1.3 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

- Menentukan nilai minimum *span* dalam pelabelan  $L(3,1)$  pada graf *Lollipop*  $L_{m,n}$  untuk  $m \geq 3$  dan  $n$  adalah suatu bilangan bulat positif.

- b. Menentukan nilai minimum *span* dalam pelabelan  $L(3,1)$  pada graf  $S_q \supset C_r$  untuk  $q \geq 3$  dan  $r \geq 3$ .

#### 1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini mampu memberikan manfaat yang berharga dan berdampak positif, sebagaimana dijelaskan di bawah ini.

- a. Kontribusi pada teori graf

Penelitian ini dapat memberikan kontribusi baru pada teori graf, khususnya pelabelan graf. Melalui teori pelabelan  $L(3,1)$  pada graf *Lollipop*  $L_{m,n}$  serta graf  $S_q \supset C_r$ , penelitian ini dapat mengembangkan teori dan konsep teori graf.

- b. Landasan penelitian lanjutan

Hasil dari penelitian ini dapat menjadi landasan untuk penelitian lanjutan dalam teori graf. Temuan tentang nilai minimum *span* dalam pelabelan  $L(3,1)$  pada graf *Lollipop*  $L_{m,n}$  serta graf  $S_q \supset C_r$  dapat membuka pintu untuk eksplorasi lebih lanjut tentang aplikasi praktis dan sifat-sifat teori graf yang berkaitan.

- c. Alternatif solusi bagi Kemenkominfo

Penelitian lebih lanjut terkait pelabelan  $L(3,1)$  yang diterapkan pada kasus di dunia nyata, seperti masalah frekuensi radio dapat menjadi alternatif solusi atau masukan bagi Kemenkominfo dalam penentuan frekuensi radio.