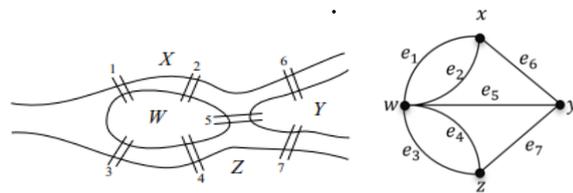


BAB I PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Dalam kehidupan sehari-hari tidak jarang ditemui permasalahan yang dapat diselesaikan dengan ilmu matematika. Salah satu cabang ilmu matematika yang sangat penting dan dapat digunakan dalam penyelesaian masalah sehari-hari yaitu Teori Graf. Teori Graf bermula dari munculnya suatu permasalahan di kota Königsberg yang terletak di Sungai Pregel, Prussia Jerman (Dickson, 2006). Sungai tersebut membagi kota menjadi empat wilayah terpisah, termasuk Pulau Kneiphopf. Keempat wilayah ini dihubungkan oleh tujuh jembatan. Para penduduk kota bertanya-tanya apakah mungkin untuk meninggalkan rumah mereka dengan melintasi tujuh jembatan tepat satu kali, dan kembali ke rumah. Matematikawan Swiss, Leonhard Euler (1707-1783) memikirkan masalah ini dan metode yang digunakan untuk menyelesaikannya dianggap sebagai kelahiran Teori Graf oleh banyak orang (Dickson, 2006). Gambar 1.1 merepresentasikan tujuh jembatan di kota Königsberg sebagai sebuah graf.



Gambar 1.1 Representasi graf dari tujuh jembatan di kota Königsberg.

(sumber gambar: <https://sites.pitt.edu/~kaveh/Intro-graph-Dickson-selected.pdf>)

Menurut Gould (2013) sebuah graf $G = (V, E)$ adalah himpunan berhingga V yang tidak kosong dan terdiri dari titik-titik, bersama dengan himpunan E yang berisi pasangan-pasangan titik dari V yang disebut sisi. Studi tentang graf mencakup berbagai aspek, salah satunya yaitu pewarnaan graf. Pewarnaan graf (*graph colouring*) merujuk pada proses memberikan warna pada titik atau sisi sehingga titik atau sisi yang bertetangga (*adjacent*) memiliki warna yang tidak sama

(Syakur, 2004 dalam Wicaksono, & Kartono, 2020). Disebutkan bahwa ada tiga jenis pewarnaan dalam graf, yaitu pewarnaan titik (*vertex colouring*), pewarnaan sisi (*edge colouring*) dan pewarnaan wilayah (*face colouring*) (Formanowicz & Tanaś, 2012). Jumlah minimum warna untuk pewarnaan suatu graf disebut dengan bilangan kromatik (Afriantini & Fran, 2019). Berhubungan dengan pewarnaan graf, fungsi yang menunjukkan banyaknya cara mewarnai graf juga merupakan topik yang menarik.

Dalam teori graf, polinomial kromatik adalah bentuk polinomial yang menghitung banyak cara untuk mewarnai graf dengan jumlah warna tertentu dan pertama kali diperkenalkan oleh George David Birkhoff dalam mengkaji masalah empat warna (Zhang, 2018). Namun Birkhoff hanya mendefinisikan polinomial kromatik untuk graf planar. Hal ini menjadikan definisi Birkhoff terbatas. Pada tahun 1932, Hassler Whitney memperluas konsep polinomial kromatik untuk graf non planar (Zhang, 2018). Dalam penerapannya, Ambarwati dkk. (2014) menyimpulkan bahwa salah satu teorema polinomial kromatik dapat digunakan untuk pembuatan jadwal ujian Prodi Matematika FMIPA UNY. Selain itu, Adrianto, Permanasari, & Sukarsih (2015) menyimpulkan bahwa polinomial kromatik juga dapat menunjukkan banyaknya solusi untuk permainan sudoku.

Ada beberapa kelas graf yang menarik untuk diteliti karena bentuknya yang unik, antara lain graf *Lollipop* dan graf hasil operasi *comb*. Menurut Eubanks-Turner, Cole, & Lee (2022) graf *Lollipop* $L_{m,n}$ merupakan graf sederhana yang dibentuk dengan menggabungkan sebuah graf lengkap K_m dan sebuah graf lintasan P_n melalui sebuah sisi, seperti namanya bentuk graf ini menyerupai permen *Lollipop*. Graf hasil operasi *comb* juga mempunyai bentuk unik karena struktur graf ini menyerupai bentuk molekul kimia, dengan alasan itu graf ini berguna untuk memodelkan suatu molekul kimia tertentu (Faisal, Mardiana, & Rosiyanti, 2019). Operasi *comb* antara graf G dan H merupakan pengambilan satu salinan graf G dan salinan dari graf H sebanyak jumlah titik graf G lalu menempelkan salinan ke- i dari graf H pada suatu titik ke titik ke- i dari G (Pribadi, Dhani, & Prestanti, 2023). Selain kedua graf tersebut terdapat pula jenis graf lain dalam teori graf, diantaranya graf bintang yang dinotasikan S_n , yang merupakan jenis graf bipartit lengkap $K_{1,n}$

(Chartrand, Lesniak, & Zhang, 2010). Lalu graf siklus yang merupakan graf sederhana dan tiap titiknya memiliki derajat dua (Amansyah, 2022).

Beberapa peneliti sebelumnya sudah mengkaji pembahasan polinomial kromatik. Dwijayanti (2011) meneliti polinomial kromatik pada graf bintang, graf roda dan graf tangga. Maulana dkk. (2018) membahas polinomial kromatik pada graf kipas. Indarta dkk. (2023) meneliti polinomial kromatik pada graf tripartit lengkap. Lalu Narendra (2022) meneliti polinomial kromatik pada graf bunga. Berbeda dengan penelitian-penelitian tersebut. Dalam penelitian ini, penulis tertarik untuk mengkaji polinomial kromatik pada beberapa kelas graf, yaitu graf *Lollipop* $L_{m,n}$ dan graf hasil operasi *comb* graf bintang S_p dengan graf lengkap K_q yang dinotasikan dengan $S_p \triangleright K_q$. Pemilihan graf *Lollipop* dan graf hasil operasi *comb* antara graf bintang dengan graf lengkap dalam penelitian ini didasarkan pada belum adanya kajian mengenai polinomial kromatik dari kedua graf tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas pada penelitian ini adalah:

1. Bagaimana bentuk polinomial kromatik dari graf *Lollipop* $L_{m,n}$ untuk $m \geq 3$ dan n sebagai bilangan bulat positif?
2. Bagaimana bentuk polinomial kromatik dari graf hasil operasi *comb* graf bintang dengan graf lengkap $S_p \triangleright K_q$ untuk $p \geq 3$ dan $q \geq 3$?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini yaitu sebagai berikut:

1. Mendapatkan polinomial kromatik graf *Lollipop* $L_{m,n}$ untuk $m \geq 3$ dan n sebagai bilangan bulat positif; dan
2. Mendapatkan polinomial kromatik graf hasil operasi *comb* graf bintang dengan graf lengkap $S_p \triangleright K_q$ untuk $p \geq 3$ dan $q \geq 3$.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini dapat memberikan pengetahuan yang lebih terkait teori graf, khususnya mengenai polinomial kromatik graf *Lollipop* $L_{m,n}$ dan graf hasil operasi *comb* graf bintang dengan graf lengkap $S_p \triangleright K_q$. Juga dapat menumbuhkan motivasi pembaca serta peneliti lain untuk melakukan penelitian pada graf lainnya.