

**POLINOMIAL KROMATIK GRAF *LOLLIPOP* DAN
GRAF HASIL OPERASI *COMB* GRAF BINTANG DENGAN GRAF LENGKAP**

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi sebagian syarat untuk memperoleh gelar sarjana
Matematika



Oleh:

Berliana N. Marpaung

2004431

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA**

2024

POLINOMIAL KROMATIK GRAF *LOLLIPOP* DAN
GRAF HASIL OPERASI *COMB* GRAF BINTANG DENGAN GRAF LENGKAP
LEMBAR HAK CIPTA

Oleh:

Berliana N. Marpaung

2004431

Sebuah skripsi yang diajukan untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada Program Studi Matematika, Fakultas Pendidikan
Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

© Berliana N Marpaung

Universitas Pendidikan Indonesia

Agustus 2024

Hak Cipta dilindungi undang-undang

Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian dengan dicetak
ulang, difotokopi, atau cara lainnya tanpa izin penulis

LEMBAR PENGESAHAN
BERLIANA N MARPAUNG
POLINOMIAL KROMATIK GRAF LOLLIPOP DAN
GRAF HASIL OPERASI *COMB* GRAF BINTANG DENGAN GRAF LENGKAP

Disetujui dan disahkan,
Pembimbing I



Dr. Kartika Yulianti, M.Si.
NIP. 198207282005012001

Pembimbing II



Ririn Sispiyati, S.Si., M.Si.
NIP. 198106282005012001

Mengetahui,
Ketua Program Studi Matematika



Dr. Kartika Yulianti, M.Si.
NIP. 198207282005012001

LEMBAR PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul "Polinomial Kromatik Graf *Lollipop* dan Graf Hasil Operasi *Comb* Graf Bintang dengan Graf Lengkap" ini beserta seluruh isinya adalah benar-benar karya saya sendiri. Saya tidak melakukan penjiplakan atau pengutipan dengan cara-cara yang tidak sesuai dengan etika keilmuan yang berlaku dalam masyarakat keilmuan. Atas pernyataan ini, saya siap menanggung risiko atau sanksi apabila di kemudian hari ditemukan adanya pelanggaran etika keilmuan atau ada klaim dari pihak lain terhadap keaslian karya saya ini.

Bandung, Agustus 2024
Yang membuat pernyataan,

Berliana N. Marpaung
NIM 2004431

KATA PENGANTAR

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala*, yang telah memberikan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Polinomial Kromatik Graf *Lollipop* dan Graf Hasil Operasi *Comb* Graf Bintang dengan Graf Lengkap" untuk memenuhi sebagian syarat untuk memperoleh gelar sarjana Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada para dosen pembimbing dan semua pihak yang telah memberikan motivasi, arahan, dan dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini. Semoga segala upaya yang telah dilakukan oleh semua pihak dapat menjadi amal saleh.

Penulis menyadari bahwa penelitian ini masih memiliki kekurangan dan keterbatasan baik dalam hal ilmu maupun kemampuan penulis. Oleh sebab itu, saran, kritik, serta masukan yang membangun menjadi harapan penulis guna menyempurnakan skripsi ini. Besar harapan penulis bahwa penelitian skripsi ini dapat bermanfaat baik bagi penulis ataupun pembaca. Semoga Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* senantiasa memberikan keberkahan dan hidayah-Nya kepada kita semua.

UCAPAN TERIMA KASIH

Segala puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* yang telah memberikan rahmat serta karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Penulis menyadari bahwa skripsi ini tidak dapat diselesaikan dengan baik tanpa adanya bantuan, dukungan, bimbingan, serta do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan rasa hormat dan rasa terima kasih kepada:

1. orang tua penulis yaitu Bapak Parulian Marpaung dan Ibu Nita Yuniar, yang senantiasa memberikan kasih sayang, doa, nasehat, serta dukungan yang luar biasa dalam setiap langkah yang penulis ambil;
2. Ibu Dr. Kartika Yulianti, M.Si., selaku dosen pembimbing I sekaligus dosen pembimbing akademik yang telah meluangkan waktunya untuk membimbing, memberikan masukan, memberikan arahan, serta membantu penulis baik saat perkuliahan maupun dalam penyusunan skripsi ini dari awal hingga akhir;
3. Ibu Ririn Sispiyati, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah meluangkan waktunya untuk membimbing, memberikan masukan, memberikan arahan, serta membantu penulis dalam penyusunan skripsi ini dari awal hingga akhir;
4. seluruh dosen Program Studi Matematika yang telah memberikan ilmu dan pendidikan kepada penulis selama berkuliah di Universitas Pendidikan Indonesia;
5. saudara penulis yaitu Danias T. Marpaung, serta seluruh keluarga yang senantiasa memberikan dukungan dan doa sehingga skripsi ini dapat selesai tepat waktu;
6. rekan-rekan mahasiswa Matematika UPI 2020 yang telah memberikan bantuan, dukungan, serta menemani penulis belajar selama masa perkuliahan;
7. teman-teman penulis di luar kampus yang selalu menghibur serta memberikan semangat dan dukungan; dan
8. seluruh pihak yang tidak dapat penulis cantumkan satu per satu yang telah mendukung dan membantu penulis menyelesaikan skripsi ini.

**POLINOMIAL KROMATIK GRAF *LOLLIPOP* DAN
GRAF HASIL OPERASI *COMB* GRAF BINTANG DENGAN GRAF
LENGKAP**

ABSTRAK

Graf *Lollipop* dan graf hasil operasi *comb* merupakan graf yang terbentuk dengan menggabungkan beberapa graf menjadi bentuk graf yang baru. Graf *Lollipop* $L_{m,n}$ diperoleh dengan menghubungkan graf lengkap K_m dengan graf lintasan P_n melalui sebuah sisi. Graf hasil operasi *comb* graf bintang dengan graf lengkap $S_p \triangleright K_q$ diperoleh dengan menempelkan $p + 1$ buah salinan graf lengkap K_q pada titik-titik dari graf bintang S_p . Polinomial kromatik dari graf G , yang dilambangkan dengan $P(G, \lambda)$, didefinisikan sebagai banyak cara mewarnai graf G dengan λ warna. Pada penelitian ini, dengan metode pendeteksian pola dan induksi dihasilkan polinomial kromatik graf *Lollipop* $L_{m,n}$ dan graf hasil operasi *comb* graf bintang dengan graf lengkap $S_p \triangleright K_q$. Metode ini mendeteksi dan menganalisis pola-pola berulang polinomial kromatik graf *Lollipop* $L_{m,n}$ dan graf hasil operasi *comb* graf bintang dengan graf lengkap $S_p \triangleright K_q$ kemudian dilakukan rumusan umum pada pola tersebut. Temuan penelitian ini menunjukkan bahwa polinomial kromatik graf *Lollipop* $L_{m,n}$ untuk $m \geq 3$ dan $n \geq 1$ adalah:

$$P(L_{m,n}, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n+1}(\lambda - 2) \dots (\lambda - m + 1).$$

Sementara itu, polinomial kromatik graf hasil operasi *comb* graf bintang dengan graf lengkap $S_p \triangleright K_q$ untuk $p \geq 3$ dan $q \geq 3$ adalah:

$$P(S_p \triangleright K_q, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{2p+1}(\lambda - 2)^{p+1} \dots (\lambda - q + 1)^{p+1}.$$

Kata kunci: Graf *Lollipop*, Graf hasil operasi *comb* graf bintang dengan graf lengkap, Polinomial kromatik.

**THE CHROMATIC POLYNOMIAL OF LOLLIPOP GRAPH AND
THE COMB PRODUCT OF A STAR GRAPH AND A COMPLETE GRAPH**

ABSTRACT

A Lollipop graph and a comb product of graphs are graphs formed by combining several graphs into a new graph. The Lollipop graph $L_{m,n}$ is obtained by connecting a complete graph K_m with a path graph P_n through an edge. The comb product of a star graph and a complete graph $S_p \triangleright K_q$ is obtained by grafting $p + 1$ copies of the complete graph K_q at the vertices of the star graph S_p . The chromatic polynomial of a graph G denoted by $P(G, \lambda)$, is defined as the number of ways to colour the graph G with λ colours. In this study, using pattern detection and induction methods, the chromatic polynomial of Lollipop graph $L_{m,n}$ and the comb product of a star graph and a complete graph $S_p \triangleright K_q$ are obtained. This method detects and analyses the repeating patterns of the chromatic polynomials of Lollipop graph $L_{m,n}$ and the comb product of a star graph and a complete graph $S_p \triangleright K_q$, then applies a general formulation to the pattern. The result shows that the chromatic polynomials of Lollipop graph $L_{m,n}$ for $m \geq 3$ and $n \geq 1$ is:

$$P(L_{m,n}, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{n+1}(\lambda - 2) \dots (\lambda - m + 1).$$

Additionally, the chromatic polynomials of the comb product of a star graph and a complete graph $S_p \triangleright K_q$ for $p \geq 3$ and $q \geq 3$ is:

$$P(S_p \triangleright K_q, \lambda) = \lambda(\lambda - 1)^{2p+1}(\lambda - 2)^{p+1} \dots (\lambda - q + 1)^{p+1}.$$

Keywords: *Chromatic polynomial, Lollipop graph, The comb product of a star graph and a complete graph.*

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
LEMBAR PERNYATAAN	ii
KATA PENGANTAR	iii
UCAPAN TERIMA KASIH.....	iv
ABSTRAK.....	v
<i>ABSTRACT</i>	vi
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR TABEL.....	xi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	3
BAB II LANDASAN TEORI	4
2.1 Graf.....	4
2.2 Jenis-jenis Graf.....	5
2.3 Operasi <i>Comb</i>	7
2.4 Pewarnaan Titik/simpul.....	8
2.5 Himpunan Independen	9
2.6 Partisi Himpunan.....	9
2.7 Kaidah Dasar Menghitung pada Kombinatorial.....	9
2.8 Induksi Matematika pada Kombinatorial	10
2.9 Polinomial Kromatik	10
2.10 Penelitian Terdahulu.....	20
BAB III METODE PENELITIAN.....	22
3.1 Metodologi	22

3.2	Tahapan Penelitian	22
3.2.1	Tahapan Penelitian untuk Graf <i>Lollipop</i> L_m, n	22
3.2.2	Tahapan Penelitian untuk Graf Hasil Operasi <i>Comb</i> Graf Bintang dengan Graf Lengkap $S_p \triangleright K_q$	23
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN		24
4.1	Polinomial Kromatik Graf <i>Lollipop</i> L_m, n	24
4.1.1	Polinomial Kromatik Graf <i>Lollipop</i> L_3, n Untuk $n = 1, 2, 3, \dots$	24
4.1.2	Polinomial Kromatik Graf <i>Lollipop</i> L_4, n Untuk $n = 1, 2, 3, \dots$	31
4.2	Polinomial Kromatik Graf Hasil Operasi <i>Comb</i> Graf Bintang Dengan Graf Lengkap $S_p \triangleright K_q$	50
4.2.1	Polinomial Kromatik Graf Hasil Operasi <i>Comb</i> Graf Bintang Dengan Graf Lengkap $S_3 \triangleright K_q$ untuk $q = 3, 4, 5$	50
4.2.2	Polinomial Kromatik Graf Hasil Operasi <i>Comb</i> Graf Bintang Dengan Graf Lengkap $S_4 \triangleright K_q$ untuk $q = 3, 4, 5$	54
4.2.3	Polinomial Kromatik Graf Hasil Operasi <i>Comb</i> Graf Bintang Dengan Graf Lengkap $S_5 \triangleright K_q$ untuk $q = 3, 4, 5$	58
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.....		72
5.1	Kesimpulan.....	72
5.2	Saran.....	72
DAFTAR PUSTAKA		73

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1 Representasi graf dari tujuh jembatan di kota Königsberg.....	1
Gambar 2.1 Graf G	4
Gambar 2.2 Graf lengkap K_1 sampai dengan K_5	5
Gambar 2.3 Graf lintasan P_1 sampai dengan P_4	5
Gambar 2.4 Contoh graf <i>Lollipop</i>	6
Gambar 2.5 Graf bintang S_3 dan S_4	7
Gambar 2.6 (a) graf bintang S_3 , (b) graf lengkap K_3 , (c) graf hasil operasi comb $S_3 \triangleright K_3$	7
Gambar 2.7 Graf G 3 titik.	8
Gambar 2.8 Graf G dengan 4 titik dan 5 sisi.....	14
Gambar 2.9 Graf lintasan P_3	16
Gambar 2.10 Graf lengkap K_3	18
Gambar 2.11 Graf $K_3 - e$ dan graf K_3/e	20
Gambar 4.1 Graf <i>Lollipop</i> $L_{3,1}$	24
Gambar 4.2 Graf <i>Lollipop</i> $L_{3,2}$	26
Gambar 4.3 Graf <i>Lollipop</i> $L_{3,3}$	28
Gambar 4.4 Graf <i>Lollipop</i> $L_{4,1}$	31
Gambar 4.5 Graf <i>Lollipop</i> $L_{4,2}$	33
Gambar 4.6 Graf <i>Lollipop</i> $L_{4,3}$	36
Gambar 4.7 Graf hasil operasi comb graf bintang dengan graf lengkap $S_3 \triangleright K_3$	50
Gambar 4.8 Graf hasil operasi comb graf bintang dengan graf lengkap $S_3 \triangleright K_4$	51
Gambar 4.9 Graf hasil operasi comb graf bintang dengan graf lengkap $S_3 \triangleright K_5$	53
Gambar 4.10 Graf hasil operasi comb graf bintang dengan graf lengkap $S_4 \triangleright K_3$	54
Gambar 4.11 Graf hasil operasi comb graf bintang dengan graf lengkap $S_4 \triangleright K_4$	55

Gambar 4.12 Graf hasil operasi comb graf bintang dengan graf lengkap	
$S_4 \triangleright K_5$	56
Gambar 4.13 Graf hasil operasi comb graf bintang dengan graf lengkap	
$S_5 \triangleright K_3$	58
Gambar 4.14 Graf hasil operasi comb graf bintang dengan graf lengkap	
$S_5 \triangleright K_4$	59
Gambar 4.15 Graf hasil operasi comb graf bintang dengan graf lengkap	
$S_5 \triangleright K_5$	60

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Bentuk partisi dari graf G	15
Tabel 2.2 Bentuk partisi dari graf P_3	17
Tabel 2.3 Bentuk partisi dari graf K_3	18
Tabel 4.1 Bentuk partisi dari graf $L_{3,1}$	25
Tabel 4.2 Bentuk partisi dari graf $L_{3,2}$	27
Tabel 4.3 Bentuk partisi dari graf $L_{3,3}$	29
Tabel 4.4 Bentuk partisi dari gra $L_{4,1}$	32
Tabel 4.5 Bentuk partisi dari graf $L_{4,2}$	34
Tabel 4.6 Bentuk partisi dari graf $L_{4,3}$	37

DAFTAR PUSTAKA

- Adrianto, F. A., Permanasari, Y., & Sukarsih, I. (2015). Penerapan Pewarnaan Graf sebagai Metode untuk Mencari Solusi Permainan Sudoku. *Prosiding Matematika*, 17-23.
- Afriantini, H., & Fran, F. (2019). Pewarnaan Simpul, Sisi, Wilayah Pada Graf Dan Penerapannya. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, 8(4).
- Alfarisi, R. (2017). *Dimensi Partisi dan Dimensi Partisi Bintang Graf Hasil Operasi Comb Dua Graf Terhubung*. Tesis. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- Amansyah, W. D. (2022). Bilangan Kromatik Lokasi Hasil Operasi Korona Graf Siklus Dengan Graf Lintasan.
- Ambarwati, R. D., Nursanti, S. A., Prihastuti, D., Putri, W. P., Rahayu, M. P., (2014). Pembuktian *Deletion-Contraction Theorem* serta Penerapannya Dalam Pembuatan Jadwal Ujian Studi Matematika.
- Anderson, D. F., Asir, T., Badawi, A., & Chelvam, T. T. (2021). *Graphs from rings*. New York, NY: Springer International Publishing.
- Astuti, S. (2011). *Penyusunan Jadwal Ujian Mata Kuliah Dengan Algoritma Pewarnaan Graf Welch Powell*. *Jurnal Dian*, 11(1).
- Aydelotte, A. (2017). *An Exploration of the Chromatic Polynomial*.
- Bather, J. A. (1994). *Mathematical induction*.
- Bichot, C. E., & Siarry, P. (Eds.). (2013). *Graph partitioning*. John Wiley & Sons.
- Biggs, N., Lloyd, E. K., & Wilson, R. J. (1986). *Graph Theory, 1736-1936*. Oxford University Press.
- Chandrasekaran, S., & Kanimozhi, K. 2019. *Perfect Domination Polynomial for Lollipop Graph*. *Khadir Mohideen College, Adirampattinam*.
- Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, P. (2010). *Graphs & digraphs* (Vol. 39). CRC press.
- Damayanti, R. T. (2011). Automorfisme graf bintang dan graf lintasan. *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Aplikasi*, 2(1), 35-40.
- Daniel, F., & Taneo, P. N. (2019). *Teori Graf*. Yogyakarta: Deepublish.
- Dickson, A. (2006). *Introduction to graph theory*. CRC Pres.

- Diestel, R. (2024). *Graph theory*. Springer (print edition); Reinhard Diestel (eBooks).
- Dong, F., Koh, K. M., & Teo, K. L. (2005). *Chromatic polynomials and chromaticity of graphs*. World Scientific.
- Dwijayanti, R. (2011). Polinomial Kromatik pada Graf Bintang, Graf Roda, dan Graf Tangga.
- Eubanks-Turner, C., Cole, K., & Lee, M. (2022). Interlace polynomials of *Lollipop* and tadpole graphs. *Electronic Journal of Graph Theory & Applications*, 10(1).
- Faisal, F., Mardiana, N., & Rosiyanti, H. (2019). Dimensi Partisi Graf Hasil Operasi Comb Graf Lingkaran Dan Graf Lintasan. *FIBONACCI: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, 5(2), 163-174.
- Formanowicz, P., & Tanaś, K. (2012). A survey of graph coloring-its types, methods and applications. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 37(3), 223-238.
- Gould, R. (2013). *Graph theory*. New York: Courier Corporation.
- Gross, J. L., & Yellen, J. (Eds.). (2003). *Handbook of graph theory*. CRC press.
- Gunderson, D. S. (2014). *Handbook of mathematical induction: Theory and applications*. CRC Press.
- Indarta, J. A., Wijaya, K., Halikin, I., & Kusbudiono, K. (2023). Polinomial Kromatik Graf Tripartit Lengkap. *Jurnal EurekaMatika*, 11(1), 25-36.
- Jou, M. J., & Chang, G. J. (2000). The number of maximum independent sets in graphs. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 4(4), 685-695.
- Kariman, D., & Junios, J. (2022). Sifat Keherediteran Aljabar Lintasan dan Aljabar Lintasan Leavitt.
- Kaul, H., & Mudrock, J. A. (2021). On the chromatic polynomial and counting DP-colorings of graphs. *Advances in Applied Mathematics*, 123, 102131.
- Kóczy, L. Á. (2018). *Partition Function Form Games*. Theory and Decision Library C, 48, 312.
- Kristanto, Y. D., & Santoso, E. B. (2017). *Aljabar dan Trigonometri*. Yogyakarta: Sanata Dharma University Press.

- Kristina, M. (2014). *Dimensi Metrik Lokal pada Graf Hasil Kali Comb dari Graf Siklus dan Graf Bintang* (Doctoral dissertation, Universitas Airlangga).
- Kurniawati, R. (2004). *Polinomial Kromatik dari Graf Terhubung* (Doctoral dissertation, Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Jember).
- Lamm, S., Sanders, P., & Schulz, C. (2015, June). Graph partitioning for independent sets. In *International Symposium on Experimental Algorithms* (pp. 68-81). Cham: Springer International Publishing.
- Maulana, N.R., Wijaya, K., Santoso, K.A. (2018). *Polinomial Kromatik pada Graf Kipas*. *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, 18(2), 55-60.
- Narendra, R. (2022). Polinomial kromatik graf bunga. *UJMC (Unisda Journal of Mathematics and Computer Science)*, 8(2), 55-58.
- Pribadi, A. A., Dhani, M., & Prestanti, A. L. D. (2023). Bilangan Dominasi-Lokasi pada Graf Hasil Kali Operasi Comb Graf Lintasan dan Graf Siklus. *Indonesian Journal of Applied Mathematics*, 2(2), 74-76.
- Pujiastuti, L. S. (2022). *Matematika peminatan*. UMSurabaya Publishing.
- Rahadi, A. P. (2019). *Penjadwalan Mata Kuliah Menggunakan Pewarnaan Graf Dengan Algoritma Largest First*. *Jurnal Padagogik*, 2(1), 1-13.
- Read, R. C. (1968). *An introduction to chromatic polynomials*. *Journal of combinatorial theory*, 4(1), 52-71.
- Roza, I. (2016). Graf garis (line graph) dari graf siklus, graf lengkap dan graf bintang. *Jurnal Matematika UNAND*, 3(2), 1-4.
- Sajaka, K. A., Priyatno, S., & Hariyanto, B. (2019). *Explore Matematika Jilid 2 untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI*. Penerbit Duta.
- Wicaksono, A. (2013). *Kombinatorial dan Peluang Diskrit pada penyusunan Deck dalam Trading Card Game*. *rn*, 1(2), 1.
- Wicaksono, P. S., & Kartono, K. (2020). Analisis Penjadwalan Mata Pelajaran Menggunakan Algoritma Welch-Powell. *Prismatika: Jurnal Pendidikan dan Riset Matematika*, 3(1), 1-21.
- Wilson, R. J. (1979). *Introduction to graph theory*. Pearson Education, India.
- Young, C. Y. (2009). *Precalculus*. Britania Raya: Wiley.
- Yuwaningsih, D. A. (2022). *Pengantar Kombinatorik*. Yogyakarta: UAD PRESS.

Zhang, J. (2018). *An introduction to chromatic polynomials*. Kingston: University of the West Indies.

Zhang, P., & Chartrand, G. (2006). *Introduction to graph theory*. Boston: Tata McGraw-Hill.