BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Penelitian ini merupakan penelitian studi literatur yang membahas tentang penyelesaian masalah *Fuzzy Maximum Flow* menggunakan bilangan *fuzzy* segitiga dan trapesium. Bab ini membahas deskripsi masalah, tahapan penelitian, model *Fuzzy Maximum Flow*, dan algoritma untuk menyelesaikan masalah *Fuzzy Maximum Flow*.

3.1 Deskripsi Masalah

Penelitian ini membahas *Maximum Flow Problem* (MFP), yaitu masalah menentukan aliran terbesar yang dapat dialirkan dari simpul sumber ke simpul tujuan pada suatu jaringan. Jaringan adalah graf berarah yang setiap busurnya memiliki batasan kapasitas. MFP mempunyai banyak aplikasi nyata, seperti pada jaringan komunikasi dan jaringan pipa. Pada situasi nyata, sering terjadi ketidakpastian pada nilai parameter jaringan, misalnya biaya dan permintaan. Salah satu cara untuk mengatasi ketidakpastian tersebut adalah dengan merepresentasikan parameter MFP dalam bentuk bilangan *fuzzy*. MFP dengan parameter *fuzzy* dikenal dengan sebutan *Fuzzy Maximum Flow Problem* (FMFP).

Pada penelitian ini, kapasitas setiap busur pada jaringan dinyatakan sebagai bilangan *fuzzy* segitiga dan trapesium. FMFP dengan bilangan *fuzzy* segitiga akan diselesaikan dengan pendekatan program linier dan masalah *Fuzzy Maximum Flow* dengan bilangan *fuzzy* trapesium akan diselesaikan dengan teknik pelabelan.

3.2 Tahapan Penelitian

Tahapan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Studi Pustaka

   Pada tahapan ini, dilakukan penelusuran literatur terkait *Fuzzy Maximum Flow*, bilangan *fuzzy*, dan program linier, baik dari berbagai sumber seperti buku dan jurnal nasional maupun internasional.

2. Representasi Jaringan

   Representasi jaringan dari masalah *Fuzzy Maximum Flow* akan diwakili dalam bentuk jaringan yang terdiri dari simpul, sisi, dan nilai kapasitas *fuzzy*.
3. Pembangunan Model *Fuzzy Maximum Flow*

   Tahapan ini akan dibangun model optimisasi dari masalah *Fuzzy Maximum Flow*.
4. Penurunan Model *Fuzzy Linear Programming* dengan bilangan *fuzzy* segitiga dan trapesium

   Tahapan ini akan diturunkan model *Fuzzy Linear Programming* untuk bilangan *fuzzy* segitiga dan bilangan *fuzzy* trapesium.
5. Penyelesaian Model

   Penyelesaian model akan dilakukan menggunakan Metode Simpleks untuk FMFP dengan bilangan *fuzzy* segitiga dan menggunakan teknik labeling untuk FMFP dengan bilangan *fuzzy* trapesium.
6. Penarikan Kesimpulan

   Pada tahapan ini akan dilakukan penarikan kesimpulan sebagai hasil analisis terhadap penyelesaian FMFP.

3.3 Model *Fuzzy Maximum Flow*

Penelitian ini membahas masalah pencarian solusi optimal *fuzzy* dari *Fuzzy Maximum Flow Problem* (FMFP), yaitu mencari solusi terbaik dari masalah aliran maksimum dengan parameter *fuzzy*. Model optimisasi program linier untuk masalah aliran maksimum *fuzzy* merujuk pada model pada penelitian Kumar dan Kaur (2011).

Diberikan jaringan $G = (V, E)$ dengan kapasitas maksimum *fuzzy* $\tilde{u}_{ij}$. Didefinisikan $\tilde{x}_{ij}$ sebagai aliran *fuzzy* pada busur $(i, j) \in E$. Misalkan $\tilde{f}$ mewakili aliran maksimal *fuzzy* dalam jaringan dari simpul sumber s ke simpul tujuan t. Penyelesaian masalah *Fuzzy Maximum Flow* bertujuan untuk memaksimumkan total aliran *fuzzy* dalam jaringan dari simpul sumber *s* ke simpul tujuan *t*. Dengan demikian, fungsi tujuan FMFP dinyatakan sebagai berikut:

Memaksimumkan: $\tilde{f}$

Adapun kendala-kendala dari model optimisasi FMFP adalah sebagai berikut:

1. Jumlah aliran yang masuk ke simpul sumber sama dengan jumlah aliran yang keluar dari sumber ditambah dengan jumlah aliran *fuzzy* maksimumnya. Kendala tersebut direpresentasikan sebagai berikut:
$$\sum_{\boldsymbol{j}} \tilde{x}_{ij} = \sum_{\boldsymbol{k}} \tilde{x}_{ki} \oplus \tilde{f} \;; i = s \tag{3.1}$$
2. Jumlah aliran yang masuk ke simpul perantara sama dengan jumlah aliran yang keluar dari simpul tersebut. Kendala ini direpresentasikan sebagai berikut:
$$\sum_{\boldsymbol{j}} \tilde{x}_{ij} = \sum_{\boldsymbol{k}} \tilde{x}_{ki} \;; \forall \; i \neq s, t \tag{3.2}$$
3. Jumlah aliran yang masuk ke simpul tujuan ditambah dengan jumlah aliran maksimumnya akan sama dengan jumlah aliran yang keluar dari simpul tujuan. Kendala tersebut dituliskan sebagai berikut:
$$\sum_{\boldsymbol{j}} \tilde{x}_{ij} \oplus \tilde{f} = \sum_{\boldsymbol{k}} \tilde{x}_{ki} \;; i = t \tag{3.3}$$
4. Nilai aliran pada setiap busur tidak melebihi kapasitas busurnya. Kendala ini dituliskan sebagai berikut:
$$\tilde{x}_{ij} \lesssim \tilde{u}_{ij} \; \forall \, (i, j) \in E \tag{3.4}$$

Batasan variabel model menyatakan bahwa semua aliran pada jaringan bernilai nonnegatif. Batasan ini dituliskan sebagai:

$$\tilde{x}_{ij} \geq 0 \tag{3.5}$$

Selengkapnya, model optimisasi FMFP dapat dimodelkan sebagai model program linier berikut:

Memaksimumkan: $\tilde{f}$

Terhadap:

$$\sum_{\boldsymbol{j}} \tilde{x}_{ij} = \sum_{\boldsymbol{k}} \tilde{x}_{ki} \oplus \tilde{f} \;; i = s$$

$$\sum_{\boldsymbol{j}} \tilde{x}_{ij} = \sum_{\boldsymbol{k}} \tilde{x}_{ki} \;; \forall \; i \neq s, t$$

$$\sum_{j} \tilde{x}_{ij} \oplus \tilde{f} = \sum_{k} \tilde{x}_{ki} \ ; i = t$$

$$\tilde{x}_{ij} \precsim \tilde{u}_{ij} \ \forall \ (i,j) \in E$$

$$\tilde{x}_{ij} \geq 0$$

Model optimisasi di atas termasuk dalam kategori model *Fuzzy Linear Programming* (FLP).

3.4 Teknik Penyelesaian

Pada subbab ini akan dibahas teknik penyelesaian model FLP dari masalah FMFP dengan menggunakan bilangan *fuzzy* segitiga dan bilangan *fuzzy* trapesium untuk kapasitas jaringan.

3.4.1 Penyelesaian *Fuzzy Maximum Flow* dengan Bilangan *Fuzzy* Segitiga

Misalkan parameter $\tilde{x}_{ij}, \tilde{f}$ dan $\tilde{u}_{ij}$ masing-masing diwakili oleh bilangan *fuzzy* segitiga nonnegatif $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}), (f_1, f_2, f_3)$, dan (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}). Maka model optimisasi pada Kendala (3.1) sampai Batasan (3.5) dapat ditulis sebagai berikut:

Memaksimumkan: (f_1, f_2, f_3)

Terhadap:

$$\sum_{j} (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_{k} (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \oplus (f_1, f_2, f_3) \ ; i = s$$

$$\sum_{j} (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) = \sum_{k} (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \ ; \ \forall \ i \neq s, t$$

$$\sum_{j} (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \oplus (f_1, f_2, f_3) = \sum_{k} (a_{ki}, b_{ki}, c_{ki}) \ ; i = t$$

$$(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) \precsim (u_{ij}, v_{ij}, w_{ij}) \ \forall \ (i,j) \in E$$

$$\tilde{x}_{ij} \geq 0$$

Selanjutnya, dilakukan tahapan berikut:

1. Ubah model menjadi bentuk standar dengan cara menambahkan variabel *slack* $(s'_{ij}, s''_{ij}, s'''_{ij})$ pada Kendala (3.4).

2. Terapkan fungsi rangking dan operasi aritmetikanya pada masalah program linier *fuzzy* yang diperoleh pada Langkah 1 sehingga diperoleh model program linier *crisp*.
3. Selesaikan model program linier *crisp* pada Langkah 2 dengan Metode Simpleks untuk mendapatkan nilai optimal f_1, f_2, f_3.

Dengan menggunakan metode *Fuzzy Linear Programming* untuk menyelesaikan FMFP, maka dapat diperoleh total aliran maksimal *fuzzy* dari semua simpul sumber ke simpul tujuan.

3.4.2 Teknik Penyelesaian *Fuzzy Maximum Flow* dengan Bilangan *Fuzzy* Trapesium

Penyelesaian FMFP dengan fungsi keanggotaan trapesium untuk kapasitas jaringan akan diselesaikan dengan teknik *labelling*. Teknik ini bekerja dengan cara mencari lintasan penerobos dengan aliran positif dari simpul sumber ke simpul tujuan. Algoritma yang digunakan merujuk pada penelitian Kumar dan Kaur (2010).

Diberikan busur (i, j) dengan kapasitas *fuzzy* awal $(\tilde{f}\bar{c}_{ij}, \tilde{f}\bar{c}_{ji})$. Misalkan $(\tilde{f}c_{ij}, \tilde{f}c_{ji})$ adalah kapasitas sisa dari busur (i, j). Untuk simpul j yang menerima aliran dari simpul i, beri label $\left[\tilde{f}a_j, i\right]$, di mana $\tilde{f}a_j$ adalah aliran *fuzzy* dari simpul i ke simpul j. Langkah-langkah algoritma tersebut dirangkum sebagai berikut:

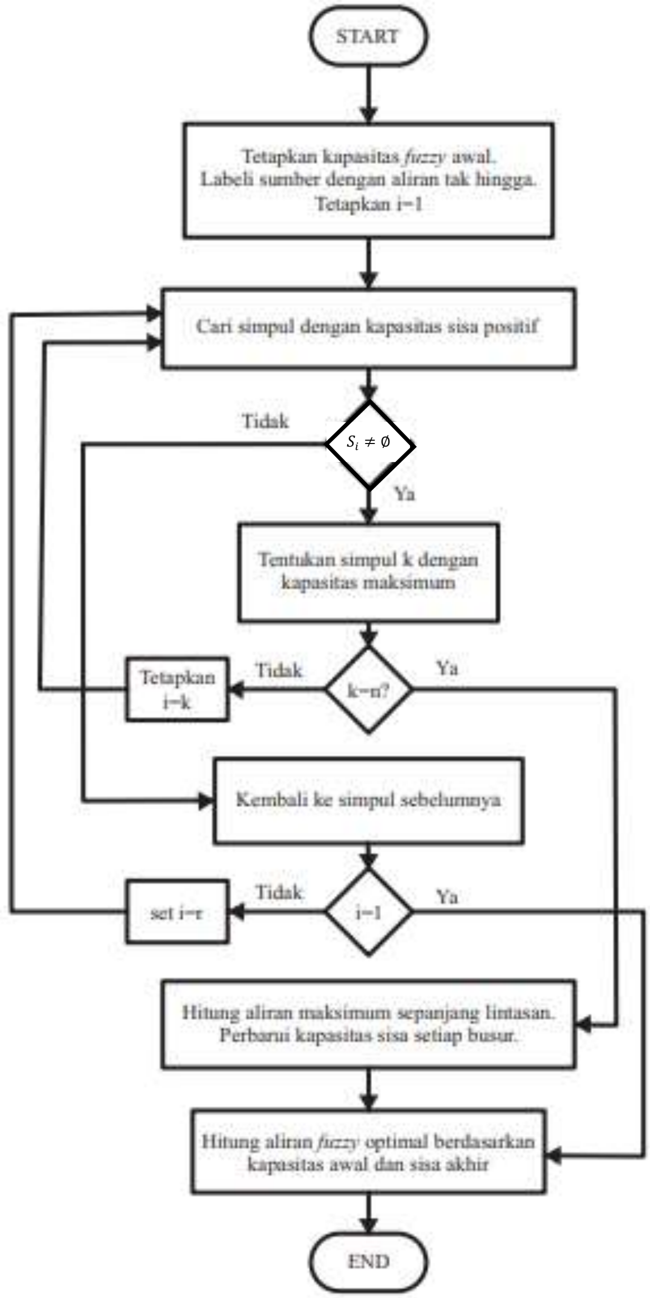
1. Untuk semua busur (i, j), tetapkan $(\tilde{f}c_{ij}, \tilde{f}c_{ji}) = (\tilde{f}\bar{c}_{ij}, \tilde{f}\bar{c}_{ji})$. Misalkan $\tilde{f}a_1 = (\infty, \infty, \infty, \infty)$ dan beri label sumber 1 dengan $[(\infty, \infty, \infty, \infty), -]$. Tetapkan $i = 1$, dan lanjutkan ke Langkah 2.
2. Misalkan S_i adalah himpunan simpul j yang belum terlabeli yang bisa diperoleh langsung dari simpul i oleh busur yang mempunyai kapasitas sisa positif. Jika $S_i \neq \emptyset$, lanjutkan ke Langkah 3. Jika tidak, lanjutkan ke Langkah 4.
3. Tentukan $k \in S_i$ sedemikian sehingga $\max_{j \in S_i}\left\{\Re(\tilde{f}c_{ij})\right\} = \Re(\tilde{f}c_{ik})$. Tetapkan $\tilde{f}a_k = \tilde{f}c_{ik}$ dan beri label simpul k dengan $\left[\tilde{f}a_k, i\right]$. Jika $k = n$, maka simpul

tujuan sudah terlabeli, dan jalur penerobos ditemukan, lanjutkan ke Langkah 5. Jika tidak, tetapkan $i = k$, dan kembali ke Langkah 2.

4. Jika $i = 1$, maka lintasan penerobos tidak ditemukan, lanjutkan ke Langkah 6. Jika tidak, misalkan r adalah simpul yang terakhir diberi label sebelum simpul i. Maka, hapus i dari himpunan simpul yang bertetangga dengan r. Tetapkan $i = r$ dan lanjutkan ke Langkah 2.
5. Misalkan $N_p = \{1, k_1, k_2, \dots, n\}$ adalah jalur penerobos ke p dari simpul sumber 1 ke simpul tujuan n. Maka, aliran maksimum sepanjang lintasan tersebut dihitung sebagai $\tilde{f}_p = \min\{\tilde{f}a_1, \tilde{f}a_{k1}, \tilde{f}a_{k2}, \dots, \tilde{f}a_n\}$. Kapasitas sisa setiap busur sepanjang jalur penerobos dihitung sebagai penurunan dikurangi sebesar $\tilde{f}_p$ jika busur tersebut searah aliran dan penambahan sebesar $\tilde{f}_p$ jika busur tersebut berlawanan arah dengan aliran. Jadi, untuk simpul i dan j pada lintasan, aliran-aliran sisa akan berubah dari $(\tilde{f}c_{ij}, \tilde{f}c_{ji})$ menjadi:
   a. $(\tilde{f}c_{ij} \ominus \tilde{f}_p, \tilde{f}c_{ji} \oplus \tilde{f}_p)$ jika alirannya dari i ke j
   b. $(\tilde{f}c_{ij} \oplus \tilde{f}_p, \tilde{f}c_{ji} \ominus \tilde{f}_p)$ jika alirannya dari j ke i.

   Kembalikan lagi semua simpul yang telah terhapus pada Langkah 4. Tetapkan $i = 1$, dan kembalikan ke Langkah 2 untuk mencari jalur penerobos baru.
6. Diberikan bahwa m buah jalur penerobos m telah ditemukan pada aliran *fuzzy maximum* dalam sebuah jaringan adalah $\tilde{F} = \tilde{f}_1 \oplus \tilde{f}_2 \oplus \dots \oplus \tilde{f}_m$. Dengan menggunakan aliran sisa awal $(\tilde{f}\bar{c}_{ij}, \tilde{f}\bar{c}_{ji})$ dan aliran akhir $(\tilde{f}c_{ij}, \tilde{f}c_{ji})$ pada busur (i, j), aliran *fuzzy* optimal pada busur (i, j) dihitung sebagai berikut. Misalkan $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = (\tilde{f}\bar{c}_{ij} \ominus \tilde{f}c_{ij}, \tilde{f}\bar{c}_{ji} \ominus \tilde{f}c_{ji})$. Jika $\Re(\tilde{\alpha}) > 0$, aliran *fuzzy* optimal dari i ke j adalah $\tilde{\alpha}$. Sebaliknya, jika $\Re(\tilde{\beta}) > 0$, aliran *fuzzy* optimal dari j ke i adalah $\tilde{\beta}$.

Secara ringkas, tahapan penyelesaian masalah *Fuzzy Maximum Flow* dapat diilustrasikan dengan *flowchart* pada Gambar 3.1 dibawah ini.



Gambar 3. 1 *Flowchart* Tahapan Penyelesaian FMFP dengan bilangan *fuzzy* trapesium.