BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ruang Lebesgue merupakan ruang fungsi yang paling penting dari fungsi-fungsi yang dapat diukur, karena Castillo dan Rafeiro (2016) mengatakan bahwa dalam beberapa hal, ruang Lebesgue merupakan prototipe dari semua ruang fungsi. Ruang Lebesgue yang diperkenalkan oleh Henri Lebesgue adalah ruang fungsi yang dilengkapi dengan norma yang berasal dari pengintegralan absolut dari fungsi tersebut. Banyak ahli matematika mengkaji mengenai ruang Lebesgue sampai saat ini. Salah satu hasil kajian ruang Lebesgue yaitu Ruang Orlicz.

Ruang Orlicz L_Φ pertama kali diperkenalkan pada tahun 1931 oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz, yang merupakan perumuman dari ruang Lebesgue L_p dengan $1 \leq p < \infty$ (Orlicz, 1992, hlm. 203). Terdapat dua versi berbeda dari ruang Orlicz yaitu ruang Orlicz kontinu dan ruang barisan Orlicz (Kamthan & Gupta, 1981, hlm. 297; Lindenstrauss & Trzfriri, 1971, hlm. 137). Peneliti-peneliti yang mengkaji ruang Orlicz kontinu di antaranya Maligranda, L. (1989), Masta, A. A. (2016), dan peneliti terdahulu lainnya. Sementara itu, ruang barisan Orlicz pertama kali diperkenalkan pada tahun 1971 oleh J. Lindenstrauss dan L. Tzafriri dengan memperumum ruang barisan *summable-p* (ℓ_p) untuk $1 \leq p < \infty$. Setelahnya, Maligranda, L., & Mastylo, M. (2000), Awad A. Bakery & Rafaf, R. (2020), dan Prayoga, P. S., & Fatimah, S. (2020) mengkaji mengenai ruang barisan Orlicz ini. Pada penelitian ini, penulis fokus membahas ruang barisan Orlicz dengan mengacu pada hasil yang sudah diperoleh peneliti terdahulu.

Pada bagian ini, penulis akan mengenalkan terlebih dahulu definisi ruang barisan Orlicz yang didefinisikan pada tahun 2000 oleh Maligranda, L. dan Mastylo, M., sebagai berikut.

Misalkan $\Phi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ merupakan fungsi Orlicz yaitu fungsi konveks yang kontinu dimana Φ bernilai nol hanya di titik nol, maka didefinisikan ruang barisan Orlicz

$$\ell_\Phi = \{X = (x_n) \colon \rho_\Phi(\alpha X) < \infty \text{ untuk suatu } \alpha > 0\}$$

dengan $\rho_\Phi(\alpha X) = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(\alpha|x_n|)$ untuk setiap barisan bilangan real X, yang dilengkapi dengan norma Luxemburg

$$\|X\|_{\Phi} = \left\{\lambda > 0 : \rho_{\Phi}\left(\frac{X}{\alpha}\right) \leq 1\right\}.$$

Definisi fungsi Orlicz di atas serupa dengan definisi fungsi Young pada ruang Orlicz kontinu yaitu suatu fungsi $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ dikatakan fungsi Young jika Φ konveks, $\Phi(0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = \infty$, dan Φ kontinu (Masta, dkk., 2018). Selanjutnya Prayoga, P. S. (2020) menggunakan definisi ini untuk mendefinisikan ruang barisan Orlicz pada penelitiannya mengenai sifat inklusi dan perumuman ketaksamaan Hölder pada ruang barisan Orlicz.

Kajian mengenai perumuman ruang Orlicz menjadi hal menarik untuk ditelusuri, sebagaimana Rao dan Ren pada 1991 telah mengkajinya pada bab terakhir bukunya yang berjudul *Theory of Orlicz spaces* (Rao dan Ren, 1991). Metode yang dilakukan Rao dan Ren adalah dengan memodifikasi norma Luxemburg. Selanjutnya Dermawan mengkaji juga perumuman ruang Orlicz dengan metode kajiannya yaitu memodifikasi fungsi Young dengan fungsi Young diperluas yang didefinisikan Dermawan (2022). Kemudian, pada tahun 2023, Dasep, dkk. mengkaji perumuman ruang barisan Orlicz menggunakan metode serupa dengan yang dilakukan Dermawan (Dasep, dkk., 2023).

Sebelum membahas lebih jauh, berikut diperkenalkan definisi ruang Orlicz diperumum versi Rao dan Ren yang didefinisikan sebagai himpunan semua fungsi terukur $f: X \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat $\int_{X} \varphi(\alpha|f|)\, dx < \infty$ untuk suatu $\alpha > 0$, dimana φ adalah fungsi naik, kontinu, $\varphi(0) = 0$, dan $\varphi(x) = \varphi(-x)$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Ruang Orlicz diperumum dinotasikan dengan $L_{\varphi}(X) = L_{\varphi}$ dan dilengkapi dengan norma

$$\|f\|_{\varphi} = \inf\left\{k > 0 : \int_X \rho_{\varphi}\left(\frac{|f|}{k}\right) dx \leq k\right\}.$$

Sifat-sifat fungsi Young yang telah diperoleh oleh para peneliti sebelumnya digunakan untuk membuktikan sifat inklusi pada ruang Orlicz. Sifat inklusi adalah suatu hal yang menarik untuk diteliti karena di dalamnya mengkaji mengenai keterkaitan hubungan antar ruang. Pada tahun 1966 Welland, R. mengkajinya dengan memberikan syarat cukup sifat inklusi pada ruang Orlicz (Welland, 1966). Kemudian, Kufner, A., John, O. dan Fučik, S. melakukan pengembangan dari hasil penelitian Welland, R. dengan menambah syarat cukup dan perlu pada domain fungsi berukuran berhingga (Kufner dkk., 1977). Selanjutnya Maligranda, L. bersama Mastylo mengembangkannya untuk domain fungsi berukuran tak hingga (Maligranda, 1989) dengan menggunakan pembuktian tak langsung. Lalu, Masta (2018) melakukan kajian yang sama dengan Maligranda, L. dan Mastylo tetapi dengan menggunakan pembuktian langsung, dan cara pembuktian ini dipandang lebih singkat dibandingkan pembuktian tak langsung.

Pada tahun 2000, Maligranda, L. dan Mastylo melanjutkan penelitiannya dengan mengkaji syarat cukup dan perlu sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz. Di samping itu, Masta, dkk. pada tahun 2016 mengkaji sifat inklusi pada ruang Orlicz tipe Lemah dan pada ruang Orlicz-Morrey tahun 2018. Selanjutnya pada tahun 2020, Prayoga, dkk. mengkaji sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz.

Berdasarkan pemaparan di atas dan kajian yang telah dilakukan peneliti-peneliti terdahulu mengenai perumuman ruang Orlicz, penulis termotivasi mengonstruksi ruang barisan Orlicz diperumum dengan memodifikasi norma Luxemburg hampir serupa dengan norma pada ruang Orlicz diperumum versi Rao dan Ren (1991). Kemudian memodifikasinya lagi dengan mengubah fungsi Young menggunakan definisi fungsi Young yang lebih luas. Penulis juga tertarik untuk mengkaji keberlakuan syarat cukup dan syarat perlu sifat inklusi pada ruang tersebut.

1.2 Rumusan Masalah

Mengingat kajian yang diberikan sebelumnya, permasalahan yang dikaji dalam penelitian ini diartikulasikan sebagai berikut:

1. Bagaimana pendefinisian dari perumuman ruang barisan Orlicz dengan memodifikasi norma Luxemburg pada ruang barisan Orlicz menjadi $\|X\|_{\ell_\Phi^*(\mathbb{R})} = \inf\left\{k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_n|}{k}\right) \leq k \right\}$?
2. Bagaimana pendefinisian dari perumuman ruang barisan Orlicz dengan mengganti fungsi Young menjadi fungsi Young-s sehingga normanya menjadi $\|X\|_{\ell_{\Phi_s}^*(\mathbb{R})} = \inf\left\{k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_s\left(\frac{|x_n|}{k}\right) \leq k \right\}$?
3. Bagaimana syarat cukup dan perlu keberlakuan sifat inklusi pada perumuman ruang barisan Orlicz dengan memodifikasi norma Luxemburg?

4. Bagaimana syarat cukup dan perlu keberlakuan sifat inklusi pada perumuman ruang barisan Orlicz dengan menggunakan fungsi Young-s?

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian tercermin dari perumusan masalah penelitian yang sudah dipaparkan di atas, yaitu.

1. Memperoleh definisi dari perumuman ruang barisan Orlicz dengan memodifikasi norma Luxemburg pada ruang barisan Orlicz menjadi $\|X\|_{\ell^*_{\Phi_s}(\mathbb{R})} = \inf\left\{k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{|x_n|}{k}\right) \leq k\right\}$.
2. Memperoleh definisi dari perumuman ruang barisan Orlicz dengan mengganti fungsi Young menjadi fungsi Young-s sehingga normanya menjadi $\|X\|_{\ell^*_{\Phi_s}(\mathbb{R})} = \inf\left\{k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_s\left(\frac{|x_n|}{k}\right) \leq k\right\}$.
3. Mengetahui syarat cukup dan perlu dari sifat inklusi pada perumuman ruang barisan Orlicz dengan memodifikasi norma Luxemburg.
4. Mengetahui syarat cukup dan perlu dari sifat inklusi pada perumuman ruang barisan Orlicz dengan menggunakan fungsi Young-s.

1.4 Batasan Penelitian

Penelitian ini berfokus pada fungsi Young dengan domain dan range $[0, \infty)$. Selain itu, ruang barisan Orlicz diperumum yang dikaji berfokus pada pendefinisian dan sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz diperumum.

1.5 Manfaat Penelitian

Topik ini diteliti dengan harapan dapat dijadikan alternatif bahan rujukan untuk para pembaca dalam memperdalam pemahaman materi tentang ruang barisan Orlicz diperumum. Penulis juga berharap hasil penelitian ini dapat bermanfaat untuk peneliti lainnya yang ingin mengkaji topik serupa dan mengembangkan penelitian lanjutan tentang ruang barisan Orlicz.

1.6 Sistematika Penulisan

Penulis menyusun skripsi ini dalam 6 bab. Pada Bab I Pendahuluan, penulis memaparkan latar belakang pemilihan topik skripsi dilengkapi dengan rumusan masalah, tujuan, manfaat, batasan, dan sistematika penulisan penelitian. Selanjutnya di Bab II Kajian Pustaka penulis memaparkan hasil studi literatur melalui berbagai sumber seperti buku dan jurnal yang terkait dengan topik skripsi yang akan menjadi teori pendukung dalam penelitian, di antaranya berisi fungsi konveks dan konveks-*s*; fungsi Young dan Young-*s*; barisan dan deret bilangan real; serta ruang bernorma, ruang quasi-norma, dan ruang Fréchet. Metodologi yang digunakan dalam penelitian ini disampaikan pada Bab III.

Bab IV berisi tentang definisi, sifat, dan sifat inklusi ruang barisan Orlicz. Selanjutnya di Bab V membahas permasalahan skripsi, yaitu tentang ruang yang lebih umum dari ruang barisan Orlicz dengan merujuk pada Bab II dan hasil yang diperoleh pada Bab IV.

Kesimpulan dari hasil penelitian yang disusun penulis dan saran untuk penelitian lanjutan tentang ruang barisan Orlicz dibahas dalam bab terakhir skripsi, yaitu Bab VI.