

**PERUMUMAN RUANG BARISAN ORLICZ MENGGUNAKAN NORMA
VERSI RAO DAN REN BESERTA SIFAT INKLUSINYA**

SKRIPSI

diajukan untuk memenuhi sebagian syarat untuk memperoleh gelar Sarjana
Matematika Kelompok Bidang Keahlian Analisis



Oleh:

LIANNA RIZKY GUNAWAN

NIM. 2003073

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA**

2024

**PERUMUMAN RUANG BARISAN ORLICZ MENGGUNAKAN NORMA
VERSI RAO DAN REN BESERTA SIFAT INKLUSINYA**

Oleh:

Lianna Rizky Gunawan

NIM. 2003073

diajukan untuk memenuhi sebagian syarat untuk memperoleh gelar Sarjana
Matematika Kelompok Bidang Keahlian Analisis

© Lianna Rizky Gunawan 2024

Universitas Pendidikan Indonesia

Juli 2024

Hak Cipta dilindungi undang-undang.

Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian, dengan dicetak ulang, difotokopi, atau dengan cara lainnya tanpa izin dari penulis.

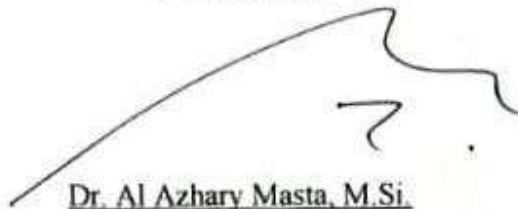
LEMBAR PENGESAHAN

LIANNA RIZKY GUNAWAN

PERUMUMAN RUANG BARISAN ORLICZ MENGGUNAKAN
NORMA VERSI RAO DAN REN BESERTA SIFAT INKLUSINYA

disetujui dan disahkan oleh:

Pembimbing I



Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
NIP. 199006102015041001

Pembimbing II



Prof. Siti Fatimah, S.Pd., M.Si., Ph.D.
NIP. 196808231994032002

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Kartika Yulianti, M.Si.
NIP. 198207282005022001

ABSTRAK

Perumuman Ruang Barisan Orlicz Menggunakan Norma versi Rao dan Ren beserta Sifat Inklusinya

Oleh

Lianna Rizky Gunawan

Ruang Orlicz L_Φ pertama kali diperkenalkan pada tahun 1931 oleh Z. W. Birnbaum dan W. Orlicz, yang merupakan perumuman dari ruang Lebesgue L_p dengan $1 \leq p < \infty$. Ruang Orlicz memiliki dua versi yang berbeda yaitu ruang Orlicz kontinu dan ruang barisan Orlicz. Tujuan utama penelitian ini adalah untuk mengonstruksi ruang barisan Orlicz yang lebih umum dengan memodifikasi norma $\|X\|_{\ell_\Phi} = \inf \left\{ k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi \left(\frac{|x_n|}{k} \right) \leq 1 \right\}$ menjadi $\|X\|_{\ell_\Phi^*} = \inf \left\{ k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi \left(\frac{|x_n|}{k} \right) \leq k \right\}$ kemudian mengganti fungsi Young menjadi fungsi Young- s . Sementara itu, tujuan lainnya adalah untuk melihat sifat inklusi pada ruang barisan Orlicz tersebut. Metode yang digunakan pada penelitian ini menggunakan sifat-sifat fungsi Young dan Young- s serta norma pada ruang barisan Orlicz yang akan dikonstruksi. Hasil dari penelitian ini adalah diperolehnya ruang barisan Orlicz diperumum dengan versi berbeda dari penelitian sebelumnya, disertai sifat inklusi pada ruang tersebut.

Kata Kunci: ruang barisan Orlicz, ruang barisan Orlicz diperumum, fungsi Young, fungsi Young- s , sifat inklusi.

ABSTRACT

Generalization of the Orlicz Sequence Space with Norm by Rao and Ren including the Inclusion Properties

By

Lianna Rizky Gunawan

The Orlicz space L_Φ was first introduced in 1931 by Z. W. Birnbaum and W. Orlicz, which is an extension of Lebesgue space L_p with $1 \leq p < \infty$. Orlicz spaces has two different versions namely countinuous Orlicz space and Orlicz sequence space The main objective of this study is to construct a more general Orlicz sequence space by modifying the norm $\|X\|_{\ell_\Phi} = \inf \left\{ k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi \left(\frac{|x_n|}{k} \right) \leq 1 \right\}$ to $\|X\|_{\ell_\Phi^} = \inf \left\{ k > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} \Phi \left(\frac{|x_n|}{k} \right) \leq k \right\}$ and then change the Young function to Young-s function. Meanwhile, another goal is to see the inclusion properties of the Orlicz sequence space. The method used in this research is to use the properties of Young and s-Young functions and norms on the Orlicz sequence spaces to be constructed. The result of this research is the generalized Orlicz sequence spaces with a different version from previous research, along with the inclusion properties of the space.*

Keywords: *Orlicz sequence space, generalized Orlicz sequence space, Young function, s-Young function, inclusion properties.*

DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA	ii
KATA PENGANTAR	iii
UCAPAN TERIMA KASIH	iv
ABSTRAK	v
<i>ABSTRACT</i>	vi
DAFTAR ISI	vii
DAFTAR GAMBAR	ix
DAFTAR LAMBANG	x
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian	4
1.4 Batasan Penelitian	4
1.5 Manfaat Penelitian	4
1.6 Sistematika Penulisan	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA	6
2.1 Fungsi Konveks dan Konveks-s	6
2.2 Fungsi Young dan Young-s	10
2.3 Barisan dan Deret Bilangan Real	20
2.4 Ruang Bernorma, Ruang Quasi-Norma, dan Ruang Fréchet	22
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	24
BAB IV RUANG BARISAN ORLICZ DAN PERUMUMANNYA	26
4.1 Ruang Barisan Orlicz	26
4.1.1 Definisi Ruang Barisan Orlicz $\ell_{\Phi}(\mathbb{R})$	26
4.1.2 Sifat Inklusi pada Ruang Barisan Orlicz	30
4.2 Ruang Barisan Orlicz Diperumum $\ell_{\Phi_s}(\mathbb{R})$	35
4.2.1 Definisi Ruang Barisan Orlicz Diperumum $\ell_{\Phi_s}(\mathbb{R})$	35
4.2.2 Sifat-Sifat pada $\ell_{\Phi_s}(\mathbb{R})$	37
4.2.3 Sifat Inklusi pada $\ell_{\Phi_s}(\mathbb{R})$	45

BAB V RUANG BARISAN ORLICZ DIPERUMUM DENGAN NORMA VERSI RAO DAN REN	51
5.1 Ruang Barisan Orlicz Diperumum $\ell_{\Phi}^*(\mathbb{R})$.....	51
5.1.1 Definisi Ruang Barisan Orlicz Diperumum $\ell_{\Phi}^*(\mathbb{R})$	51
5.1.2 Sifat-Sifat pada $\ell_{\Phi}^*(\mathbb{R})$	55
5.1.3 Sifat Inklusi pada $\ell_{\Phi}^*(\mathbb{R})$	66
5.2 Ruang Barisan Orlicz Diperumum $\ell_{\Phi_s}^*(\mathbb{R})$	72
5.2.1 Definisi Ruang Barisan Orlicz Diperumum $\ell_{\Phi_s}^*(\mathbb{R})$	72
5.2.2 Sifat-Sifat pada $\ell_{\Phi_s}^*(\mathbb{R})$	75
5.2.3 Sifat Inklusi pada $\ell_{\Phi_s}^*(\mathbb{R})$	85
BAB VI PENUTUP	92
6.1 Kesimpulan	92
6.2 Saran	93
DAFTAR PUSTAKA	94

DAFTAR GAMBAR

- Gambar 2.1 Grafik fungsi Young $\Phi(x) = xe^x, x \in [0, \infty)$11
- Gambar 2.2 Grafik fungsi Young-s $\Phi(t) = t^p$ dengan $p \in \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup [1, \infty)$.15

DAFTAR LAMBANG

Lambang	Keterangan
$L_{\Phi}(X)$	Ruang Orlicz dengan domain fungsi himpunan X
L_p	Ruang Lebesgue
ℓ_p	Ruang barisan <i>summable-p</i> atau Ruang barisan Lebesgue
Φ	Fungsi Young
$\ \cdot\ _{\Phi}$	Norma Luxemburg
\mathbb{R}^n	Himpunan bilangan real berdimensi n
\mathbb{R}	Himpunan bilangan real
I	Interval
Φ^{-1}	Invers fungsi Young
Φ_s	Fungsi Young diperluas atau Young-s
Φ_s^{-1}	Invers fungsi Young-s
$X = (x_n)$	Barisan bilangan real
$X' = (x_{n_k})$	Subbarisan bilangan real dari X
$\sum x_n$	Deret bilangan real
$\ \cdot\ $	Fungsi bernorma
$ \mathcal{S}_{m;N_0} $	Kardinalitas dari himpunan $\mathcal{S}_{m;N_0}$
$\xi_n^{m_0, N_0}$	Barisan Karakteristik
$\ell_{\Phi}(\mathbb{R})$	Ruang barisan Orlicz I
$\ell_{\Phi_s}(\mathbb{R})$	Ruang barisan Orlicz diperumum I
$\ell_{\Phi}^*(\mathbb{R})$	Ruang barisan Orlicz II
$\ell_{\Phi_s}^*(\mathbb{R})$	Ruang barisan Orlicz diperumum II
$\ \cdot\ _{\ell_{\Phi}(\mathbb{R})}$	Norma pada ruang $\ell_{\Phi}(\mathbb{R})$
$\ \cdot\ _{\ell_{\Phi_s}(\mathbb{R})}$	Norma pada ruang $\ell_{\Phi_s}(\mathbb{R})$
$\ \cdot\ _{\ell_{\Phi}^*(\mathbb{R})}$	Norma pada ruang $\ell_{\Phi}^*(\mathbb{R})$
$\ \cdot\ _{\ell_{\Phi_s}^*(\mathbb{R})}$	Norma pada ruang $\ell_{\Phi_s}^*(\mathbb{R})$

DAFTAR PUSTAKA

- Awad A Bakery & Afaf R. (2020). Some Properties of Pre-quasi Norm On Orlicz Sequence Space. *Journal of Inequalities and Applications*, 55.
- Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to Real Analysis*. Urbana: John Wiley & Sons, Inc.
- Castillo, R. E., & Rafeiro, H. (2016). *An Introductory Course in Lebesgue Spaces*. Bogotá: Springer.
- Dasep, D. (2023). *Sifat Inklusi dan Ketaksamaan Hölder pada Ruang Barisan Orlicz Diperumum*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Dermawan, R. (2022). *Sifat Inklusi dan Ketaksamaan Hölder pada Ruang Orlicz Diperumum*. Bandung: Universitas Pendidikan Indonesia.
- Fatimah, S., Masta, A. A., Ifronika, Wafiqoh, R., & Agustine, P. C. (t.t.). (2019). Sufficient and necessary conditions for generalized Hölder's inequality in p-summable sequence spaces. *Journal of Physics: Conference Series*. Vol. 1280. No. 2. IOP Publishing.
- Fatimah, S., Masta, A. A., Ifronika, I., Wafiqoh, R., & Agustine, (2020). Generalized Hölder's inequality in Orlicz sequence spaces. In Proceedings of the 7th Mathematics, Science, and Computer Science Education International Seminar, MSCEIS 2019, 12 October 2019, Bandung, West Java, Indonesia.
- Gunawan, H., Kikianty, E., & Schwanke, C. Discrete Morrey Spaces and Their Inclusion Properties. *Mathematische Nachrichten*, 291(8-9), 1-14, 2017.
- Harjulehto, P., & Hästö, P. (2019). *Generalized Orlicz Spaces* (pp. 47-78). Springer International Publishing.
- Hudzik, H., & Maligranda, L. (1994). Some remarks on s-convex functions. *Aequationes mathematicae*, 48, 100-111.
- Ifronika, Masta, A. A., Nur, M., & Gunawan, H. (2018). Generalized hölder's inequality in Orlicz spaces. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, 22(1), 25-34
- Kamthan, P. K., & Gupta, M. (1981). *Sequence Spaces and Series*. New York: Marcel Dekker, Inc.

- Kufner, A., John, O., & Fucik, S. (1977). *Function Spaces*. Czechoslovakia: Noordhoff International Publishing.
- Lindenstrauss, J., & Tzafriri, L. (1971). On Orlicz Sequence Spaces I. *Israel Journal of Mathematics*, 10, 379-390
- Maligranda, L. (1989). *Orlicz Spaces and Interpolation*. Departamento de Matemática: Universidade Estadual de Campinas.
- Maligranda, L., & Mastyo, M. (2000). Inclusion Mappings between Orlicz Sequence Spaces. *Journal of Functional Analysis* 176, 264-279.
- Masta, A. A. (2018). *Sifat Inklusi pada Ruang Orlicz-Morrey*. Bandung: Institut Teknologi Bandung.
- Masta, A. A., Gunawan, H., & Setya-Budhi, W. (2016). Inclusion property of Orlicz and weak Orlicz spaces. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*, 48-3, 193-203.
- O'Neil, R. (1965). Fractional Integration in Orlicz Spaces. I. *Transactions of the American Mathematical Society*, 115, 300-328.
- Orlicz, W. (1992). *Linear Functional Analysis (Series in Real Analysis Volume 4)*. Singapore: World Scientific.
- Prayoga, P. S., Masta, A. A., & Fatimah, S. (2020). Sifat Inklusi dan Perumuman Ketaksamaan Hölder Pada Ruang Barisan Orlicz. *Jurnal EurekaMatika*, 8, No 2.
- Rao, M., & Ren, Z. (1991). *Theory of Orlicz spaces*. New York: Marcel Dekker, Inc.
- Sawano, Y. (2011). *A Handbook of Harmonic Analysis*. Retrieved Februari 1, 2022, from <https://www.comp.tmu.ac.jp/yoshihiro/teaching/harmonic-analysis/harmonic-analysis-textbook.pdf>
- Sumiaty, E., & Kurniadi, Y., (2008). Ruang Barisan Musielak-Orlicz. Seminar Nasional Matematika. Bandung.
- Welland, R. (1966). Inclusion relations among Orlicz spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 17(135).