BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Kekonveksan merupakan salah satu ilmu dalam matematika yang terus berkembang hingga sekarang. Gagasan tentang kekonveksan berawal dari himpunan konveks yang diperkirakan sudah ada sejak zaman Yunani kuno yang bisa ditelusuri hingga Mesir kuno dan Babilonia (Dwilewicz, 2000). Kekonveksan pada Yunani kuno muncul dalam geometri, seperti dalam deskripsi lima polihedra ruang cembung beraturan (Henrion, 2013). Archimedes pada 250 SM mendefinisikan himpunan konveks serupa seperti yang dikenal saat ini (Henrion, 2013). Suatu himpunan dikatakan konveks jika setiap segmen garis dari dua titik berada pada himpunan tersebut (Boyd dan Vandenberghe, 2004).

Selain himpunan konveks, kekonveksan terus berkembang hingga dikenal adanya fungsi konveks. Kajian tentang fungsi konveks dimulai sejak abad ke-19 yang berasal dari O. Hölder (1889), O. Stolz (1893), dan J. Hadamard (1893) (Niculescu dan Persson, 2004). Kemudian, J. L. W. V. Jensen pada tahun 1905 dengan penelitiannya yang berjudul "Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdi" memberikan definisi fungsi konveks dan konkaf di suatu interval. Suatu fungsi dikatakan konveks jika setiap segmen garis yang menghubungkan dua titik grafik fungsi berada pada atau di atas grafik fungsi tersebut (Boyd dan Vandenberghe, 2004). Selain itu, Jensen (1906) berhasil memperoleh ketaksamaan pada fungsi konveks yang dikenal sebagai Ketaksamaan Jensen dengan judul penelitiannya "Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes". Ketaksamaan ini memberikan perumuman untuk titik-titik yang digunakan pada fungsi konveks sampai berhingga titik. Penelitian tentang fungsi konveks terus berlanjut, seperti yang dilakukan oleh Pharmén dan Lindelöf (1908), G. Pólya (1929), G. Valiron (1932), dan T. Popoviciu (1945) (Beckenbach, 1948).

Selain fungsi konveks, perkembangan tentang kekonveksan berlanjut hingga ditemukannya fungsi konkaf. Para matematikawan yang mengkaji fungsi konkaf, yakni T. Bonnesen dan W. Fenchel (1934), H. W. Kuhn dan A. W. Tucker (1951), serta K. J. Arrow dan A. C. Enthoven (1961). Suatu fungsi dikatakan konkaf jika setiap segmen garis yang menghubungkan dua titik grafik fungsi terletak pada atau di bawah grafik fungsi tersebut (Arrow dan Enthoven, 1961). Selain itu, diperoleh juga keterkaitan antara fungsi konveks dan konkaf yang menyatakan bahwa suatu fungsi dikatakan konkaf jika negatif dari fungsi tersebut adalah konveks dan berlaku pula sebaliknya (Bertsekas, 2009). Perkembangan fungsi konkaf terus berlanjut hingga diperoleh perumuman fungsi konkaf. Para matematikawan yang mengkaji tentang perumuman fungsi konkaf, yaitu M. A. Hanson (1964), O. L. Mangasarian (1965), J. Ponstein (1967), S. Karamardian (1967), serta H. J. Greenberg dan W. P. Perskala (1971) (Thompson dan Parke, 1973).

Kajian tentang kekonveksan juga semakin berkembang hingga ke ruang metrik yang awalnya diinisiasi oleh Menger pada tahun 1928 (Shimizu, 1998). Blumenthal pada tahun 1953 mengembangkan hasil yang diperoleh Menger dengan mendefnisikan ruang metrik konveks. Menurut Blumenthal (dalam Shimizu, 1998), suatu ruang metrik (X, d) dikatakan konveks jika untuk setiap $x, y \in X, x \neq y$, terdapat $z \in X$ dengan $d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$. Kemudian pada 1970, W. Takahashi dalam penelitiannya yang berjudul “A Convexity in Metric Space and Nonexpansive Mappings, I” memperkenalkan definisi lain dari ruang metrik konveks yang merupakan perumuman kekonveksan di ruang linier bernorma dilengkapi struktur konveks $W(x, y; t) = tx + (1 - t)y$. Ruang metrik dikatakan konveks jika ruang metrik (X, d) dengan struktur konveks berupa pemetaan $W : X \times X \times [0,1] \to X$ di mana $W(x, y; t) = tx + (1 - t)y$, $x, y \in X$, dan $0 \leq t \leq 1$, serta semua $u \in X$ yang memenuhi $d\big(u, W(x, y; t)\big) \leq td(u, x) + (1 - t)d(u, y)$ (Takahashi, 1970). Menurut Takahashi (1970), ruang Banach dan setiap subhimpunan konveks adalah ruang metrik konveks juga. Penelitian tentang ruang metrik konveks terus berkembang seperti yang dilakukan oleh L. A. Talman (1977), W. A. Kirk (1981), dan Y. Kijima (1987) (Shimizu, 1998).

Melanjutkan hasil yang diperoleh oleh Takahashi, pada tahun 2016 A. A. Abdelhakim mendefinisikan fungsi bernilai real konveks di ruang metrik konveks yang dikenal dengan fungsi W-konveks. Suatu fungsi f bernilai real di ruang metrik konveks (X, W, d) dikatakan W-konveks jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $0 \leq t \leq 1$ memenuhi $f\big(W(x, y; t)\big) \leq tf(x) + (1 - t)f(y)$ (Abdelhakim 2016). Dalam hasil penelitian yang berjudul “A Convexity of Functions on Convex Metric Spaces of

Takahashi and Applications", Abdelhakim menjelaskan bahwa fungsi W-konveks serupa seperti fungsi konveks yang biasa. Perbedaannya hanya pada domain yang digunakan, yakni ruang metrik konveks. Selain itu, fungsi W-konveks merupakan perumuman dari fungsi konveks biasa di ruang linier bernorma yang diperumum menjadi ruang metrik konveks oleh Takahashi. Kemudian, banyak sifat-sifat utama dari fungsi konveks yang dipenuhi oleh fungsi W-konveks, tetapi terdapat juga sifat-sifat lain yang tidak secara otomatis berpindah sehingga perlu syarat tambahan (Abdelhakim 2016). Berdasarkan hasil ini, A. Rahmah dan Manuharawati (2019) pada hasil penelitiannya yang berjudul "Kekonveksan Suatu Fungsi pada Ruang Metrik Konveks" menjelaskan lebih rinci pembuktian sifat-sifat fungsi W-konveks yang telah diperoleh Abdelhakim.

Berdasarkan uraian di atas, penulis termotivasi untuk mengkaji tentang fungsi bernilai real yang konkaf di ruang metrik konveks yang didefinisikan Takahashi. Fungsi ini terinspirasi dari fungsi W-konveks sehingga dinamakan fungsi W-konkaf. Kemudian, dikaji juga bagaimana mengonstruksi definisi fungsi W-konkaf, mencari keterkaitan antara fungsi W-konveks dengan fungsi W-konkaf, sifat-sifat yang dimiliki fungsi W-konkaf, serta menunjukkan keberlakuan ketaksamaan Jensen bagi fungsi W-konveks dan fungsi W-konkaf di ruang metrik konveks Takahashi yang menggunakan struktur konveks.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini seperti berikut.

1. Bagaimana mengonstruksi definisi fungsi W-konkaf di ruang metrik konveks?
2. Bagaimana keterkaitan antara fungsi W-konveks dan W-konkaf di ruang metrik konveks?
3. Bagaimana sifat-sifat fungsi W-konkaf di ruang metrik konveks?
4. Bagaimana bentuk ketaksamaan Jensen untuk fungsi W-konveks dan W-konkaf di ruang metrik konveks?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan uraian latar belakang di atas, tujuan dari penelitian ini seperti berikut.

1. Mengonstruksi definisi fungsi W-konkaf di ruang metrik konveks.
2. Memperoleh keterkaitan antara fungsi W-konveks dan W-konkaf di ruang metrik konveks.
3. Memperoleh sifat-sifat fungsi W-konkaf di ruang metrik konveks.
4. Menunjukkan keberlakuan ketaksamaan Jensen untuk fungsi W-konveks dan W-konkaf di ruang metrik konveks.

1.4 Manfaat Penelitian

Penelitian ini sangat bermanfaat bagi penulis dalam menambah pengetahuan tentang ruang metrik konveks, fungsi W-konveks dan W-konkaf, serta keberlakuan ketaksamaan Jensen untuk fungsi W-konveks dan W-konkaf di ruang metrik konveks. Kemudian, penelitian ini diharapkan dapat digunakan oleh pembaca sebagai alternatif bahan rujukan dalam mempelajari fungsi W-konveks dan W-konkaf di ruang metrik konveks, khususnya sifat-sifat yang dimiliki fungsi W-konveks dan W-konkaf, serta ketaksamaan Jensen yang dimilikinya. Selain itu, hasil penelitian ini dapat memberikan manfaat bagi peneliti selanjutnya yang akan mengkaji hal serupa serta bisa mengembangkan penelitian lebih lanjut tentang ruang metrik konveks juga fungsi W-konveks dan W-konkaf.

1.5 Sistematika Penulisan

Pada penulisan skripsi ini sistematika yang digunakan sebagai berikut. Pada BAB I berupa pendahuluan yang terdiri atas latar belakang, rumusan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, dan sistematika penulisan. BAB II berupa kajian pustaka yang berisi teori-teori pendukung yang diperlukan pada penelitian ini. Teori-teori yang diperlukan diantaranya, fungsi, jenis-jenis fungsi, barisan fungsi, himpunan konveks, fungsi konveks, fungsi konkaf, ruang metrik, ruang metrik konveks, dan fungsi W-konveks beserta sifat-sifatnya. BAB III berupa metode penelitan yang digunakan, yakni studi literatur berdasarkan buku dan artikel jurnal terkait kemudian mengadaptasi teori-teori pendukung untuk mengonstruksi dan menjawab rumusan masalah penelitian. BAB IV berupa temuan dan pembahasan. Pada bagian ini disampaikan hasil yang diperoleh dalam penelitian berdasarkan rumusan masalah yang ada, kemudian dijelaskan hasil yang sudah ditemukan dan diperoleh tersebut. BAB V berupa simpulan dan saran dari hasil penelitian yang telah diperoleh dan dibahas.