

**FUNGSI  $W$ -KONKAF DAN SIFAT-SIFATNYA DI RUANG METRIK KONVEKS**

**SKRIPSI**

Diajukan sebagai syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika



Oleh

Rahmanda Amrullah

NIM 2000443

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA**

**FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**

**UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA**

**2024**

# **FUNGSI $W$ -KONKAF DAN SIFAT-SIFATNYA DI RUANG METRIK KONVEKS**

Oleh

Rahmanda Amrullah

NIM 2000443

Sebuah skripsi yang diajukan sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika  
Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

© Rahmanda Amrullah 2024  
Universitas Pendidikan Indonesia  
Juli 2024

Hak cipta dilindungi undang-undang.

Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian dengan dicetak ulang, difotokopi, atau cara lainnya tanpa izin dari penulis.

**LEMBAR PENGESAHAN**

**RAHMANDA AMRULLAH**

**FUNGSI  $W$ -KONKAF DAN SIFAT-SIFATNYA DI RUANG METRIK KONVEKS**

Disetujui dan disahkan oleh:

Pembimbing I



**Dra. Encum Sumiaty, M.Si.**

**NIP 196304201989032002**

Pembimbing II



**Dr. H. Cece Kustiawan, M.Si.**

**NIP 196612131992031001**

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



**Dr. Kartika Yulianti, M.Si.**

**NIP 198207282005012001**

## KATA PENGANTAR

*Bismillahirrahmanirrahim. Alhamdulillah rabbil 'alamin*, dengan izin, rahmat, dan nikmat dari Allah *subhanahu wa ta'ala*, penulis bisa menyelesaikan skripsi yang berjudul “Fungsi  $W$ -Konkaf dan Sifat-Sifatnya di Ruang Metrik Konveks”. *Shalawat* serta salam semoga tercurahlimpahkan kepada Nabi Muhammad *shallallahu 'alaihi wasallam* yang telah menuntun umatnya menuju jalan kebenaran. Kemudian, kepada para sahabatnya, keluarganya, serta umatnya.

Penulisan skripsi ini bertujuan untuk mengonstruksi definisi fungsi  $W$ -konkaf di ruang metrik konveks, menunjukkan keterkaitan antara fungsi  $W$ -konveks dan  $W$ -konkaf, memperoleh sifat-sifat yang dimiliki fungsi  $W$ -konkaf, serta menunjukkan keberlakuan ketaksamaan Jensen pada fungsi  $W$ -konveks dan  $W$ -konkaf.

Penulis menyadari bahwa masih ada kekurangan dalam skripsi ini. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun diperlukan dari para pembaca agar menjadi pembelajaran bagi penulis untuk penyempurnaan isi tulisan ini.

Bandung, Juli 2024

Penulis

## ABSTRAK

### Fungsi $W$ -Konkaf dan Sifat-Sifatnya di Ruang Metrik Konveks

Oleh: Rahmanda Amrullah

Kajian tentang kekonveksan seperti fungsi konveks, fungsi konkaf, ruang metrik konveks, dan fungsi  $W$ -konveks banyak dilakukan oleh para peneliti. Namun, masih terdapat topik lain yang belum dikaji, yakni fungsi  $W$ -konkaf di ruang metrik konveks. Oleh karena itu, penelitian ini mengkaji tentang fungsi  $W$ -konkaf, keterkaitan antara fungsi  $W$ -konveks dan  $W$ -konkaf, sifat-sifat yang dimiliki, serta ketaksamaan Jensen untuk fungsi  $W$ -konveks dan  $W$ -konkaf. Metode yang digunakan adalah mengadaptasi dan memodifikasi definisi fungsi konkaf dan  $W$ -konveks, keterkaitan fungsi konveks dan konkaf, sifat-sifat fungsi  $W$ -konveks, serta ketaksamaan Jensen pada fungsi konveks dan konkaf. Fungsi  $W$ -konkaf memiliki bentuk yang serupa dengan fungsi konkaf dan  $W$ -konveks. Diperoleh bahwa negatif dari fungsi  $W$ -konveks adalah  $W$ -konkaf. Sifat-sifat yang dimiliki fungsi  $W$ -konkaf serupa dengan fungsi  $W$ -konveks. Selain itu, ketaksamaan Jensen berlaku untuk fungsi  $W$ -konveks dan  $W$ -konkaf dengan bentuk dan syarat yang berbeda.

**Kata Kunci:** fungsi  $W$ -konveks, fungsi  $W$ -konkaf, ruang metrik konveks, ketaksamaan Jensen

**ABSTRACT*****The W-Concave Function and Its Properties on Convex Metric Space***

*By: Rahmanda Amrullah*

*Many researchers have studied convexity such as convex functions, concave functions, convex metric spaces, and W-convex functions. However, there is still another topic that has not been studied, namely W-concave function on convex metric spaces. Therefore, this research examines W-concave function, relation between W-convex and W-concave functions, their properties, and Jensen's inequality for W-convex and W-concave functions. The method used is adapt and modify the definition of concave and W-convex functions, relation between convex and concave functions, the properties of W-convex functions, and Jensen's inequality on convex and concave functions. The W-concave function has similar form with concave and W-convex functions. Obtained that, negative of W-convex function is W-concave. The properties of W-concave function are similar with W-convex function. Furthermore, Jensen's inequality applies to W-convex and W-concave functions with different forms and conditions.*

***Keyword:*** *W-convex function, W-concave function, convex metric space, Jensen inequality*

## DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN .....	ii
PERNYATAAN KEASLIAN KARYA .....	iii
KATA PENGANTAR.....	iv
UCAPAN TERIMA KASIH .....	v
ABSTRAK .....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	viii
DAFTAR ISI .....	ix
DAFTAR GAMBAR .....	xi
DAFTAR NOTASI.....	xiii
DAFTAR LAMPIRAN .....	xiv
BAB I PENDAHULUAN .....	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	4
1.5 Sistematika Penulisan.....	4
BAB II KAJIAN PUSTAKA .....	5
2.1 Fungsi .....	5
2.2 Fungsi Konveks dan Konkaf .....	7
2.3 Ruang Metrik dan Ruang Metrik Konveks .....	12
2.4 Fungsi $W$ -Konveks.....	17
BAB III METODE PENELITIAN.....	22
BAB IV TEMUAN DAN PEMBAHASAN .....	23
4.1 Fungsi $W$ -Konkaf.....	23
4.2 Sifat-Sifat Fungsi $W$ -Konkaf .....	28
4.3 Ketaksamaan Jensen.....	41
BAB V SIMPULAN DAN SARAN .....	48
5.1 Simpulan.....	48

5.2	Saran.....	49
	DAFTAR PUSTAKA.....	50
	LAMPIRAN.....	52



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Himpunan konveks.....	7
Gambar 2.2 Bukan himpunan konveks .....	7
Gambar 2.3 Fungsi $f(x) =  x $ .....	8
Gambar 2.4 Fungsi $g(x) = - x $ .....	9
Gambar 2.5 Fungsi $f(x) = 2x + 1$ .....	10
Gambar 2.6 Penerapan ketaksamaan Jensen di $\mathbb{R}$ .....	11
Gambar 2.7 Ruang metrik di $\mathbb{R}$ .....	12
Gambar 2.8 Ruang metrik di $\mathbb{R}^2$ .....	14
Gambar 2.9 Ruang metrik konveks di $\mathbb{R}$ .....	15
Gambar 2.10 Ruang metrik konveks di $\mathbb{R}^2$ .....	17
Gambar 2.11 Fungsi $f(x) = x^2$ .....	18
Gambar 2.12 Fungsi $f(x) = f(x_1, x_2) =  x_1  +  x_2 $ .....	19
Gambar 4.1 Fungsi $f(x) = - x $ .....	24
Gambar 4.2 Fungsi $f(x) = f(x_1, x_2) = - x_1 $ .....	24
Gambar 4.3 Fungsi $g(x) = -x^2$ .....	26
Gambar 4.4 Fungsi $af(x) = -\frac{ x }{2}$ .....	27
Gambar 4.5 Fungsi $\sum_{i=1}^3 a_i f_i(W(x, y; t)) = -2 x  - \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{4}$ .....	28
Gambar 4.6 Fungsi $g(f(x)) = g(f(x_1, x_2)) = -(- x_1 )^2$ .....	30
Gambar 4.7 Fungsi $g(x) = -x^2, x \in [0, 2]$ .....	31
Gambar 4.8 Fungsi $f(x) + k = -x^2 + 2$ .....	32
Gambar 4.9 Fungsi $\sum_{i=1}^3 f_i(W(x, y; t)) = - x  - x^2 - x^4$ .....	33
Gambar 4.10 Fungsi $af(x) = -\frac{ x }{4}$ .....	34
Gambar 4.11 Fungsi $af(x) = 2 x $ .....	35
Gambar 4.12 Fungsi $\sum_{i=1}^3 a_i f_i(W(x, y; t)) = -\frac{ x }{2} - \frac{5x^2}{4} - \frac{x^4}{8}$ .....	36
Gambar 4.13 Fungsi $\sum_{i=1}^3 a_i f_i(W(x, y; t)) = \frac{ x }{6} + \frac{7x^2}{4} + 2x^4$ .....	37
Gambar 4.14 Fungsi $f(x) = \min\{- x , -x^2, -x^3, -x^4\}, x \geq 0$ .....	38

Gambar 4.15 Maksimum dari fungsi $f(x) = -x^2$ .....	39
Gambar 4.16 Penerapan ketaksamaan Jensen fungsi $W$ -konveks .....	45
Gambar 4.17 Penerapan ketaksamaan Jensen fungsi $W$ -konkaf .....	47

## DAFTAR NOTASI

Lambang	Keterangan	Pemakaian pertama kali pada halaman
$X$	Himpunan	2
$d$	Metrik	2
$(X, d)$	Ruang metrik	2
$W$	Struktur konveks	2
$(X, W, d)$	Ruang metrik konveks	2
$f$	Fungsi	2
$f(W(x, y; t))$	Fungsi $W$ -konveks	2
$g \circ f$	Komposisi fungsi	6
$f _{A_1}$	Restriksi fungsi	6
$(f_n)$	Barisan fungsi	6
$C$	Himpunan konveks	7
$K$	Ruang linier	10
$\{P_a : a \in A\}$	Keluarga subhimpunan konveks dari $X$	14
$(Y_n)$	Barisan himpunan konveks	17

**DAFTAR LAMPIRAN**

Lampiran 1. Kode-kode dalam pembuatan grafik di Geogebra..... 52

## DAFTAR PUSTAKA

- Abdelhakim, A. A. (2016). A Convexity of Functions on Convex Metric Spaces. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, 24, 348–356.
- Arrow, K. J. dan Enthoven, A. C. (1961). Quasi-Concave Programming. *Econometrica*, 29(4), 779–800. Diakses dari <http://www.jstor.org/stable/1911819>
- Avriel, M., Diewert, W. E., Schaible, S., dan Zang, I. (2010). *Generalized Concavity*. Philadelphia: SIAM. Diakses dari <https://doi.org/10.1137/1.9780898719437.ch2>
- Bartle, R. G. dan Sherbert, D. R. (2011), *Introduction to Real Analysis*, (Edisi keempat). New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.
- Beckenbach, E. F. (1948). Convex Functions. *Bul Amer Math Soc*, 54, 439–460. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1948-08994-7>
- Bertsekas, D. P. (2009). *Convex Optimization Theory*. Massachusetts: Athena Scientific.
- Bonnesen, T. dan Fenchel, W. (1934). *Theorie der konvexen Körper*. Berlin: Springer.
- Boyd, S. dan Vandenberghe, L. (2004). *Convex Optimization*. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Conway, J. B., (2014), *A Course in Point Set Topology*. Switzerland: Springer.
- Dragomir, S. S. (2004). Bounds for The Normalised Jensen Functional. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 74(3), 471–478. DOI: <http://dx.doi.org/10.1017/S000497270004051X>
- Dwilewicz, R. J. (2000). A Short History of Convexity. *Differential Geometry - Dynamical Systems*, 11, 112–129.
- Henrion, D. (2013). *Convexity*. Princeton University Press, 1–4. Diakses dari <https://hal.science/hal-01184243/file/convexity.pdf>
- Jensen, L. J. W. V. (1905a). Om konvexe Funktioner og Uligheder mellem Middelvaerdier. *Nyt Tidsskrift for Matematik*, 16 B, 49–69. Diakses dari <https://www.jstor.org/stable/24528332>
- Jensen, L. J. W. V. (1906b). Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. *Acta Math*, 30, 175–193. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02418571>
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*. (Edisi Pertama). Canada: John Wiley and Sons. Inc.
- Kuhn, H. W. dan Tucker, A. W. (1951). Nonlinear Programming. *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley: University of California Press, 481–492.
- Niculescu, C. P. dan Persson, L-E. (2004), *Convex Functions and Their Applications: A contemporary approach*. Berlin: Springer.

- Popescu, P. G. dan Diaz-Barrero, J. L. (2006). Certain Inequalities for Convex Functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 7(2), 1–5.
- Rahmah, A. dan Manuharawati. (2019). Kekonveksan Suatu Fungsi Pada Ruang Metrik Konveks. *Jurnal Ilmiah Matematika*, 7(1), 18–27.
- Shimizu, T. (1998). Fixed Points of Multivalued Nonexpansive Mappings in Certain Convex Metric Spaces. *Research Institute for Mathematical Science*, 1031(7), 75–84.
- Sohrab, H. H. (2014). *Basic Real Analysis*. (Edisi Kedua). New York: Springer Science+Business Media.
- Takahashi, W. (1970). A Convexity in Metric Space and Nonexpansive Mappings, I. *Kodai Math. Sem. Rep.*, 22, 142–149.
- Thompson, Jr. W. A. dan Parke, D. W. (1973). Some Properties of Generalized Concave Functions. *Operations Research*, 21(1), 305–313. DOI: <http://dx.doi.org/10.1287/opre.21.1.305>