BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Teori graf adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari sifat-sifat graf. Graf adalah himpunan objek-objek yang disebut simpul (*vertex* atau *node*) dengan notasi $V(G)$ yang terhubung oleh sisi (*edge* atau busur) dengan notasi $E(G)$ (Lasim, Halikin, & Wijaya, 2022). Seiring berkembangnya zaman banyak topik-topik baru teori graf yang menjadi pembahasan penelitian saat ini, salah satunya adalah pelabelan graf. Menurut (Lasim, dkk., 2022) pelabelan graf adalah topik baru dalam teori graf yang mempelajari cara memberi label pada simpul dan sisi dalam graf. Pelabelan graf pertama kali diperkenalkan oleh Sedlacek pada tahun 1963 (Lasim, dkk., 2022). Pelabelan adalah sebuah fungsi yang menetapkan setiap simpul atau sisi dari sebuah graf ke sebuah angka, yang sering kali adalah sebuah kumpulan bilangan bulat positif (Taqiyah dan Rahadjeng, 2022). Sebuah pelabelan dengan domain fungsinya $\{V(G)\}$ adalah pelabelan simpul sedangkan pelabelan yang domainnya adalah sisi dikenal sebagai pelabelan sisi. Domain fungsi dari pelabelan total adalah sisi dan simpul (Taqiyah dan Rahadjeng, 2022).

Grahams dan Sloane (1980) memperkenalkan pelabelan harmonis. Pelabelan harmonis pada sebuah graf G dengan q buah sisi didefinisikan sebagai pemetaan satu-satu f dari himpunan simpul dalam graf G ke $\mathbb{Z}_q$ dengan $\mathbb{Z}_q$ adalah notasi bilangan bulat modulo q, sehingga untuk setiap $uv \in E(G)$ akan memiliki $f^*(uv) = \big(f(u) + f(v)\big)(\text{mod } q)$, di mana f^* merupakan fungsi label sisi dalam graf G dan uv merupakan sisi yang menghubungkan simpul-simpul u dan v (Grahams dan Sloane, 1980). Sebuah graf harmonis G adalah graf yang dapat dilabeli dengan menggunakan aturan pelabelan harmonis (Lasim, dkk., 2022).

Pelabelan harmonis dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang ada dalam kehidupan sehari-hari seperti persoalan keamanan data, kriptografi, teori kode, persoalan jaringan komunikasi, persoalan jaringan stasiun pemancar, dan lain sebagainya (Liang dan Bai, 2009). Sebagai contoh dalam persoalan jaringan stasiun pemancar, e merepresentasikan jumlah sambungan dalam jaringan dan setiap stasiun x dilabeli dengan $\lambda(x)$ dari $\mathbb{Z}_e$ adalah notasi bilangan bulat modulo e. Ketika x dan y berkomunikasi, mereka akan menggunakan saluran $\lambda(x) + \lambda(y)$. Jika pelabelan harmonis, maka setiap saluran akan memiliki tepat satu sambungan.

Terdapat beberapa karakteristik dari pelabelan harmonis. Berdasarkan hasil penelitian Lasim dkk. (2022), graf harmonis memiliki setidaknya satu lintasan tertutup. Akan ada fungsi lain yang juga berlaku pada graf yang sama karena pelabelan harmonis tidaklah unik. Ada dua fungsi lagi yang merupakan pelabelan harmonis dari graf harmonis dan berlaku untuk graf yang sama. Kedua fungsi tersebut adalah $g_f(u) = q - f(u)(\mathrm{mod}\ q)$ dan $g_f(u) = f(u) + k(\mathrm{mod}\ q)$ untuk setiap simpul $u \in V(G)$ dan $k \in \{1,2,3, \dots, q-1\}$ (Lasim, dkk., 2022).

Graf terhubung dengan q sisi disebut harmonis jika mungkin untuk memberi label pada simpul dengan angka yang berbeda (modulo q) sedemikian sehingga jumlah sisi juga berbeda (modulo q). Pada penelitian sebelumnya Graham dan Slone (1980) membahas mengenai graf harmonis dan memperoleh bahwa graf siklus ganjil adalah graf harmonis. Adapun penelitian lainnya yang dilakukan oleh Klavžar, Milutinović, dan Petr (2005) membahas mengenai graf Hanoi H_n dan beberapa bilangan klasik. Graf Hanoi H_n adalah graf yang dibangun dari pergerakan yang diperbolehkan dalam masalah menara Hanoi. Graf Hanoi H_n adalah sebuah graf yang memiliki siklus Hamilton unik dengan 3^n simpul dan $\frac{3(3^n-1)}{2}$ sisi (Hinz dan Parisse, 2002). Penelitian lainnya yang dilakukan oleh Lasim dkk. (2022) melakukan penelitian mengenai karakteristik pelabelan harmonis, harmonis ganjil, dan harmonis genap. Berdasarkan hasil penelitian sebelumnya yang diuraikan di atas, belum ada yang mengkaji tentang pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_n serta untuk melakukan pelabelan harmonis, semakin banyak jumlah simpul yang akan dilabeli maka akan semakin banyak pula kemungkinan melabeli simpul secara harmonis, dan peluang *error* akan semakin besar pula. Oleh karena itu, seiring berkembangnya teknologi peneliti akan melakukan penelitian mengenai penentuan pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_n untuk $n = 1,2,3$ dengan menggunakan bantuan komputasi serta menyusun algoritma penentuan pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_n untuk $n = 1,2,3$.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, rumusan masalah dari penelitian ini adalah.

1. Bagaimana algoritma penentuan pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_n?
2. Bagaimana pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_n untuk $n = 1,2,3$?

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah.

1. Mendeskripsikan algoritma komputasi untuk penentuan pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_n.
2. Menentukan pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_n untuk $n = 1,2,3$. Jika H_n untuk $n = 1,2,3$ dapat dilabeli secara harmonis maka akan ditunjukkan pelabelannya, jika tidak maka akan dikonstruksi pembuktian bahwa graf Hanoi H_n untuk $n = 1,2,3$ tidak mungkin dapat dilabeli secara harmonis.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah dapat dijadikan referensi untuk penelitian selanjutnya mengenai pelabelan harmonis dan pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_n serta dasar pengembangan algoritma untuk pelabelan harmonis maupun pelabelan lainnya.