

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF HANOI

SKRIPSI

Diajukan untuk memenuhi sebagian dari syarat memperoleh

Gelar Sarjana Matematika



Oleh

Alifah Gaisya Nurrahmah

NIM 2000036

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

FAKULTAS PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA

2024

LEMBAR HAK CIPTA

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF HANOI

Oleh:

Alifah Gaisya Nurrahmah

2000036

Diajukan untuk memenuhi sebagaia syarat dalam memperoleh Gelar Sarjana
Matematika pada Fakultas Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

© Alifah Gaisya Nurrahmah

Universitas Pendidikan Indonesia

Juni 2024

Hak Cipta dilindungi undang-undang

Skripsi ini tidak boleh diperbanyak seluruhnya atau sebagian dengan dicetak

Ulang, difotokopi, atau cara lainnya tanpa izin penulis.

LEMBAR PENGESAHAN

ALIFAH GAISYA NURRAHMAH

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF HANOI

Disetujui dan disahkan oleh pembimbing,

Pembimbing I



Dr. Kartika Yulianti, M.Si.

NIP. 198207282005012001

Pembimbing II



Dra. Encum Sumiaty, M.Si.

NIP. 196304201989032002

Mengetahui,

Ketua Program Studi Matematika



Dr. Kartika Yulianti, M.Si.

NIP. 198207282005012001

PELABELAN HARMONIS PADA GRAF HANOI

ABSTRAK

Pelabelan graf merupakan salah satu metode yang dipelajari dalam teori graf. Pelabelan harmonis pada sebuah graf G dengan q buah sisi didefinisikan sebagai pemetaan satu-satu himpunan simpul dalam graf G ke bilangan bulat modulo q sehingga untuk setiap $uv \in E(G)$ akan memiliki $f^*(uv) = (f(u) + f(v))(\text{mod } q)$, di mana f^* merupakan fungsi label sisi dalam graf G dan uv merupakan sisi yang menghubungkan simpul-simpul u dan v . Permasalahan pelabelan ini dapat diterapkan pada graf Hanoi yang merupakan graf yang dibangun dari pergerakan yang diperbolehkan dalam masalah menara Hanoi, dengan simpul pada graf Hanoi mewakili keadaan-keadaan yang mungkin dari menara Hanoi dan sisi pada graf Hanoi mewakili perpindahan cakram yang diperbolehkan. Untuk menentukan pelabelan harmonis pada graf Hanoi dapat menggunakan metode *trial and error*, yaitu mencoba-coba pelabelan harmonis pada graf Hanoi. Semakin banyak jumlah simpul akan semakin banyak pula kemungkinan melabeli simpul secara harmonis, dan peluang *error* akan semakin besar. Pada penelitian ini, disusun dan dibangun algoritma yang melingkupi seluruh kemungkinan cara melabeli simpul sehingga memenuhi pelabelan harmonis. Algoritma tersebut dijalankan dengan program Python. Hasil dari penelitian ini diperoleh bahwa graf Hanoi dapat dilabeli secara harmonis atau dengan kata lain graf Hanoi merupakan graf harmonis.

Kata kunci: Pelabelan Harmonis, Pelabelan Graf, Teori Graf, Graf Hanoi

HARMONIOUS LABELING ON HANOI GRAPHS

ABSTRACT

Graph labelling is one of the methods analyzed in graph theory. The harmonious labelling of a graph G with q edges is defined as a one-to-one mapping of the set of vertices in the graph G to integers in modulo q such that for each $uv \in E(G)$ there exists $f^(uv) = (f(u) + f(v))(\text{mod } q)$, where f^* is the edge label function in the graph G and uv is the edge connecting vertices u and v . This labelling problem can be applied to the Hanoi graph which is a graph constructed from the allowed moves in the Hanoi tower problem, where the vertices in the Hanoi graph represent the possible states of the Hanoi tower and the edges in the Hanoi graph represent the allowed disc moves. To determine the harmonious labelling on the Hanoi graph, we can use the trial and error method, by trying out the harmonious labelling on the Hanoi graph. The more the number of vertices, the more the possibility of labelling the vertices harmoniously, and the greater the chance of error. In this research, an algorithm is developed and built that covers all possible ways of labelling vertices so that they satisfy the harmonious labelling. The algorithm is run with Python program. The result of this research shows that Hanoi graph can be labelled harmoniously or in other words, Hanoi graph is a harmonious graph.*

Keywords: *Harmonious Labelling, Graph Labelling, Graph Theory, Hanoi Graphs*

DAFTAR ISI

LEMBAR HAK CIPTA	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
LEMBAR PERNYATAAN	iii
KATA PENGANTAR	iv
UCAPAN TERIMA KASIH.....	v
ABSTRAK.....	vi
<i>ABSTRACT</i>	vii
DAFTAR ISI.....	viii
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR TABEL.....	xi
BAB I PENDAHULUAN.....	1
1.1 Latar Belakang.....	1
1.2 Rumusan Masalah	3
1.3 Tujuan Penelitian.....	3
1.4 Manfaat Penelitian.....	3
BAB II KAJIAN PUSTAKA	4
2.1 Graf.....	4
2.2 Graf Terhubung	5
2.3 Graf Siklus.....	6
2.4 Graf Hanoi	8
2.5 Pelabelan Graf	9
2.6 Pelabelan Harmonis.....	9
2.7 Hasil Pelabelan Harmonis	13
2.8 Python.....	21
BAB III METODOLOGI PENELITIAN.....	23
3.1 Jenis Penelitian	23
3.2 Metodologi Penelitian	23
3.3 Tahapan Penelitian	23
BAB IV HASIL PENELITIAN	26
4.1 Pelabelan Harmonis pada Graf Hanoi H_n untuk $n = 1$	26
4.2 Pelabelan Harmonis pada Graf Hanoi H_n untuk $n = 2$	27

4.3 Pelabelan Harmonis pada Graf Hanoi H_n untuk $n = 3$	30
4.4 Pelabelan Harmonis Pada Graf Hanoi	39
BAB V KESIMPULAN DAN SARAN.....	41
5.1 Kesimpulan.....	41
5.2 Saran	41
DAFTAR PUSTAKA	42
LAMPIRAN.....	44

DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Graf G	4
Gambar 2.2 Graf Terhubung	6
Gambar 2.3 Graf C_3 dan C_4	7
Gambar 2.4 Graf Hamilton	7
Gambar 2.5 Graf non-Hamilton	8
Gambar 2.6 Graf H_n	8
Gambar 2.7 Ilustrasi simpul dan sisi pada graf Hanoi H_2	9
Gambar 2.8 Pelabelan graf siklus yang harmonis dengan 5 simpul	10
Gambar 2.9 Pelabelan simpul pada graf C_5 dengan pola berbeda	11
Gambar 2.10 Pelabelan harmonis pada graf yang memiliki siklus genap	12
Gambar 2.11 Pelabelan simpul pada graf K_4 dengan pola berbeda	13
Gambar 3.1 Graf Hanoi H_1	24
Gambar 3.2 Graf Hanoi H_1 pelabelan dimulai pada titik u_1	24
Gambar 3.3 Hasil pelabelan graf Hanoi H_1	24
Gambar 4.1 Pelabelan simpul pada graf Hanoi H_1	26
Gambar 4.2 Pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_1	27
Gambar 4.3 Pelabelan simpul C_6 pada graf Hanoi H_2	27
Gambar 4.4 Pelabelan simpul pada graf Hanoi H_2	28
Gambar 4.5 Pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_2	29
Gambar 4.6 Pelabelan simpul pada graf Hanoi H_2 dengan pola berbeda	30
Gambar 4.7 Label simpul pada graf Hanoi H_3	30
Gambar 4.8 Skema pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_3	31
Gambar 4.9 <i>Output</i> pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_3	36
Gambar 4.10 Pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_3	37
Gambar 4.11 Pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_3 dengan pola berbeda ..	39
Gambar 4.12 Pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_1	39
Gambar 4.13 Pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_2	40
Gambar 4.14 Pelabelan harmonis pada graf Hanoi H_3	40

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1 Hasil Pelabelan Harmonis	14
------------------------------------------	----

DAFTAR PUSTAKA

- Angelina M. T. I. Sambu Ua, Diandra Lestriani H, Elizabeth Sonia Kristanty Marpaung, Jesslyn Ong, Michelle Savinka, Putri Nurhaliza, & Rahmi Yulia Ningsih. (2023). Penggunaan Bahasa Pemrograman Python Dalam Analisis Faktor Penyebab Kanker Paru-Paru. *Jurnal Publikasi Teknik Informatika*, 2(2), 88–99. <https://doi.org/10.55606/jupti.v2i2.1742>
- Al-Taie, M. Z., & Kadry, S. (2017). *Python For Graph and Network Analysis* (pp. 1-184). Cham: Springer International Publishing.
- Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (1976). *Graph theory with applications* (Vol. 290). London: Macmillan.
- Grahams, R. L., & Sloane, N. J. A. (1980). On Additive Bases and Harmonious Graphs*. In *SIAM J. ALG. DISC. METH* (Vol. 1, Issue 4). <http://www.siam.org/journals/ojsa.php>
- Hinz, A. M., & Parris, D. (2002). On the Planarity of Hanoi Graphs. In *Expo. Math* (Vol. 20). www.urbanfischer.de/journals/expomath
- Klavžar, S., Milutinović, U., & Petr, C. (2005). Hanoi graphs and some classical numbers. *Expositiones Mathematicae*, 23(4), 371–378. <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2005.05.003>
- Lasim, A., Halikin, I., & Wijaya, K. (2022). The Harmonious, Odd Harmonious, And Even Harmonious Labeling. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan*, 16(4), 1131–1138. <https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss4pp1131-1138>
- Liang, Z. H., & Bai, Z. L. (2009). On the odd harmonious graphs with applications. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 29(1–2), 105–116. <https://doi.org/10.1007/s12190-008-0101-0>
- Surbakti, N. M., Angelyca, A., Talia, A., Perangin-Angin, C. B., Nainggolan, D. O., Friskauly, N. D., & Tumorang, S. R. B. (2024). Penggunaan Bahasa Pemrograman Python dalam Pembelajaran Kalkulus Fungsi Dua Variabel. *Algoritma: Jurnal Matematika, Ilmu pengetahuan Alam, Kebumihan dan Angkasa*, 2(3), 98-107.
- Panigrahi, P., Saha, J., & Arumugam, & S. (2008). On Harmoniousness of Hypercubes. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 5(2), 189–198. <https://doi.org/10.1080/09728600.2008.12088864>
- Rosen, K. H., & Krithivasan, K. (1999). *Discrete mathematics and its applications* (Vol. 6). New York: McGraw-Hill.

- Skiena, S., & Pemmaraju, S. (2003). *Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory in Mathematica*. <https://doi.org/10.1017/CBO9781139164849>
- Taqiyah, D., & Rahadjeng, B. (2022). Pelabelan Harmonis Genap Sejati Dari Beberapa Graf Terhubung. *MATHunesa: Jurnal Ilmiah Matematika*, *10*(3), 361–367.
- Wallis, W. D. (2007). *A beginner's guide to graph theory*. Boston, MA: Birkhäuser.