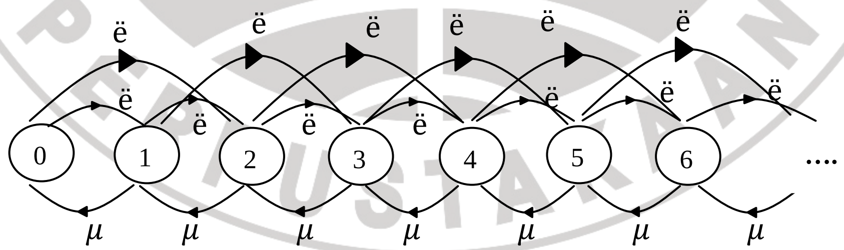
BAB III

PERUMUSAN PROBABILITAS DAN EKSPEKTASI DARI MODEL ANTRIAN M/M/1 DENGAN POLA KEDATANGAN BERKELOMPOK KONSTAN

3.1 Model Antrian M/M/1 Dengan Pola Kedatangan Berkelompok Acak

Model antrian ini para pelanggan datang secara berkelompok pada waktu yang sama dan mendapat pelayanan secara sendiri-sendiri. Jumlah pelanggan dalam kelompok yang satu berbeda dengan kelompok yang lain. Misalkan pada kedatangan kelompok pertama terdapat tiga pelanggan dan kedatangan kelompok kedua terdapat empat pelanggan atau lima pelanggan. Jadi jumlah pelanggan dalam satu kelompok yang datang selalu acak.

Berikut ini adalah ilustrasi gambar untuk model antrian M/M/1 dengan pola kedatangan berkelompok acak, dengan jumlah pelanggan dalam kelompok yaitu satu atau dua pelanggan.



Gambar 3.1 Ilustrasi M/M/1

Untuk Pola Kedatangan Berkelompok Acak

3.2 Model Antrian M/M/1 Dengan Pola Kedatangan Berkelompok Konstan

Pada model antrian ini para pelanggan datang secara berkelompok pada waktu yang sama dan mendapat pelayanan secara sendiri-sendiri, di mana jumlah pelanggan perkelompok selalu bernilai konstan. Para pelanggan datang berdua atau bertiga atau berempat dan seterusnya. Pada tugas akhir ini perumusan probabilitas dan ekspektasi dilakukan secara homogen. Yaitu misalnya perumusan kedatangan untuk satu kelompok berisi dua pelanggan berbeda dengan kedatangan untuk kelompok yang berisi tiga pelanggan atau empat pelanggan dan seterusnya.

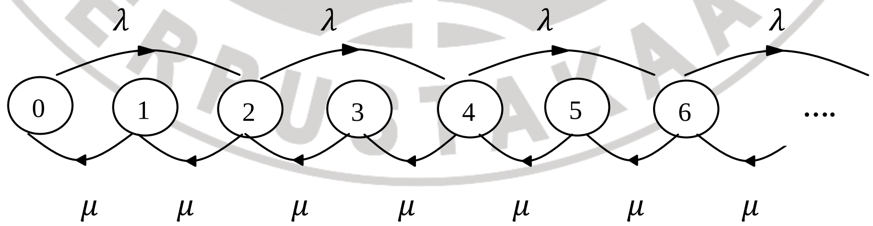
Contoh antrian seperti ini ialah misalnya pada antrian saat memasuki arena bermain, yang saat itu tiket masuknya dapat dipakai untuk dua orang sekaligus. Jadi dua pelanggan dapat masuk arena secara bersamaan atau berkelompok pada waktu yang sama. Di tugas akhir ini akan dibahas perumusan probabilitas dan ekspektasi untuk pola kedatangan dari dua pelanggan sampai empat pelanggan perkelompok, yang akhirnya akan didapat perumusan untuk sejumlah j pelanggan yang datang secara bersama atau berkelompok.

3.2.1 Model Antrian M/M/1 Dengan Pola Kedatangan Dua Pelanggan Perkelompok

Model antrian untuk kedatangan dua pelanggan artinya dua pelanggan datang secara bersamaan ke dalam sistem antrian, lalu menunggu untuk mendapatkan pelayanan. Pelayanan yang diberikan kepada pelanggan tetap satu persatu, tidak sekaligus berdua. Misalkan terdapat tempat antrian yang tak terbatas dan dinamakan dengan *state* $0,1,2,\ldots$ dan pelanggan akan masuk ke *state* n jika ada sebanyak n pelanggan di dalam sistem. Misalkan akan masuk ke *state* 2 jika ada 2 orang pelanggan di dalam sistem, jika ada seorang pelanggan lagi yang datang maka akan masuk ke *state* 3, namun jika pelanggan pada *state* 2 selesai dilayani maka *state* 2 akan menjadi *state* 1.

Agar sistem menjadi *steady state*, rata-rata proses keluar dari *state* n harus sama dengan rata-rata proses masuk ke *state* n. Sekarang misalkan bahwa pelanggan yang masuk ke *state* 1 dengan rata-rata t menit, sehingga pelanggan yang meninggalkan *state* 1 juga dengan rata-rata t menit. Waktu total pelanggan-pelanggan yang masuk ke *state* 1 akan sama dengan waktu total pelanggan-pelanggan yang keluar dari *state* 1. Dengan demikian diperoleh aturan umum yang dapat memudahkan menghitung peluang di setiap *state*. Rata-rata dimana proses akan masuk ke *state* n sama dengan rata-rata dimana proses akan keluar dari *state* n, untuk setiap $n \geq 0$.

Model antrian M/M/1 dengan pola kedatangan dua pelanggan dapat diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 3.2 Ilustrasi M/M/1

Untuk Kedatangan Dua Pelanggan Perkelompok

Dari gambar di atas dapat dilihat dua pelanggan pertama (pelanggan kesatu dan kedua) datang dan masuk ke *state* 2 lalu menunggu untuk mendapat pelayanan. Jika pelanggan kesatu sudah terlayani, maka pelanggan kedua masuk ke *state* 1. Lalu jika ada dua pelanggan berikutnya datang saat dua pelanggan yang sebelumnya belum dilayani, maka dua pelanggan tersebut (pelanggan ketiga dan keempat) akan menempati *state* 4.

***State* 0**

Jika berada di *state* 0, maka proses hanya dapat keluar dari *state* 0 ke *state* 2 dengan rata-rata waktu kedatangan λ. Karena rata-rata waktu kedatangan λ dan peluang di *state* 0 adalah P_0, ini menyebabkan rata-rata proses keluar dari *state* 0 adalah λP_0. Dan *state* 0 hanya bisa dimasuki oleh *state* 1 dengan sebuah keberangkatan. Karena rata-rata waktu pelayanan adalah μ, dan peluang di *state* 1 adalah P_1, ini menyebabkan rata-rata proses masuk ke *state* 0 adalah μP_1. Sehingga diperoleh persamaan $\lambda P_0 = \mu P_1$.

***State* 1**

Sekarang misalkan di *state* 1, proses dapat keluar dari *state* 1 ke *state* 0 dengan sebuah keberangkatan. Karena rata-rata waktu pelayanan μ, dan peluang di *state* 1 adalah P_1, rata-rata proses keluar dari *state* 1 adalah μP_1. Dan di sisi lain, *state* 1 hanya dapat dimasuki oleh *state* 2 dengan sebuah keberangkatan dengan rata-rata waktu pelayanan μ, peluang di *state* 2 adalah P_2. Sehingga rata-

rata proses masuk ke *state* 1 adalah μP_2. Sehingga diperoleh persamaan $\mu P_1 = \mu P_2$.

***State* 2**

Jika berada di *state* 2, maka proses dapat keluar dari *state* 2 ke *state* 4 dengan rata-rata waktu kedatangan λ atau ke *state* 1 dengan rata-rata waktu pelayanan μ. Peluang di *state* 2 adalah P_2, sehingga proses keluar dari *state* 2 adalah $(\lambda + \mu)P_2$. Dan disisi lain, *state* 2 hanya dapat dimasuki oleh *state* 0 dengan rata-rata waktu kedatangan λ atau dari *state* 3 dengan rata-rata waktu pelayanan μ. Peluang di *state* 0 adalah P_0 dan peluang di *state* 3 adalah P_3. Sehingga rata-rata proses masuk ke *state* 2 adalah $\lambda P_0 + \mu P_2$. Sehingga diperoleh persamaan $(\lambda + \mu)P_2 = \lambda P_0 + \mu P_2$.

Untuk *state* selanjutnya diperoleh dengan cara yang sama dengan hasil sebagai berikut:

Tabel 3.1

Persamaan untuk kedatangan dua pelanggan perkelompok

State	Rata-rata proses keluar = Rata-rata proses masuk
0	$\lambda P_0 = \mu P_1$
1	$\mu P_1 = \mu P_2$
2	$(\lambda + \mu)P_2 = \lambda P_0 + \mu P_3$
3	$\mu P_3 = \mu P_4$
4	$(\lambda + \mu)P_4 = \lambda P_2 + \mu P_5$

5	$\mu P_5 = \mu P_6$
6	$(\lambda + \mu)P_6 = \lambda P_4 + \mu P_7$
$\vdots$	$\vdots$

Dari persamaan yang terdapat pada tabel di atas dapat kita cari perumusan probabilitas dan ekspektasinya. Persamaan diatas dapat ditulis sebagai berikut :

$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$

$P_2 = P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$

$P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 + \frac{\mu}{\mu} P_2 - \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$

$P_4 = P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$

$P_5 = \frac{\lambda}{\mu} P_4 + \frac{\mu}{\mu} P_4 - \frac{\lambda}{\mu} P_2 = \frac{\lambda}{\mu} P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$

$P_6 = P_5 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$ dan seterusnya.

Probabilitas n pelanggan berada dalam sistem ialah:

- $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n+1}{2}} P_0$, untuk $n = 2x - 1$, x adalah bilangan bulat positif.
- $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n}{2}} P_0$, untuk $n = 2x$, x adalah bilangan bulat positif.

Misalnya ingin mencari P_5, maka $n = 5$.

$n = 5$ dapat dibentuk menjadi $5 = 2(3) - 1$, dengan $x = 3$.

Maka pilih rumus $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n+1}{2}} P_0$. Didapat $P_5 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{5+1}{2}} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$.

Untuk menghitung P_0 gunakan sifat peluang yaitu jumlah peluang seluruh kejadian = 1, sehingga diperoleh

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + \cdots$$

$$1 = P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \cdots$$

$$1 = P_0 + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \cdots$$

$$1 = P_0 + 2\frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[1 + \frac{\lambda}{} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \cdots\right]$$

Dimana $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ (deret geometri tak hingga), sehingga

$$1 = P_0 + 2\frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right], \text{ dengan syarat } \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$1 = P_0 + \frac{2\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} P_0$$

$$1 = P_0 \left[1 + \frac{2\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$1 = P_0 \left[\frac{1+\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$1 = P_0 \left[\frac{\mu+\lambda}{\mu-\lambda}\right]$$

$$P_0 = \left[\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}\right]$$

Didapat rumus probabilitas terdapat nol pelanggan dalam sistem untuk antrian dengan kedatangan dua pelanggan perkelompok yaitu $P_0 = \left[\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}\right]$. Karena $P_0 = \left[\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}\right]$ adalah probabilitas fasilitas pelayanan akan kosong atau peluang pelayan menganggur, maka peluang fasilitas pelayanan akan sibuk menjadi $1 - P_0$. Jika P_s menyatakan peluang fasilitas pelayanan akan sibuk, maka:

$P_s = 1 - P_0$

$P_s = 1 - \left(\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}\right)$

$P_s = \frac{2\lambda}{\mu+\lambda}$

Selanjutnya akan dicari rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem (L).

$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$

$L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6 + 7P_7 + 8P_8 + 9P_9 + \cdots$

$L = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6 + 7P_7 + 8P_8 + \cdots$

$L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 4\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 5\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 +$

$7\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + 8\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \cdots$

$L = 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + 7\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 11\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \cdots$

$L = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[3 + (3+4)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \left(3 + 2(4)\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(3 + 3(4)\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \cdots\right]$

Perhatikan bahwa:

$$a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + \cdots = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$$

$$a = 3, d = 4, r = \frac{\lambda}{\mu}$$

Sehingga diperoleh,

$L = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[\frac{3}{1-\frac{\lambda}{\mu}} + \frac{4\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\right]$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[\frac{3+\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \right]$$

$$L = \frac{\frac{\lambda}{\mu} P_0 \left(3+\frac{\lambda}{\mu}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

diketahui $P_0 = \left[\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}\right]$, maka

$$L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\mu-\lambda}{\mu+\lambda}\right)\left(3+\frac{\lambda}{\mu}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

$$L = \frac{\left(\frac{\lambda\mu-\lambda^2}{\mu^2+\lambda\mu}\right)\left(\frac{3\mu+\lambda}{\mu}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

$$L = \frac{\frac{3\lambda\mu^2-2\lambda^2\mu-\lambda^3}{\mu^3+\lambda\mu^2}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

$$L = \frac{3\lambda\mu^2-2\lambda^2\mu-\lambda^3}{\mu^3+\lambda^3-\lambda\mu^2-\lambda^2\mu}$$

$$L = \frac{(3\lambda\mu+\lambda^2)(\mu-\lambda)}{(\mu^2-\lambda^2)(\mu-\lambda)}$$

$$L = \frac{3\lambda\mu+\lambda^2}{\mu^2-\lambda^2}$$

$$L = \frac{\lambda(3\mu+\lambda)}{(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)}$$

Dengan menggunakan nilai L maka diperoleh nilai rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem (W) yaitu:

$$W = L\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda(3\mu+\lambda)}{(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$W = \frac{3\mu+\lambda}{(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)}$$

Dengan menggunakan nilai W maka diperoleh nilai rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian $\left(W_q\right)$ yaitu:

$$W_q = W - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{3\mu+\lambda}{(\mu-\lambda)(\mu+\lambda)} - \frac{1}{\mu}$$

$$W_q = \frac{\lambda^2+\lambda\mu+2\mu^2}{\mu^3-\lambda^2\mu}$$

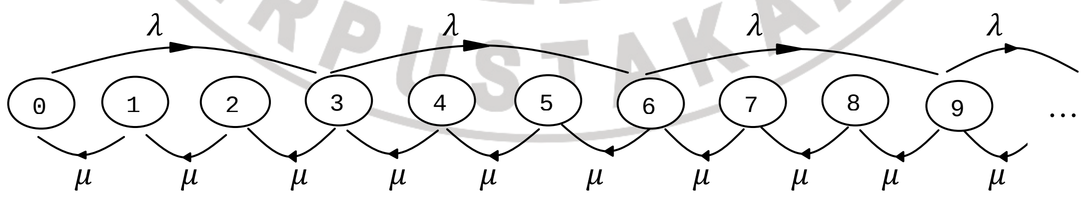
Dari nilai W_q dapat dicari nilai L_q.

$$L_q = \lambda W_q = (\lambda)\frac{\lambda^2+\lambda\mu+2\mu^2}{\mu^3-\lambda^2\mu}$$

$$L_q = \frac{\lambda^3+\lambda^2\mu+2\lambda\mu^2}{\mu^3-\lambda^2\mu}$$

3.2.2 Model Antrian M/M/1 Dengan Pola Kedatangan Tiga Pelanggan Perkelompok

Model antrian untuk kedatangan tiga pelanggan artinya tiga pelanggan datang secara bersamaan kedalam sistem antrian, lalu menunggu untuk mendapatkan pelayanan. Pelayanan yang diberikan kepada pelanggan ialah sendiri-sendiri tidak sekaligus bertiga. Model antrian M/M/1 dengan pola kedatangan tiga pelanggan dapat diilustrasikan pada gambar berikut:



Gambar 3.3 Ilustrasi M/M/1

Untuk Kedatangan Tiga Pelanggan Perkelompok

Dari gambar di atas dapat dilihat tiga pelanggan pertama (pelanggan kesatu, kedua, dan ketiga) datang dan masuk ke *state* 3 lalu menunggu untuk mendapat pelayanan. Jika pelanggan kesatu sudah terlayani, maka pelanggan kedua masuk ke *state* 1. Lalu jika ada tiga pelanggan berikutnya datang saat tiga pelanggan yang sebelumnya belum dilayani, maka tiga pelanggan tersebut (pelanggan keempat, kelima, dan keenam) akan menempati *state* 6.

Untuk mencari persamaan tiap *state* pada kedatangan tiga pelanggan secara bersamaan dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti untuk kedatangan dua orang. Hasilnya dapat dilihat dalam tabel berikut ini.

Tabel 3.2

Persamaan untuk kedatangan tiga pelanggan perkelompok

State	Rata-rata proses keluar = Rata-rata proses masuk
0	$\lambda P_0 = \mu P_1$
1	$\mu P_1 = \mu P_2$
2	$\mu P_2 = \mu P_3$
3	$(\lambda + \mu)P_3 = \lambda P_0 + \mu P_4$
4	$\mu P_4 = \mu P_5$
5	$\mu P_5 = \mu P_6$
6	$(\lambda + \mu)P_6 = \lambda P_3 + \mu P_7$
7	$\mu P_7 = \mu P_8$
8	$\mu P_8 = \mu P_9$

9	$(\lambda + \mu)P_9 = \lambda P_6 + \mu P_{10}$
$\vdots$	$\vdots$

Dari persamaan yang terdapat pada tabel diatas dapat kita cari perumusan probabilitas dan ekspektasinya. Persamaan diatas dapat ditulis sebagai berikut :

$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$

$P_2 = P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$

$P_3 = P_2 = P_1 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$

$P_4 = \frac{\lambda}{\mu} P_3 + P_3 - \frac{\lambda}{\mu} P_0 = \frac{\lambda}{\mu} P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$

$P_5 = P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$

$P_6 = P_5 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$

$P_7 = \frac{\lambda}{\mu} P_6 + P_6 - \frac{\lambda}{\mu} P_3 = \frac{\lambda}{\mu} P_6 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$

$P_8 = P_7 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$

$P_9 = P_7 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$ dan seterusnya.

Probabilitas n pelanggan berada dalam sistem ialah:

- $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n+2}{3}} P_0$, untuk $n = 3x - 2$, x adalah bilangan bulat positif.
- $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n+1}{3}} P_0$, untuk $n = 3x - 1$, x adalah bilangan bulat positif.
- $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n}{3}} P_0$, untuk $n = 3x$, x adalah bilangan bulat positif.

Misalnya ingin mencari P_8, maka $n = 8$.

$n = 8$ dapat dibentuk menjadi $8 = 3(3) - 1$ dengan $x = 3$.

Maka pilih rumus $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n+1}{3}} P_0$. Didapat $P_8 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{8+1}{3}} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{3} P_0$.

Untuk menghitung P_0 gunakan sifat peluang yaitu jumlah peluang seluruh kejadian = 1, sehingga diperoleh

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 + P_9 + \cdots$$

$$1 = P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \cdots$$

$$1 = P_0 + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \cdots$$

$$1 = P_0 + 3\frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \cdots\right]$$

Dimana $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$ (deret geometri tak hingga), sehingga

$$1 = P_0 + 3\frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$1 = P_0 + \frac{3\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} P_0$$

$$1 = P_0 \left[1 + \frac{3\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$1 = P_0 \left[\frac{1+2\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$1 = P_0 \left[\frac{\mu+2\lambda}{\mu-\lambda}\right]$$

$$P_0 = \frac{\mu-\lambda}{\mu+2\lambda}$$

Didapat rumus probabilitas terdapat nol pelanggan dalam sistem untuk antrian dengan kedatangan tiga pelanggan secara bersamaan yaitu $P_0 = \left[\frac{\mu-\lambda}{\mu+2\lambda}\right]$. Karena $P_0 = \left[\frac{'-\lambda}{\mu+2\lambda}\right]$ adalah probabilitas fasilitas pelayanan akan kosong atau peluang pelayan menganggur, maka peluang fasilitas pelayanan akan sibuk menjadi $1 - P_0$, sehingga:

$P_s = 1 - P_0 = 1 - \left(\frac{\mu-\lambda}{\mu+2\lambda}\right)$

$P_s = \frac{3\lambda}{\mu+2\lambda}$

Selanjutnya akan dicari rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem (L).

$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$

$L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6 + 7P_7 + 8P_8 + 9P_9 + 10P_{10} + \cdots$

$L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + 3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + 4\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 5\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 7\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + 8\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + 9\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + 10\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \cdots$

$L = 6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + 15\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 24\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + 33\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \cdots$

$L = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[6 + (6+9)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + (6+2.9)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + (6+3.9)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \cdots\right]$

Perhatikan bahwa:

$$a + (a+d)r + (a+2d)r^2 + \cdots = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}$$

$$a = 6, d = 9, r = \frac{\lambda}{\mu}$$

Sehingga diperoleh,

$$L = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[\frac{6}{1-\frac{\lambda}{\mu}} + \frac{9\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \right]$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} P_0 \left[\frac{6+3\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \right]$$

$$L = \frac{\frac{\lambda}{\mu} P_0 \left(6+3\frac{\lambda}{\mu}\right)}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

diketahui $P_0 = \left[\frac{\text{´}-\text{ë}}{\text{´}+2\text{ë}}\right]$

$$L = \frac{\frac{\text{ë}}{\text{´}}\left(\frac{\text{´}-\text{ë}}{\text{´}+2\text{ë}}\right)\left(6+3\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)}{\left(1-\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^2}$$

$$L = \frac{\left(\frac{\text{ë´}-\text{ë}^2}{\text{´}^2+2\text{ë´}}\right)\left(\frac{6\text{´}+3\text{ë}}{\text{´}}\right)}{\left(1-\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^2}$$

$$L = \frac{\frac{6\text{ë´}^2-3\text{ë}^2\text{´}-3\text{ë}^3}{\text{´}^3+2\text{ë´}^2}}{\left(1-\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^2}$$

$$L = \frac{6\text{ë´}^2-3\text{ë}^2\text{´}-3\text{ë}^3}{\text{´}^3+2\text{ë}^3-3\text{ë}^2\text{´}}$$

$$L = \frac{\left(6\text{ë´}+3\text{ë}^2\right)(\text{´}-\text{ë})}{(\text{´}^2-2\text{ë}^2+\text{ë´})(\text{´}-\text{ë})}$$

$$L = \frac{6\text{ë´}+3\text{ë}^2}{\text{´}^2-2\text{ë}^2+\text{ë´}}$$

$$L = \frac{\text{ë}(6\text{´}+3\text{ë})}{(\text{´}-\text{ë})(\text{´}+2\text{ë})}$$

Dengan menggunakan nilai L maka diperoleh,

$$W = L\frac{1}{\text{ë}} = \frac{\text{ë}(6\text{´}+3\text{ë})}{(\text{´}-\text{ë})(\text{´}+2\text{ë})}\left(\frac{1}{\text{ë}}\right)$$

$$W = \frac{6\text{´}+3\text{ë}}{(\text{´}-\text{ë})(\text{´}+2\text{ë})}$$

Dengan menggunakan nilai W maka diperoleh nilai rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian (W_q) yaitu:

$$W_q = W - \frac{1}{\text{´}}$$

$$W_q = \frac{(\text{´}6+3\text{ë})}{(\text{´}-\text{ë})(\text{´}+2\text{ë})} - \frac{1}{\text{´}}$$

$$W_q = \frac{2\text{ë}^2+2\text{ë´}+5\text{´}^2}{\text{´}^3-2\text{ë}^2\text{´}+\text{ë´}^2}$$

Dari nilai W_q dapat dicari nilai L_q.

$$L_q = \text{ë}W_q = (\text{ë})\left(\frac{2\text{ë}^2+2\text{ë´}+5\text{´}^2}{\text{´}^3-2\text{ë}^2\text{´}+\text{ë´}^2}\right)$$

$$L_q = \frac{2\text{ë}^3+2\text{ë}^2\text{´}+5\text{ë´}^2}{\text{´}^3-2\text{ë}^2\text{´}+\text{ë´}^2}$$

3.2.3 Model Antrian M/M/1 Dengan Pola Kedatangan Empat Pelanggan Perkelompok

Dengan iterasi yang sama seperti diatas, berikut ini adalah hasil perumusan probabilitas perumusan probabilitas dan ekspektasi untuk pola kedatangan empat pelanggan perkelompok.

Tabel 3.3

Persamaan untuk kedatangan empat pelanggan perkelompok

state	Rata-rata proses keluar = Rata-rata proses masuk
0	$\text{ë}P_0 = \text{´}P_1$
1	$\text{´}P_1 = \text{´}P_2$
2	$\text{´}P_2 = \text{´}P_3$

3	$\mu P_3 = \mu P_4$
4	$(\lambda + \mu) P_4 = \lambda P_0 + \mu P_5$
5	$\mu P_5 = \mu P_6$
6	$\mu P_6 = \mu P_7$
7	$\mu P_7 = \mu P_8$
8	$(\lambda + \mu) P_8 = \lambda P_4 + \mu P_9$
9	$\mu P_9 = \mu P_{10}$
10	$\mu P_{10} = \mu P_{11}$
⋮	⋮

Dari tabel 3.3 didapatkan:

$P_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$ $\quad P_6 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$ $\quad P_9 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$ $\quad P_{10} =$

$P_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$ $\quad P_7 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$ $\quad P_8 =$ $\quad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$

$P_3 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$ $\quad \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$ $\quad$ dan seterusnya

$P_4 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0$

$P_5 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0$

Berikut ini adalah perumusan probabilitas dan ekspektasi untuk kedatangan empat pelanggan perkelompok.

- Probabilitas fasilitas pelayanan akan kosong: $P_0 = \frac{\mu - \lambda}{\mu + 3\lambda}$
- Probabilitas sejumlah n pelanggan berada dalam sistem (P_n):
  - $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n+3}{4}} P_0$, untuk $n = 4x - 3$, x adalah bilangan bulat positif.

- $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n+2}{4}} P_0$, untuk $n = 4x - 2$, x adalah bilangan bulat positif.
- $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n+1}{4}} P_0$, untuk $n = 4x - 1$, x adalah bilangan bulat positif.
- $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n}{4}} P_0$, untuk $n = 4x$, x adalah bilangan bulat positif

  Misalnya ingin mencari P_9, maka $n = 9$.

  $n = 9$ dapat dibentuk menjadi $9 = 4(3) - 3$, dengan $x = 3$.

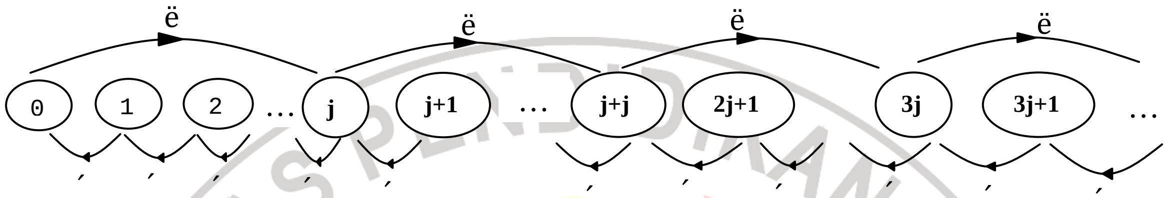
  Maka pilih rumus $P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{n+3}{4}} P_0$. Didapat $P_9 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\frac{9+3}{4}} P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$.

- Probabilitas fasilitas pelayanan akan sibuk : $P_s = \frac{4\lambda}{\mu+3\lambda}$
- Rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem: $L = \frac{\lambda(10\mu+6\lambda)}{(\mu-\lambda)(\mu+3\lambda)}$
- Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem: $W = \frac{10\mu+6\lambda}{(\mu-\lambda)(\mu+3\lambda)}$
- Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian: $W_q = \frac{3\lambda^2+4\lambda\mu+9\mu^2}{\mu^3-3\lambda^2\mu+2\lambda\mu^2}$
- Rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian: $L_q = \frac{3\lambda^3+4\lambda^2\mu+9\lambda\mu^2}{\mu^3-3\lambda^2\mu+2\lambda\mu^2}$

Perumusan probabilitas dan ekspektasinya untuk kedatangan lima pelanggan perkelompok dan seterusnya sampai *j* pelanggan perkelompok didapatkan dengan pengiterasian yang sama seperti diatas.

3.2.4 Model Antrian M/M/1 Dengan Pola Kedatangan *j* Pelanggan Perkelompok

Kedatangan *j* pelanggan perkelompok ialah kedatangan banyaknya pelanggan dalam satu kelompok sebanyak *j* pelanggan. Model antrian pola kedatangan sebanyak *j* pelanggan dapat diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 3.4 Ilustrasi M/M/1

Untuk Kedatangan Sebanyak *j* Pelanggan Perkelompok

Untuk mencari persamaan tiap *state* pada kedatangan *j* pelanggan secara bersamaan dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti untuk kedatangan dua pelanggan perkelompok. Hasilnya dapat dilihat dalam tabel berikut ini.

Tabel 3.4

Persamaan untuk kedatangan *j* pelanggan perkelompok

State	Rata-rata proses keluar = Rata-rata proses masuk
0	ëP_0 = ´P_1
1	´P_1 = ´P_2
2	´P_2 = ´P_3
⋮	⋮
j	(ë +´)P_j = ëP_0 +´P_{j+1}
j+1	´P_{j+1} = ´P_{j+2}
⋮	⋮
2j	(ë +´)P_{2j} = ëP_j +´P_{2j+1}
2j+1	´P_{2j+1} = ´P_{2j+2}
⋮	⋮

3j	$(\text{ë} + \text{´})P_{3j} = \text{ë}P_{2j} + \text{´}P_{3j+1}$
3j+1	$\text{´}P_{3j+1} = \text{´}P_{3j+2}$
⋮	⋮

Dari tabel 3.4 diatas, didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$P_1 = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right) P_0$$

$$P_1 = P_2 = \cdots = P_j = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right) P_0$$

$$P_{j+1} = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^2 P_0$$

$$P_{j+1} = P_{j+2} = \cdots = P_{2j} = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^2 P_0$$

$$P_{2j+1} = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^3 P_0$$

$$P_{2j+1} = P_{2j+2} = \cdots = P_{3j} = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^3 P_0$$

$P_{3j+1} = P_{3n+2} = \cdots = P_{4j} = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^4 P_0$ dan seterusnya

Maka probabilitas sejumlah n pelanggan berada dalam sistem (P_n) untuk sebanyak j pelanggan perkelompok ialah:

- $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+(j-1)}{j}} P_0$, untuk $n = jx - (j-1)$,
- $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+(j-2)}{4}} P_0$, untuk $n = jx - (j-2)$,
- $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+(j-3)}{4}} P_0$, untuk $n = jx - (j-3)$,

⋮

- $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+(j-j)}{j}} P_0$, untuk $n = jx - (j-j)$

x adalah bilangan bulat positif.

Dari pembahasan sebelumnya mengenai perumusan probabilitas dan ekspektasi untuk pola kedatangan berkelompok dari dua pelanggan sampai empat pelanggan, dapat kita rumuskan untuk j pelanggan, $j > 0, j$ adalah banyaknya pelanggan perkelompok. Perhatikan tabel 3.5 di bawah ini.

Tabel 3.5

Perumusan P_0, P_s, dan P_n Untuk Kedatangan Pelanggan Berkelompok Konstan

Jumlah pelanggan tiap kelompok	P_0	$P_s = 1 - P_0$	P_n (nilai x adalah bilangan bulat positif)
1	$\frac{´ - ë}{´ + 0ë}$	$\frac{1ë}{´ + 0ë}$	$P_n = \left(\frac{ë}{´}\right)^n P_0$, untuk $n = x$
2	$\frac{´ - ë}{´ + 1ë}$	$\frac{2ë}{´ + ë}$	• $P_n = \left(\frac{ë}{´}\right)^{\frac{n+1}{2}} P_0$, untuk $n = 2x - 1$ • $P_n = \left(\frac{ë}{´}\right)^{\frac{n}{2}} P_0$, untuk $n = 2x$
3	$\frac{´ - ë}{´ + 2ë}$	$\frac{3ë}{´ + 2ë}$	• $P_n = \left(\frac{ë}{´}\right)^{\frac{n+2}{3}} P_0$, untuk $n = 3x - 2$ • $P_n = \left(\frac{ë}{´}\right)^{\frac{n+1}{3}} P_0$, untuk $n = 3x - 1$ • $P_n = \left(\frac{ë}{´}\right)^{\frac{n}{3}} P_0$, untuk $n = 3x$
4	$\frac{´ - ë}{´ + 3ë}$	$\frac{4ë}{´ + 3ë}$	• $P_n = \left(\frac{ë}{´}\right)^{\frac{n+3}{4}} P_0$, untuk $n = 4x - 3$

			• $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+2}{4}} P_0$, untuk $n = 4x - 2$ • $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+1}{4}} P_0$, untuk $n = 4x - 1$ • $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n}{4}} P_0$, untuk $n = 4x$
⋮	⋮	⋮	⋮
j	$\frac{\text{´} - \text{ë}}{\text{´} + (j-1)\text{ë}}$	$\frac{j\text{ë}}{\text{´} + (j-1)\text{ë}}$	• $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+(j-1)}{j}} P_0$ untuk $n = jx - (j-1)$ • $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+(j-2)}{j}} P_0$ untuk $n = jx - (j-2)$ • $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+(j-3)}{j}} P_0$ untuk $n = jx - (j-3)$ ⋮ • $P_n = \left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^{\frac{n+(j-j)}{j}} P_0$ untuk $n = jx - (j-j)$

Dari tabel 3.5, dapat disimpulkan bahwa:

- Probabilitas fasilitas pelayanan akan kosong atau probabilitas nol pelanggan dalam sistem untuk kedatangan j pelanggan perkelompok ialah $P_0 = \frac{\text{´}-\text{ë}}{\text{´}+(j-1)\text{ë}}$.

  Bukti:

  Akan dibuktikan untuk antrian dengan j pelanggan, maka $P_0 = \frac{\text{´}-\text{ë}}{\text{´}+(j-1)\text{ë}}$.

  Perhatikan bahwa $1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n$.

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} P_n = P_0 + P_1 + \cdots + P_j + P_{j+1} + P_{j+2} + \cdots + P_{2j} + P_{2j+1} + P_{2j+2}$$

$$+ \cdots + P_{3j} + P_{3j+1} + \cdots$$

$$1 = P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 +$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \cdots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \cdots$$

$$1 = P_0 + j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \cdots$$

$$1 = P_0 + j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 + \cdots\right]$$

$1 = P_0 + j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 \left[\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$, (dengan syarat $\frac{\lambda}{\mu} < 1$)

$$1 = P_0 + jP_0 \left[\frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$1 = P_0 + jP_0 \left[\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right]$$

$$1 = P_0 \left[1 + j\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right)\right]$$

$$P_0 = \frac{1}{1+j\left(\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\right)}$$

$$P_0 = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda+j\lambda}$$

$$P_0 = \frac{\mu-\lambda}{\mu+(j-1)\lambda}$$

Jadi, terbukti untuk antrian dengan pola kedatangan j pelanggan perkelompok diperoleh $P_0 = \frac{\mu-\lambda}{\mu+(j-1)\lambda}$.

- Probabilitas fasilitas pelayanan akan sibuk dalam antrian untuk kedatangan j pelanggan perkelompok ialah $P_s = \frac{jë}{´+(j-1)ë}$.

  Bukti:

  Akan dibuktikan untuk antrian dengan j pelanggan perkelompok, maka $P_s = \frac{jë}{´+(j-1)ë}$.

  Perhatikan bahwa $P_s = 1 - P_0$. Telah diketahui P_0 untuk kedatangan j pelanggan perkelompok adalah $P_0 = \frac{´-ë}{´+(j-1)ë}$. Jadi, P_s untuk antrian dengan j pelanggan perkelompok adalah

  $P_s = 1 - \left(\frac{´-ë}{´+(j-1)ë}\right)$

  $P_s = \frac{jë}{´+(j-1)ë}$

  Jadi, terbukti untuk antrian dengan pola kedatangan j pelanggan perkelompok diperoleh $P_s = \frac{jë}{´+(j-1)ë}$.

Untuk mencari nilai L dan W, perhatikan tabel 3.6 ini:

Tabel 3.6

Perumusan *L* dan *W* Untuk Kedatangan Pelanggan Berkelompok Konstan

Jumlah pelanggan tiap kelompok	$L=\sum_{n=0}^{\infty} nP_n$	$W = L\frac{1}{ë}$
1	$\frac{ë}{´ - ë}$	$\frac{1}{´ - ë}$
2	$\frac{ë(3 + ë)}{(- ë)(+ ë)}$	$\frac{3 + ë}{(- ë)(+ ë)}$
3	$\frac{ë(6 + 3ë)}{(- ë)(+ 2ë)}$	$\frac{6 + 3ë}{(- ë)(+ 2ë)}$
4	$\frac{ë(10 + 6ë)}{(- ë)(+ 3ë)}$	$\frac{10 + 6ë}{(- ë)(+ 3ë)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
j	$\frac{ë\left[\frac{(j^2+j)}{2}, + \frac{(j^2-j)}{2} ë\right]}{(- ë)(+ (j-1)ë)}$	$\frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}, + \frac{(j^2-j)}{2} ë\right]}{(- ë)(+ (j-1)ë)}$

- Rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem (L) untuk kedatangan j pelanggan perkelompok ialah $L = \frac{ë\left[\left(\frac{j^2+j}{2}\right)+\left(\frac{j^2-j}{2}\right)ë\right]}{(-ë)(+(j-1)ë)}$.

Bukti:

Akan dibuktikan untuk antrian dengan j pelanggan perkelompok, maka $L = \frac{ë\left[\left(\frac{j^2+j}{2}\right)+\left(\frac{j^2-j}{2}\right)ë\right]}{(-ë)(+(j-1)ë)}$. Perhatikan bahwa $L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$.

$L = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$

$L = 0P_0 + 1P_1 + 2P_2 + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5 + 6P_6 + 7P_7 + \cdots$

$L = \left(\frac{ë}{´}\right) P_0 + 2\left(\frac{ë}{´}\right) P_0 + 3\left(\frac{ë}{´}\right) P_0 + \cdots + j\left(\frac{ë}{´}\right) P_0$

$+(j+1)\left(\frac{ë}{´}\right)^2 P_0 + (j+2)\left(\frac{ë}{´}\right)^2 P_0 + (j+3)\left(\frac{ë}{´}\right)^2 P_0 + \cdots + (2j)\left(\frac{ë}{´}\right)^2 P_0$

$+(2j+1)\left(\frac{ë}{´}\right)^3 P_0 + (2j+2)\left(\frac{ë}{´}\right)^3 P_0 + (2j+3)\left(\frac{ë}{´}\right)^3 P_0 + \cdots + (3j)\left(\frac{ë}{´}\right)^3 P_0$

$$+(3j+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + (3j+2)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + (3j+3)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \cdots + (4j)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \cdots$$

$$L = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 (1+2+3+\cdots+j)$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0[(j+1)+(j+2)+(j+3)+\cdots+2j]$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0[(2j+1)+(2j+2)+(2j+3)+\cdots+3j]$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0[(3j+1)+(3j+2)+(3j+3)+\cdots+4j]+\cdots$$

$$L = \frac{\lambda}{\mu} P_0\left[\frac{j(j+1)}{2}\right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0\left[j(j)+\frac{j(j+1)}{2}\right] + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0\left[2j(j)+\frac{j(j+1)}{2}\right]$$

$$+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0\left[3j(j)+\frac{j(j+1)}{2}\right]+\cdots$$

$$L = \left[\frac{j(j+1)}{2}\right]\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) P_0 + j^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + \left[\frac{j(j+1)}{2}\right]\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0 + 2j^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 + \left[\frac{j(j+1)}{2}\right]\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0$$

$$+3j^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \left[\frac{j(j+1)}{2}\right]\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 P_0 + \cdots$$

$$L = \frac{j(j+1)}{2}\frac{\lambda}{\mu} P_0\left[1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\cdots\right] + j^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0\left[1+2\frac{\lambda}{\mu}+3\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\cdots\right]$$

$$L = \frac{j(j+1)}{2}\frac{\lambda}{\mu} P_0\left[\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right] + j^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0\left[\frac{\frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}\right]$$

$$L = \frac{j(j+1)}{2\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)}\frac{\lambda}{\mu} P_0 + j^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0\left[\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}\right]$$

$$L = \frac{\frac{1}{2}j(j+1)\frac{\lambda}{\mu}P_0}{1-\frac{\lambda}{\mu}} + \frac{j^2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 P_0}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

$$L = \frac{\frac{\lambda}{\mu}P_0\left[\frac{j^2+j}{2}+\frac{j^2-j}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\right]}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^2}$$

Telah diketahui bahwa, $P_0 = \frac{\mu-\lambda}{\mu+(j-1)\lambda}$, maka

$$L = \frac{\frac{\text{ë}}{\text{´}}\left(\frac{\text{´}-\text{ë}}{\text{´}+(j-1)\text{ë}}\right)\left[\frac{j^2+j}{2}+\frac{j^2-j}{2}\left(\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)\right]}{\left(1-\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^2}$$

$$L = \frac{\text{ë´}^2\left(j^2+j\right)-\text{ë}^2\text{´}(2j)-\text{ë}^3\left(j^2-j\right)}{\left[\text{´}^3+2(j-1)\text{ë´}^2\right]\left(1-\frac{\text{ë}}{\text{´}}\right)^2}$$

$$L = \frac{\text{ë´}^2\left(j^2+j\right)-\text{ë}^2\text{´}(2j)-\text{ë}^3\left(j^2-j\right)}{\text{´}^3+(2j-6)\text{ë´}^2-(4j-6)\text{ë}^2\text{´}+2(j-1)\text{ë}^3}$$

$$L = \frac{(\text{´}-\text{ë})\left[\left(j^2+j\right)\text{ë´}+\left(j^2-j\right)\text{ë}^2\right]}{2(\text{´}-\text{ë})[\text{´}^2-(j-1)\text{ë}^2+(j-2)\text{ë´}]}$$

$$L = \frac{\text{ë}\left[\frac{(j^2+j)}{2}\text{´}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(\text{´}-\text{ë})(\text{´}+(j-1)\text{ë})}$$

Jadi, terbukti untuk antrian dengan pola kedatangan j pelanggan perkelompok diperoleh rata-rata banyaknya pelanggan dalam sistem (L) ialah $L = \frac{\text{ë}\left[\left(\frac{j^2+j}{2}\right)\text{´}+\left(\frac{j^2-j}{2}\right)\text{ë}\right]}{(\text{´}-\text{ë})(\text{´}+(j-1)\text{ë})}$.

- Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem (W) untuk kedatangan j pelanggan perkelompok ialah $W = \frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}\text{´}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(\text{´}-\text{ë})(\text{´}+(j-1)\text{ë})}$.

Bukti:

Akan dibuktikan untuk antrian dengan j pelanggan, maka $W = \frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}\text{´}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(\text{´}-\text{ë})(\text{´}+(j-1)\text{ë})}$.

Perhatikan bahwa $W = L\frac{1}{\text{ë}}$.

$$W = L\left(\frac{1}{ë}\right) = \frac{ë\left[\left(\frac{j^2+j}{2}\right)+\left(\frac{j^2-j}{2}\right)ë\right]}{(-ë)(+(j-1)ë)}\left(\frac{1}{ë}\right)$$

$$W = \frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}ë\right]}{(-ë)(+(j-1)ë)}$$

Jadi, terbukti untuk antrian dengan pola kedatangan j pelanggan perkelompok diperoleh rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam sistem ialah $W = \frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}ë\right]}{(-ë)(+(j-1)ë)}$.

Untuk mencari nilai W_q dan L_q, perhatikan tabel 3.7 berikut:

Tabel 3.7

Perumusan W_q dan L_q Untuk Kedatangan Pelanggan Berkelompok Konstan

Jumlah pelanggan tiap kelompok	$W_q = W - \frac{1}{´}$	$L_q = ëW_q$
1	$\frac{ë}{´(-ë)}$	$\frac{ë^2}{´(-ë)}$
2	$\frac{ë^2 + \squaré + 2^2}{´^3 - ë^2}$	$\frac{ë^3 + ë^2 + 2\squaré^2}{´^3 - ë^2}$
3	$\frac{2ë^2 + 2\squaré + 5^2}{´^3 - 2ë^2 + \squaré^2}$	$\frac{2ë^3 + 2ë^2 + 5\squaré^2}{´^3 - 2ë^2 + \squaré^2}$
4	$\frac{3ë^2 + 4\squaré + 9^2}{´^3 - 3ë^2 + 2\squaré^2}$	$\frac{3ë^3 + 4ë^2 + 9\squaré^2}{´^3 - 3ë^2 + 2\squaré^2}$
⋮	⋮	⋮
j	$\frac{\left[\frac{(j^2+j)´}{2} + \frac{(j^2-j)}{2}ë\right]}{(-ë)(+(j-1)ë)} - \frac{1}{´}$	$ë\left(\frac{\left[\frac{(j^2+j)´}{2} + \frac{(j^2-j)}{2}ë\right]}{(-ë)(+(j-1)ë)} - \frac{1}{´}\right)$

- Rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian (W_q) untuk kedatangan j pelanggan perkelompok ialah $W_q = \frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(-\text{ë})(+(j-1)\text{ë})} - \frac{1}{,}$

  .

  Bukti:

  Akan dibuktikan untuk antrian dengan j pelanggan, maka $W_q = \frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(-\text{ë})(+(j-1)\text{ë})} - \frac{1}{,}$.

  Perhatikan bahwa $W_q = W - \frac{1}{,}$.

  $W_q = W - \frac{1}{,}$

  $W_q = \frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(-\text{ë})(+(j-1)\text{ë})} - \frac{1}{,}$

  Jadi, terbukti untuk antrian dengan pola kedatangan j pelanggan perkelompok diperoleh rata-rata jumlah waktu yang dihabiskan seorang pelanggan dalam antrian (W_q) ialah $W_q = \frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(-\text{ë})(+(j-1)\text{ë})} - \frac{1}{,}$.

- Rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q) untuk kedatangan j pelanggan perkelompok ialah $L_q = \text{ë}\left(\frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(-\text{ë})(+(j-1)\text{ë})} - \frac{1}{,}\right)$.

  Bukti:

Akan dibuktikan untuk antrian dengan j pelanggan, maka

$$L_q = \text{ë}\left(\frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(-\text{ë})(+(j-1)\text{ë})}-\frac{1}{,}\right).$$

Perhatikan bahwa $L_q = \text{ë}W_q$.

$$L_q = \text{ë}W_q = \text{ë}\left(\frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(-\text{ë})(+(j-1)\text{ë})}-\frac{1}{,}\right)$$

Jadi, terbukti untuk antrian dengan pola kedatangan j pelanggan perkelompok diperoleh rata-rata banyaknya pelanggan dalam antrian (L_q) ialah $L_q = \text{ë}\left(\frac{\left[\frac{(j^2+j)}{2}+\frac{(j^2-j)}{2}\text{ë}\right]}{(-\text{ë})(+(j-1)\text{ë})}-\frac{1}{,}\right)$.