BAB III

PORTOFOLIO OPTIMAL

3.1 *Capital Asset Pricing Model*

Capital assets pricing model dipelopori oleh Treynor, Sharpe, Lintner dan Mossin pada tahun 1964 hingga 1966. *Capital assets pricing model* merupakan model penetapan harga aset modal yang dikembangkan dari model portofolio Markowitz. Model portofolio Markowitz mengasumsikan bahwa investor akan mendiversifikasi portofolionya dan memilih portofolio optimal atas dasar preferensi investor terhadap ekpektasi *return* dan risiko. Selain asumsi tersebut, model penetapan harga aset modal memiliki beberapa asumsi yaitu:

1. Tidak ada biaya transaksi dan tidak ada pajak penghasilan;
2. Semua investor adalah penerima harga (*price takers)*;
3. Tidak terdapat risiko dalam menyimpan (*lending*) dan meminjam (*borrowing*) pada tingkat suku bunga bebas risiko yang sama;
4. Investor mempunyai pengharapan yang homogen artinya bahwa para investor sepakat tentang ekspektasi *return*, standar deviasi, dan koefisien kolerasi antar tingkat *return* pada periode yang sama.

Asumsi-asumsi model penetapan harga aset modal memang tidak terlihat realistis, akan tetapi model penetapan harga aset modal merupakan model yang dapat menggambarkan atau memprediksi realitas di pasar yang bersifat kompleks.

Apabila semua asumsi terpenuhi, maka akan terbentuk suatu pasar yang seimbang (*equilibrium*). Keadaan pasar yang mempengaruhi harga suatu saham akan mengakibatkan *return* dan risiko saham berubah seiring dengan keadaan pasar. Jika perubahan pasar dapat dinyatakan sebagai *return* indeks pasar, maka *return* suatu saham dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \qquad (3.1)$$

dengan,

R_i = *return* saham i

R_m = *return* pasar m

β_i = beta, yaitu parameter yang mengukur perubahan yang diharapkan pada R_i jika terjadi perubahan pada R_m

α_i = nilai ekspektasi *return* saham yang independen terhadap *return* pasar

e_i = kesalahan residual yang merupakan variabel acak

Persamaan (3.1) merupakan persamaan regresi dengan *return* saham i (R_i) sebagai variabel dependen, *return* pasar (R_m) sebagai variabel independen, dan β_i adalah koefisien regresi dari regresi R_i pada R_m. Persamaan (3.1) membagi *return* suatu saham menjadi dua bagian yaitu,

$$R_i = \underbrace{\beta_i R_m}_{\substack{bagian\ return \\ yang\ dipengaruhi \\ oleh\ perubahan\ pasar}} + \underbrace{e_i + \alpha_i}_{\substack{bagian\ return \\ yang\ tidak\ dipengaruhi \\ oleh\ perubahan\ pasar}}$$

Bagian *return* yang dipengaruhi dengan *return* pasar ditunjukkan oleh β_i yang merupakan sensitivitas *return* suatu saham terhadap *return* pasar. Misalkan nilai β_i sebesar 2 artinya, *return* suatu saham diharapkan meningkat (menurun) sebesar 2% saat *return* pasar meningkat (menurun) sebesar 1%. e_i dan α_i merupakan bagian dari *return* suatu saham yang tidak dipengaruhi oleh perubahan pasar (β_i). α_i menyatakan besarnya nilai suatu *return* saham bila *return* pasar sangat kecil atau tidak ada sama sekali. e_i merupakan faktor yang mempengaruhi nilai *return* suatu saham yang hanya berhubungan dengan peristiwa mikro yang mempengaruhi perusahaan tertentu saja, tidak mempengaruhi perusahaan-perusahaan secara umum.

Jika dilakukan n pengamatan, maka akan ada n kesalahan acak yang berbeda, dimana e_i merupakan variabel random yang menyatakan pengaruh kesalahan acak pada observasi ke-i, oleh karena itu kesalahan acak ini diharapkan bernilai nol yang artinya $E(e_i) = 0$. Bila didefinisikan

$$Var(e_i) = E[e_i - E(e_i)]^2$$

$$= E[e_i^2 - 2e_iE(e_i) + E(e_i)^2]$$

$$= E[e_i^2 - 2e_i(0) + (0)^2]$$

maka variansi dari e_i adalah $E[e_i]^2 = \sigma_{e_i}{}^2$. Persamaan (3.1) disebut juga model pasar yang berasumsi bahwa R_m dan e_i tidak saling berkovarian, yaitu $Cov(R_m, e_i) = 0$.

$$Cov(R_m, e_i) = E([R_m - E(R_m)][e_i - E(e_i)])$$

$$= E([R_m - E(R_m)].e_i)$$

sehingga diperoleh $Cov(R_m, e_i) = E([R_m - E(R_m)].e_i) = 0$ hal ini berarti e_i independen tidak berkorelasi dengan R_m.

Model pasar ini dapat dinyatakan dalam bentuk ekspektasi *return* saham sebagai berikut:

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_m). \qquad (3.2)$$

Variansi dari model pasar didefinisikan sebagai berikut:

$$Var(R_i) = E[R_i - E(R_i)]^2$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.1) diperoleh:

$$Var(R_i) = E[\alpha_i + \beta_i R_m + e_i - E(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i)]^2$$

$$= E[\alpha_i + \beta_i R_m + e_i - \alpha_i - \beta_i E(R_m) + E(e_i)]^2$$

$$= E[\beta_i R_m + e_i - \beta_i E(R_m)]^2$$

$$= E[\beta_i(R_m - E(R_m)) + e_i]^2$$

$$= E\left[\beta_i^2(R_m - E(R_m))^2 + 2\beta_i(R_m - E(R_m))e_i + e_i^2\right]$$

$$Var(R_i) = \beta_i^2 E[R_m - E(R_m)]^2 + 2\beta_i E([R_m - E(R_m)]e_i) + E[e_i^2]$$

Karena $E[R_m - E(R_m)]^2 = Var(R_m)$ dan $E([R_m - E(R_m)]e_i) = 0$, maka

$$Var(R_i) = \beta_i^2 Var(R_m) + Var(e_i) \tag{3.3}$$

Variansi yang menyatakan risiko total pada persamaan (3.3) terdiri dari dua bagian yaitu:

$$\underbrace{\beta_i^2 Var(R_m)}_{variansi\ sistematik} + \underbrace{Var(e_i)}_{variansi\ tidak\ sistematik}$$

Variansi tidak sistematik $(Var(e_i))$ dapat dihilangkan dengan melakukan diversifikasi portofolio karena risiko ini hanya ada dalam satu perusahaan atau industri tertentu. Portofolio yang terdiversifikasi dengan baik akan mengeliminasi semua variansi tidak sistematik. Sehingga hanya variansi sistematik yang tidak dapat didiverisifikasi, ini dikarenakan oleh faktor makro ekonomi yang mempunyai efek terhadap semua aset berisiko yang ada. Variansi sistematik biasa disebut sebagai risiko pasar karena pergerakan risiko ini sesuai perubahan pasar yang ditunjukan oleh beta.

Bentuk umum kovarian *return* antara dua saham *i* dan *j* didefinisikan sebagai berikut:

$$Cov(R_i, R_j) = E\left[\left(R_i - E(R_i)\right)\left(R_j - E(R_j)\right)\right] \tag{3.4}$$

Kovarian kesalahan residual saham i (e_i) diasumsikan tidak berkovarian dengan kesalahan residual saham j (e_j), yaitu $Cov(e_i, e_j) = 0$. Karena,

$$Cov(e_i, e_j) = E\left[\left(e_i - E(e_i)\right)\left(e_j - E(e_j)\right)\right]$$

$$= E\left[(e_i - 0)(e_j - 0)\right] = E(e_i, e_j)$$

sehingga diperoleh $Cov(e_i, e_j) = E(e_i, e_j) = 0$, artinya e_i independen atau tidak berkorelasi dengan e_j untuk setiap nilai i dan j dengan $i \neq j$. Dengan mensubstitusikan persamaan (3.1) pada persamaan (3.4) diperoleh:

$$Cov(R_i, R_j) = E\left([(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i) - E(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i)][(\alpha_j + \beta_j R_m + e_j) - E(\alpha_j + \beta_j R_m + e_j)]\right)$$

$$= E\left([\alpha_i + \beta_i R_m + e_i - \alpha_i - \beta_i E(R_m)][\alpha_j + \beta_j R_m + e_j - \alpha_j - \beta_j E(R_m)]\right)$$

$$= E\left([\beta_i R_m + e_i - \beta_i E(R_m)][\beta_j R_m + e_j - \beta_j E(R_m)]\right)$$

$$= E\left([\beta_i\left(R_m - E(R_m)\right) + e_i][\beta_j\left(R_m - E(R_m)\right) + e_j]\right)$$

$$Cov(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j E(R_m - E(R_m))^2 + \beta_i E[e_j(R_m - E(R_m))]$$
$$+ \beta_j E[e_i(R_m - E(R_m))] + E(u_i u_j)$$

Karena $E[R_m - E(R_m)]^2$ merupakan $Var(R_m)$ dan $E(e_i e_j) = 0$, maka

$$Cov(R_i, R_j) = \beta_i \beta_j Var(R_m) \qquad (3.5)$$

Kovarian semata-mata tergantung pada variansi pasar yang berarti pula bahwa saham-saham ”bergerak bersama” terhadap gerakan pasar. Dapat dinyatakan bahwa risiko saham tergantung dari risiko pasar dan sampai sejauh mana daya tanggap yang sesuai diukur oleh beta (β).

3.1.1 *Capital Assets Pricing Model* untuk *Return* Saham dan *Return* Portofolio

Misalkan terdapat suatu *return* M yang memiliki beta bernilai satu, subtitusikan pada persamaan (3.2) maka ekspektasi *return* M dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E(R_M) = \alpha_i + 1E(R_m) = \alpha_i + E(R_m)$$

Selisih antara ekpektasi *return* M dan α_i adalah ekspektasi *return* pasar yaitu:

$$E(R_m) = E(R_M) - \alpha_i \qquad (3.6)$$

Sedangkan aset bebas risiko memiliki beta bernilai nol dengan mensubtitusikan beta yang bernilai nol pada persamaan (3.2) maka ekspektasi *return* aset bebas risiko (R_f) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathrm{E}(R_f) = \alpha_i + 0E(R_m) = \alpha_i \tag{3.7}$$

Karena nilai ekspektasi *return* aset bebas risiko bernilai pasti, maka untuk selanjutnya penulisan $E(R_f)$ menjadi R_f saja.

Dengan mensubtitusikan persamaan (3.6) dan persamaan (3.7) ke persamaan (3.2) diperoleh persamaan ekspektasi *return* saham dengan aset bebas risiko, yaitu:

$$E(R_i) = R_f + \beta_i\left(E(R_M) - R_f\right) \tag{3.8}$$

Persamaan (3.8) dikenal sebagai *capital asset pricing model*. Model ini digunakan untuk mengestimasi *return* yang diharapkan beserta risiko pasarnya. Pada model ini $E(R_M)$ merupakan *return* pasar yang memiliki beta bernilai satu. Jadi apabila suatu sekuritas memiliki beta bernilai satu maka sekuritas tersebut memiliki *return* sesuai terhadap *return* pasar. *Return* pasar ini biasa ditunjukan dengan indeks saham yang terdiri dari seluruh aset berisiko yang ada.

Beta (β) merupakan suatu pengukur volatilitas *return* suatu sekuritas atau *return* portofolio terhadap *return* pasar. Volatilitas dapat didefinisikan sebagai fluktuasi dari *return-return* suatu sekuritas atau portofolio dalam suatu periode waktu tertentu. Jika nilai β suatu saham lebih besar dari satu, maka saham tersebut memiliki risiko lebih tinggi dari risiko rata-rata pasar, dan saham tersebut termasuk saham agresif. Sebaliknya, jika nilai β suatu saham lebih kecil dari satu, berarti saham tersebut memiliki risiko lebih rendah dari risiko rata-rata pasar maka saham tersebut termasuk saham *defensive*.

Ekspektasi *return* portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari ekspektasi *return* yang diharapkan pada masing-masing aset yang ada dalam suatu portofolio.

$$E(R_p) = \sum_{i=1}^{n} w_i . E(R_i) \qquad (3.9)$$

(Elton et al, 2000:52)

Beta portofolio merupakan rata-rata tertimbang dari beta pada masing-masing aset yang ada dalam suatu portofolio.

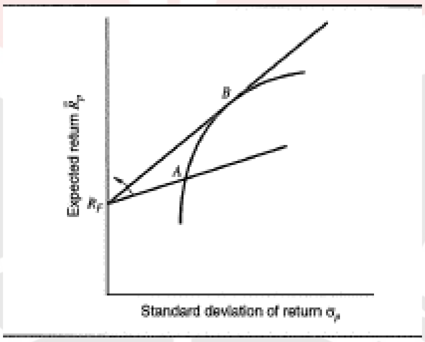
$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i . \beta_i \qquad (3.10)$$

sehingga persamaan (3.8) berlaku pula untuk ekspektasi *return* portofolio.

$$E(R_p) = R_f + \beta_p \left(E(R_M) - R_f \right) \qquad (3.11)$$

3.2 *Simple Criteria for Optimal Portofolio Selection (SCOPS)*

Menurut Markowitz portofolio yang optimal adalah portofolio yang memaksimumkan fungsi kegunaan investor. Namun bila terdapat aset bebas risiko para investor akan memilih aset tersebut atau portofolio yang didalamnya terdapat aset bebas risiko. Portofolio optimal adalah portofolio yang mengkombinasikan aset berisiko dengan aset bebas risiko. Pada Gambar (3.2) portofolio optimal merupakan hasil persinggungan dari seluruh panjang sinar yang diberikan oleh titik-titik R_f dengan kurva *efficient frontier*. Kurva *efficient frontier* adalah kurva tapal batas efisien yang berisi portofolio-portofolio efisien.



Gambar 3.1 titik-titik R_f dengan kurva *efficient frontier*

Portofolio yang optimal ditentukan dengan menghitung kemiringan terbesar antara garis linear R_f ke suatu portofolio-portofolio yang mungkin. Kemiringan terbesar ditentukan dengan mencari ratio portofolio terbesar dari *excess return* (selisih ekspektasi *return* portofolio dengan tingkat aset bebas risiko) dengan standar deviasinya dan dituliskan sebagai berikut:

$$\theta = \frac{\left(E(R_p) - R_f\right)}{\sigma_p} \qquad (3.12)$$

Namun bagaimana pemilihan saham yang sesuai? Penentukan portofolio optimal akan sangat mudah dilakukan jika terdapat sebuah bilangan yang dapat menentukan apakah suatu saham dapat dimasukkan ke dalam suatu portofolio atau tidak. Bilangan yang dimaksud adalah *excess return to beta* yang dirumuskan sebagai berikut:

$$ERB_i = \frac{E(R_i) - R_f}{\beta_i} \tag{3.13}$$

(Elton et al, 2000:184)

dengan:

ERB_i = *excess return to beta* saham *i*

$E(R_i)$ = ekspektasi *return* saham *i*

R_f = *Return* aset bebas risiko

β_i = Beta saham ke-*i*

ERB digunakan untuk mengukur kelebihan *return* terhadap satu unit risiko yang tidak dapat didiversifikasi yang diukur dengan beta.

Portofolio yang optimal akan berisi dengan aset-aset yang mempunyai nilai ERB yang tinggi. Aset-aset dengan ERB yang rendah tidak akan dimasukkan ke dalam portofolio optimal. Tetapi sejauh manakah nilai ERB yang dianggap pantas sebagai portofolio optimal? Oleh karena itu diperlukan sebuah titik pembatas yang menentukan batas nilai ERB yang dikatakan sesuai. Dengan kriteria simpel untuk portofolio optimal besarnya titik pembatas ini dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut: (Elton et al, 2000:184)

1. Urutkan saham-saham berdasarkan nilai ERB terbesar ke nilai ERB terkecil. Saham-saham dengan nilai ERB terbesar merupakan kandidat untuk dimasukkan ke portofolio optimal.
2. Hitung nilai C_i yang mana merupakan nilai batas untuk saham ke-*i* yang dihitung dengan:

$$C_i = \sigma_m^2 \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{E(R_i) - R_f}{Var(e_i)} \beta_i}{1 + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i^2}{Var(e_i)}} \qquad (3.14)$$

3. Besarnya titik batas (C^*) adalah nilai C_i di mana nilai ERB terakhir kali masih lebih besar dari nilai C_i.

Nilai C^* diperoleh dengan cara memaksimumkan θ sebagai berikut:

$$\theta = \frac{\left(E(R_p) - R_f\right)}{\sigma_p} \qquad (3.15)$$

dengan kendala

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \qquad (3.16)$$

Aset bebas risiko dapat dituliskan sebagai berikut:

$$R_f = 1.R_f = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) R_f = \sum_{i=1}^{n} w_i R_f \qquad (3.17)$$

Subtitusikan persamaan (2.9), persamaan (2.13), dan persamaan (3.17) ke dalam persamaan (3.15) diperoleh:

$$\theta = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i . E(R_i) - \sum_{i=1}^{n} x_i R_f\right)}{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \;\; Cov(R_i R_j)\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_i\left(E(R_i) - R_f\right)}{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \;\; Cov(R_i R_j)\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad (3.18)$$

Untuk mencari solusi maksimum dari persamaan (3.18), turunkan tiap variabel pada w dan samakan nilainya dengan nol. Sehingga solusinya diperoleh berturut-turut sebagai berikut:

$$1: \quad \frac{d\theta}{dw_1} = 0$$
$$2: \quad \frac{d\theta}{dw_2} = 0$$
$$\vdots$$
$$n: \quad \frac{d\theta}{dw_n} = 0$$

$$\frac{d\theta}{dw_k} = 0$$

$$\theta = \underbrace{\left[\sum_{j=1}^{n} w_i\left(E(R_i) - R_f\right)\right]}_{\theta_1} . \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \;\; Cov(R_i R_j)\right]^{-\frac{1}{2}}}_{\theta_2}$$

$$\frac{d}{dw_k}(\theta_1 . \theta_2) = \theta_1 \frac{d\theta_2}{dw_k} + \theta_2 \frac{d\theta_1}{dw_k}$$

Selanjutnya $Cov(R_iR_j)$ akan dituliskan σ_{ij} dan $Var(R_i)$ akan dituliskan σ_i^2

$$\frac{d}{dw_k}(\theta_1.\theta_2) = \sum_{j=1}^{n} w_i\left(E(R_i) - R_f\right)\frac{d\theta_2}{dw_k} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\frac{d\theta_1}{dw_k} \qquad (3.19)$$

dengan,

$$\frac{d\theta_1}{dw_k} = \frac{d\sum_{j=1}^{n} w_i\left(E(R_i) - R_f\right)}{dw_k} = \left(E(R_i) - R_f\right) \qquad (3.20)$$

$$\frac{d\theta_2}{dw_k} = \frac{d\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\right]^{-\frac{1}{2}}}{dw_k}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\right]^{-\frac{3}{2}} . \frac{d}{dw_k}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\right] \qquad (3.21)$$

Untuk $\frac{d}{dw_k}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\right]$ semua persamaan yang tidak mengandung k adalah konstanta, maka turunannya bernilai nol. Persamaan yang menyertakan k adalah ${w_k}^2{\sigma_k}^2$ turunannya $2w_k{\sigma_k}^2$. Turunan untuk dua kali penjumlahan dihitung sebagai berikut:

$$\frac{d}{dw_k}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij} \qquad (3.22)$$

Terdapat dua kali w_k, pertama saat $i = k$ dan kedua saat $j = k$. saat $i = k$ diperoleh:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} w_k w_j \sigma_{ij} = w_k \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj}$$

Dan turunannya

$$\frac{d}{dw_k} w_k \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj} \qquad (3.23)$$

Lalu saat $j = k$ diperoleh:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} w_i w_k \sigma_{ik} = w_k \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} w_i \sigma_{ik}$$

Dan turunannya

$$\frac{d}{dw_k} w_k \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} w_i \sigma_{ik} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} w_i \sigma_{ik} \qquad (3.24)$$

Berdasarkan persamaan (3.23) dan persamaan (3.24) terilihat bahwa i dan j simetrik, demikian sehingga

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} w_i \sigma_{ik}$$

Dan diperoleh turunannya, yaitu

$$\frac{d}{dw_k}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}\right) = 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj} \qquad (3.25)$$

Deangan mensubtitusikan persamaan (3.25) ke persamaan (3.21) diperoleh

$$\frac{d\theta_2}{dw_k} = -\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\right]^{-\frac{3}{2}} .2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj}$$

$$= -\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\right]^{-\frac{3}{2}} .\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj} \qquad (3.26)$$

Selanjutnya mensubtitusikan persamaan (3.20) dan persamaan (3.26) ke persamaan (3.19), kemudian samakan hasilnya dengan 0.

$$\frac{d}{dw_k}(\theta_1.\theta_2) = -\left[\sum_{j=1}^{n} x_i\left(E(R_i) - R_f\right)\right].\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\right]^{-\frac{3}{2}} .\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj}$$

$$+\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\right]^{-\frac{1}{2}} .\left(E(R_i) - R_f\right) = 0$$

Kalikan kedua ruas dengan $\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}\right]^{\frac{1}{2}}$ diperoleh,

$$-\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} w_i\left(E(R_i) - R_f\right)}{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \ \ \sigma_{ij}}\right]\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj}\right] + \left(E(R_i) - R_f\right) = 0 \qquad (3.27)$$

Definisikan λ sebagai

$$\lambda = \frac{\sum_{j=1}^{n} w_i \left(E(R_i) - R_f\right)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \;\; \sigma_{ij}}$$

Subtitusikan λ ke persamaan (3.27) diperoleh:

$$\frac{d\theta}{dw_k} = -\lambda \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj} \right] + \left(E(R_i) - R_f\right) = 0$$

$$\lambda \left[\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} w_j \sigma_{kj} \right] = \left(E(R_i) - R_f\right) \tag{3.28}$$

$$\lambda[w_1\sigma_{1k} + w_{2k}\sigma_{2k} + \cdots + w_k\sigma_{kk} + \cdots + w_{N-1}\sigma_{N-1k} + w_N\sigma_{Nk}]$$
$$= \left(E(R_i) - R_f\right) \tag{3.29}$$

$$\lambda w_1\sigma_{1k} + \lambda w_{2k}\sigma_{2k} + \cdots + \lambda w_k\sigma_{kk} + \cdots + \lambda w_{N-1}\sigma_{N-1k} + \lambda w_N\sigma_{Nk}$$
$$= \left(E(R_i) - R_f\right) \tag{3.30}$$

Definisikan $Z_k = \lambda w_k$ maka w_k adalah pecahan proporsi yang akan di investasikan dalam setiap sekuritas. Subtitusikan $Z_k = \lambda w_k$ pada persamaan (3.30) sebagai berikut:

$$Z_1\sigma_{1k} + Z_{2k}\sigma_{2k} + \cdots + Z_k\sigma_{kk} + \cdots + Z_{n-1}\sigma_{n-1k} + Z_n\sigma_{nk} = \left(E(R_i) - R_f\right) \tag{3.31}$$

Persamaan (3.31) berlaku untuk masing-masing saham ke-*k* dari 1 hingga *n*

$$Z_1\sigma_{11} + Z_2\sigma_{12} + \cdots Z_n\sigma_{1n} = \left(E(R_1) - R_f\right)$$

$$Z_1\sigma_{12} + Z_2\sigma_{22} + \cdots Z_n\sigma_{2n} = \left(E(R_2) - R_f\right)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots$$

$$Z_1\sigma_{1n} + Z_2\sigma_{1n} + \cdots Z_n\sigma_{nn} = \left(E(R_n) - R_f\right)$$

Dapat ditulis pula sebagai berikut:

$$Z_i\sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} Z_j\sigma_{ij} = E(R_i) - R_f \qquad ; i = 1, \dots, n \tag{3.32}$$

Subtitusikan persamaan (3.3) dan (3.5) ke persamaan (3.32)

$$Z_i\left(\beta_i^2 Var(R_m) + Var(e_i)\right) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} Z_j\beta_i\beta_j Var(R_m) = E(R_i) - R_f$$

Selanjutnya $Var(R_m)$ akan dituliskan σ_m^2 dan $Var(e_i)$ akan dituliskan $\sigma_{e_i}^2$

$$Z_i\beta_i^2\sigma_m^2 + Z_i\sigma_{e_i}^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} Z_j\beta_i\beta_j\sigma_m^2 = E(R_i) - R_f$$

$$Z_i\sigma_{e_i}^2 + \sum_{j=1}^{n} Z_j\beta_i\beta_j\sigma_m^2 = E(R_i) - R_f$$

$$Z_i\sigma_{e_i}^2 = E(R_i) - R_f - \beta_i\sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} Z_j\beta_j$$

$$Z_i = \frac{E(R_i) - R_f}{\sigma_{e_i}^2} - \frac{\beta_i \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j}{\sigma_{e_i}^2}$$

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{e_i}^2} \left[\frac{E(R_i) - R_f}{\beta_i} - \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j \right]$$

Misalkan $C^* = \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j$ maka,

$$Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{e_i}^2} \left[\frac{E(R_i) - R_f}{\beta_i} - C^* \right] \tag{3.33}$$

Nilai $\sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j$ diketahui setelah saham-saham di portofolio diketahui. Sedangkan nilai C^* dibutuhkan untuk menentukan saham-saham portofolio optimal tersebut. Oleh karena itu, nilai $\sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j$ perlu diuraikan lebih lanjut sebagai berikut:

$$Z_i = \frac{E(R_i) - R_f}{\sigma_{e_i}^2} - \frac{\beta_i \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j}{\sigma_{e_i}^2}$$

kalikan kedua ruas dengan β_j dan jumlahkan semua nilainya dari $j = 1$ sampai dengan $j = n$, maka akan diperoleh:

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(E(R_j) - R_f\right)}{\sigma_{e_j}^2} \beta_j - \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{e_j}^2} \sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j + \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{e_j}^2} \sum_{j=1}^{n} Z_j \beta_j = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(E(R_j) - R_f\right)}{\sigma_{e_j}^2} \beta_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j\beta_j \left[1 + \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{e_j}^2}\right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left(E(R_j) - R_f\right)}{\sigma_{e_j}^2}\beta_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} Z_j\beta_j = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{\left(E(R_j) - R_f\right)}{\sigma_{e_j}^2}\beta_j}{\left[1 + \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j}{\sigma_{e_j}^2}\right]}$$

Subtitusikan nilai $\sum_{j=1}^{n} Z_j\beta_j$ ke C^*diperoleh

$$C^* = \sigma_m^2 \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{E(R_j) - R_f}{\sigma_{e_j}^2}\beta_j}{1 + \sigma_m^2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\beta_j^2}{\sigma_{e_j}^2}}$$

Saham-saham yang membentuk portofolio optimal adalah saham-saham yang mempunyai nilai ERB lebih besar atau sama dengan nilai ERB di titik C^*. Saham-saham yang mempunyai nilai ERB lebih kecil dengan ERB di titik C^* tidak diikutsertakan dalam pembentukan portofolio optimal. Setelah saham-saham yang membentuk portofolio optimal telah dapat ditentukan, maka harus ditentukan pula besar proporsi masing-masing saham tersebut di dalam portofolio optimal. Besarnya proporsi untuk saham ke-*i* adalah

$$w_i = \frac{Z_i}{\sum_{j=1}^{k} Z_j} \tag{3.34}$$

Dengan

$$Z_i = \frac{\beta_i}{Var(e_i)}[ERB_i - C^*] \tag{3.35}$$

dengan

w_i = Proporsi saham ke-*i*

k = Jumlah saham di portofolio optimal

β_i = Beta saham ke-*i*

$Var(e_i)$ =Variansi dari kesalahan residual saham ke-*i*

ERB_i = *Excess return to beta* saham ke-*i*

C^* = Nilai batas yang merupakan nilai C_i di mana nilai ERB terakhir kali masih lebih besar dari nilai C_i.

3.3 *Value at Risk*

Value at Risk didefinisikan sebagai kemungkinan kerugian terbesar untuk suatu portofolio dalam tingkat kepercayaan yang diberikan terhadap waktu horizon spesifik (Redhead, 1997). Sedangkan menurut Rupert (2004:346), *Value at Risk* didefinisikan sebagai batas risiko pasar yang dapat diperkirakan sedemikian sehingga kerugian selama *horizon time* tertentu lebih kecil dari batas kerugian tersebut, dengan peluang kejadian sebesar koefisien kepercayaan tertentu.

Value at risk menggunakan dua parameter yaitu *horizon* (pengamatan waktu) dan koefsien kepercayaan yang dinyatakan oleh T dan $1-\alpha$. *Value at risk* dapat digunakan untuk mengukur risiko pasar dari sebuah portofolio untuk berbagai waktu, mulai dari harian, mingguan, bulanan, hingga tahunan. Dalam istilah teori peluang, *Value at risk* dapat dinyatakan sebagai kuantil ke- α dari distribusi *return*. *Value at risk* dapat ditentukan melalui fungsi kepadatan peluang dari nilai *return* dimasa depan $f(R)$ dengan R merupakan tingkat *return*. Pada tingkat kepercayaan $1-\alpha$, akan ditentukan kemungkinan terburuk, R^*. Sehingga peluang munculnya nilai *return* melebihi R^* adalah $1-\alpha$.

$$1-\alpha = \int_{R^*}^{\infty} f(R)dR$$

Sedangkan peluang munculnya suatu nilai *return* kurang dari sama dengan R^*, $p = P(R \leq R^*)$ adalah α.

$$\alpha = \int_{-\infty}^{R^*} f(R)dR = P(R \leq R^*) = p$$

Luas daerah $-\infty$ sampai dengan R^* harus sama dengan p dan R^* merupakan kuantil dari distribusi *return* yang merupakan nilai kritis dengan peluang yang sudah ditentukan.

Bila diasumsikan distribusi *return* merupakan distribusi normal maka pertama perlu diterjemahkan distribusi umum $f(w)$ ke distribusi normal standar $\Phi(\epsilon)$ dimana $\epsilon \sim N(0, \sigma^2)$. Jika W_0 didefinisikan sebagai investasi awal maka nilai aset pada akhir periode waktu $W = W_0(1 - R)$. Misalkan W^* adalah nilai aset paling rendah dengan tingkat kepercayaan $1 - \alpha$. Maka hubungan W^* dan R^* dapat ditulisakan sebagai $W^* = W_0(1 - R^*)$. Umumnya R^* adalah negatif dan dapat dituliskan sebagai $-|R^*|$. Selanjutnya R^* dapat dikaitkan dengan standar normal deviasi $z_\alpha > 0$ dengan $-z_\alpha = \frac{-|R^*| - \mu}{\sigma}$, sehingga

$$\alpha = \int_{\infty}^{W^*} f(w)dw = 1 - \alpha = \int_{-\infty}^{-|R^*|} f(R)dR = \int_{-\infty}^{-z_\alpha} \Phi(\epsilon)d\epsilon \qquad (3.36)$$

Nilai z_α diperoleh dari tabel distribusi standar normal kumulatif. Sehingga dari persamaan (3.36) diperoleh:

$$R^* = \mu - z_\alpha \sigma \qquad (3.37)$$

Berdasarkan uraian di atas maka *Value at risk* pada tingkat kepercayaan $1 - \alpha$ dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$VaR = -W_0 R^*$$

Dalam skripsi ini pengukuran *Value at risk* akan dilakukan pada portofolio yang telah terbentuk dengan dengan model penetapan harga aset modal, yaitu dengan menggunakan σ. Karena perhitungan *Value at risk* akan dilakukan pada portofolio maka $\mu = E(R_p)$ dan $\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}$, sehingga

$$VaR_p = -W_0\left(E(R_p) - z_\alpha\sqrt{\sigma_p^2}\right) \tag{3.38}$$

Prosedur dalam Perhitungan *Value at Risk* dengan menggunakan pendekatan model penetapan harga aset modal adalah sebagai berikut:

1. Asumsikan besarnya investasi awal (W_0)
2. Hitung nilai ekpektasi *return* dan variansi dari model penetapan harga aset modal
3. Hitung nilai σ_p dari nilai variansi yang telah diperoleh
4. Tentukan besarnya quantile, menggunakan persamaan (3.37)
5. Hitung nilai VaR dengan menggunakan persamaan (3.38)

Melalui nilai *Value at risk* kemungkinan kerugian maksimum yang diperoleh dari portofolio yang terbentuk akan dapat diperkirakan. Sehingga dapat dipilih portofolio mana yang akan menghasilkan keuntungan maksimum dan kerugian yang minimum.