BAB III
PEMBAHASAN

3.1 FUNGSI PADA RUANG LINIER BERNORM

3.1.1 Sifat-sifat Ruang Linier Bernorm

Pada pembahasan sebelumnya, telah dijelaskan bahwa suatu himpunan dikatakan kompak jika himpunan tersebut memiliki subkover berhingga. Cara lain untuk membuktikan bahwa suatu himpunan merupakan himpunan kompak adalah dengan menggunakan Teorema **Heine-Borel**, dimana cukup menunjukkan bahwa himpunan tersebut tertutup dan terbatas. Sebelum itu, terlebih dahulu akan dijelaskan tentang Teorema **Bolzano Weierstrass**.

Teorema 3.1.1.1 (Teorema Bolzano Weierstrass)
Setiap himpunan tak berhingga yang terbatas pada $\mathbb{R}^n$ memiliki titik limit.

Bukti:
Ambil sebarang himpunan tak berhingga $S \in \mathbb{R}^n$. Perhatikan bahwa S terbatas pada $\mathbb{R}^n$, maka terdapat interval tutup

$$I_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : a_i \leq x_i \leq b_i, \text{untuk setiap } i = 1,2, \cdots, n\}$$

sedemikian sehingga $S \subset I_1$. Perhatikan bahwa S himpunan tak berhingga, maka

$$S \cap I_1,$$

adalah himpunan tak berhingga, sehingga I_1 memuat tak berhingga elemen dari S. Kemudian bagi interval I_1 menjadi I_2, dimana untuk setiap $i = 1,2, \cdots, n$, interval $[a_i, b_i]$ dibagi menjadi interval

$$\left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right].$$

Dengan demikian, didapat interval

$$I_2 = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : a_i \leq x_i \leq \frac{a_i + b_i}{2}, \text{untuk setiap } i = 1,2, \cdots, n\right\}$$

Perhatikan bahwa S himpunan tak berhingga, maka

$$S \cap I_2,$$

juga merupakan himpunan tak berhingga, sehingga I_2 memuat tak berhingga elemen dari S. Kemudian, interval I_2 dibagi kembali menjadi interval I_3, dimana untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, interval

$$\left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right].$$

dibagi menjadi

$$\left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2^2}\right].$$

Akibatnya, dengan argumen yang sama seperti sebelumnya, didapat bahwa

$$S \cap I_3,$$

adalah himpunan tak berhingga, sehingga I_3 memuat tak berhingga elemen dari S. Kemudian interval I_3 dibagi menjadi dua bagian kembali, dan proses dilanjutkan sama seperti sebelumnya, sehingga akan didapat interval tersarang

$$I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots.$$

Berdasarkan Teorema Interval Tersarang, terdapat titik $\boldsymbol{\alpha}$ yang berada pada semua interval tersarang I_n. Kemudian notasikan

$$l(I_1) = \sup\{b_i - a_i : i = 1,2,\cdots,n\},$$

adalah panjang dari interval I_1. Perhatikan bahwa interval I_k, didapat dari membagi dua elemen I_{k-1}, untuk setiap interval, maka didapat bahwa panjang interval I_k adalah

$$l(I_k) = \frac{1}{2^{k-1}} l(I_1).$$

Misalkan $V_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha})$ sebarang persekitaran dari $\boldsymbol{\alpha}$. Berdasarkan prinsip Archimedes, terdapat bilangan bulat positif n_1 sedemikian sehingga $I_{n_1} \subseteq V_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha})$. Perhatikan bahwa I_{n_1} memuat tak berhingga elemen dari S. Jadi $V_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha})$ memuat satu titik dari S yang berbeda dengan $\boldsymbol{\alpha}$, maka S memiliki titik limit, yaitu $\boldsymbol{\alpha}$. ●

Sebagai contoh, berdasarkan teorema diatas, dapat ditunjukkan bahwa setiap barisan terbatas pada $\mathbb{R}^n$ memiliki subbarisan yang konvergen.

Teorema 3.1.1.2

Setiap barisan terbatas pada $\mathbb{R}^n$ memiliki subbarisan yang konvergen.

Bukti:

Misal $X = (\boldsymbol{x}_n)$ barisan terbatas pada $\mathbb{R}^n$, maka berdasarkan Teorema Bolzano-Weierstrass 3.1.1.1, terdapat titik limit, katakanlah $\boldsymbol{x}$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Misal $\boldsymbol{x}_{n_1}$ elemen dari X sedemikian sehingga

$$\|\boldsymbol{x}_{n_1} - \boldsymbol{x}\| < \varepsilon.$$

Misalkan persekitaran $V_{\frac{\varepsilon}{2}} = \left\{\boldsymbol{y} : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \frac{1}{2}\varepsilon\right\}$. Perhatikan bahwa $\boldsymbol{x}$ adalah titik limit dari himpunan $S_1 = \{\boldsymbol{x}_m : m \geq 1\}$, maka $\boldsymbol{x}$ juga titik limit dari himpunan $S_2 = \{\boldsymbol{x}_m : m \geq n_1\}$. Akibatnya terdapat elemen $\boldsymbol{x}_{n_2}$ dari S_2, dimana $n_2 > n_1$ yang termuat pada $V_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Selanjutnya, misalkan persekitaran $V_{\frac{\varepsilon}{3}} = \left\{\boldsymbol{y} : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \frac{1}{3}\varepsilon\right\}$ dan $S_3 = \{\boldsymbol{x}_m : m \geq n_2\}$. Dengan argumen yang sama, maka terdapat elemen $\boldsymbol{x}_{n_3}$ dari S_3, dimana $n_3 > n_2$ yang termuat pada $V_{\frac{\varepsilon}{3}}$. Berdasarkan hal tersebut, akan didapatkan subbarisan

$$X' = (\boldsymbol{x}_{n_1}, \boldsymbol{x}_{n_2}, \cdots)$$

dari X dengan

$$\|\boldsymbol{x}_{n_r} - \boldsymbol{x}\| < \frac{\varepsilon}{r}.$$

Jadi, subbarisan X' konvergen. ●

Teorema 3.1.1.3 (Teorema Heine Borel)

Himpunan $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompak jika dan hanya jika K terbatas dan tertutup.

Bukti:

Pertama akan dibuktikan, jika K kompak pada $\mathbb{R}^p$, maka K tertutup. Misalkan $\boldsymbol{x} \in \mathcal{C}(K)$ dan untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, misalkan G_m himpunan yang didefinisikan

$$G_m = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^p : \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| > \frac{1}{m}\right\}.$$

Akibatnya, untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, G_m buka pada $\mathbb{R}^p$. Selain itu, gabungan semua himpunan $G_m, m \in \mathbb{N}$, terdiri dari semua titik dari $\mathbb{R}^p$ kecuali $\boldsymbol{x}$. Perhatikan bahwa $\boldsymbol{x} \notin K$, sehingga setiap titik di K pasti berada pada suatu himpunan G_m. Berdasarkan definisi himpunan kompak, maka terdapat bilangan asli M sedemikian sehingga

$$K \subseteq \bigcup_M G_M.$$

Perhatikan bahwa pada himpunan G_m, dimana m naik, berlaku

$$G_1 \subseteq G_2 \subseteq \cdots \subseteq G_M.$$

Akibatnya, $K \subseteq G_M$. Selanjutnya persekitaran $\left\{\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^p : \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{x}\| > \frac{1}{M}\right\}$, tidak memuat K, sehingga $\mathcal{C}(K)$ buka pada $\mathbb{R}^p$. Jadi, didapat bahwa K tutup pada $\mathbb{R}^p$.

Kedua, akan ditunjukkan jika K kompak, maka K terbatas. Misalkan, untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, H_m adalah himpunan buka yang didefinisikan oleh

$$H_m = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^p : \|x\| < m\}.$$

Perhatikan bahwa $\mathbb{R}^p$ dan begitu juga K termuat pada gabungan himpunan $H_m, m \in \mathbb{N}$. Kemudian, karena K kompak, maka terdapat bilangan asli M, sedemikian sehingga

$$K \subseteq \bigcup_M H_M.$$

Diketahui bahwa pada himpunan H_m, dimana m naik, berlaku

$$H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_M.$$

Akibatnya, $K \subseteq H_M$, sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x} \in K, \|\boldsymbol{x}\| < M$. Jadi, K terbatas.

Selanjutnya, akan ditunjukkan berlaku sebaliknya, yaitu jika K terbatas dan tertutup, maka K kompak. Asumsikan K tidak dapat dikover oleh berhingga subset dari $\mathcal{G}$. Perhatikan bahwa K terbatas pada $\mathbb{R}^n$, maka terdapat interval tutup

$$I_1 = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} : a_i \leq x_i \leq b_i\}, \text{untuk setiap } i = 1,2, \cdots, n,$$

sedemikian sehingga $K \subset I_1$. Perhatikan bahwa K tidak dapat dikover oleh berhingga subset dari $\mathcal{G}$, maka

$$S \cap I_1,$$

adalah himpunan yang tidak dapat dikover oleh berhingga subset dari $\mathcal{G}$. Kemudian bagi interval I_1 menjadi I_2, dimana untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, interval $[a_i, b_i]$ dibagi menjadi interval

$$\left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right].$$

Dengan demikian, didapat interval

$$I_2 = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} :\ a_i \leq x_i \leq \frac{a_i + b_i}{2}\right\}, \forall\ i = 1,2,\cdots,n,$$

Perhatikan bahwa K tidak dapat dikover oleh berhingga subset dari $\mathcal{G}$, maka

$$K \cap I_2,$$

adalah himpunan yang tidak dapat dikover oleh berhingga subset dari $\mathcal{G}$. Kemudian, interval I_2 dibagi kembali menjadi interval I_3, dimana untuk setiap $i = 1,2,\cdots,n$, interval

$$\left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2}\right].$$

dibagi menjadi

$$\left[a_i, \frac{a_i + b_i}{2^2}\right].$$

Akibatnya, dengan argumen yang sama seperti sebelumnya, didapat bahwa

$$K \cap I_3,$$

adalah himpunan yang tidak dapat dikover oleh berhingga subset dari $\mathcal{G}$. Kemudian interval I_3 dibagi menjadi dua bagian kembali, dan proses dilanjutkan sama seperti sebelumnya, sehingga akan didapat interval tersarang

$$I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots.$$

Berdasarkan Teorema Interval Tersarang, terdapat titik $\boldsymbol{\alpha}$ yang berada pada semua interval tersarang I_n, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Misalkan $V_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha})$ persekitaran dari $\boldsymbol{\alpha}$, maka untuk n yang sangat besar, berlaku

$$I_n \subset V_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha}).$$

Perhatikan bahwa $I_n \cap K$ tidak dapat dikover oleh berhingga subset dari $\mathcal{G}$, maka I_n memuat subset dari K yang tidak dapat dikover oleh berhingga subset dari $\mathcal{G}$. Jadi $V_\varepsilon(\boldsymbol{\alpha})$ memuat K. Perhatikan bahwa $\boldsymbol{\alpha}$ merupakan titik limit dari K. Diketahui bahwa K tutup, maka $\boldsymbol{\alpha} \in K$ dan terdapat $\mathcal{G}_i \in \mathcal{G}$, sedemikian sehingga

$\boldsymbol{\alpha} \in \mathcal{G}_i$. Akibatnya, terdapat persekitaran $V_{\varepsilon_i}(\boldsymbol{\alpha})$ sedemikian sehingga $V_{\varepsilon_i}(\boldsymbol{\alpha}) \subset \mathcal{G}_i$. Untuk n yang besar, $I_n \subset V_{\varepsilon_i}(\boldsymbol{\alpha})$. Akibatnya $I_n \subset \mathcal{G}_i$, sehingga terjadi kontradiksi, dimana I_n tidak termuat pada $\mathcal{G}_i$. Jadi haruslah diasumsikan bahwa K dapat dikover oleh berhingga subset dari $\mathcal{G}$. ●

Konsep penting lain dalam ruang linier bernorm adalah konsep tentang barisan Cauchy. Berdasarkan Teorema Bolzano-Weierstrass, dapat ditunjukkan bahwa jika semua barisan terbatas pada $\mathbb{R}^n$ memiliki subbarisan yang konvergen.

Teorema 3.1.1.4

Setiap barisan Cauchy pada $\mathbb{R}^n$ konvergen ke titik di $\mathbb{R}^n$.

Bukti:

Ambil $(\boldsymbol{a}_n)$ sebarang barisan Cauchy pada $\mathbb{R}^n$. Perhatikan bahwa $(\boldsymbol{a}_n)$ barisan Cauchy. Akibatnya untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan bulat $p(\varepsilon)$ yang bergantung pada ε, sedemikian sehingga, untuk setiap $n, m > p(\varepsilon)$, berlaku

$$\|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_n\| < \varepsilon.$$

Pilih $n_1 \geq m(\varepsilon + 1)$, maka untuk setiap $m > p(\varepsilon)$, berlaku $n_1 > p(\varepsilon)$, sehingga untuk setiap $n_1, m > p(\varepsilon)$, berlaku

$$\|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_{n_1}\| < \varepsilon.$$

Perhatikan bahwa

$$\|\boldsymbol{a}_m\| = \|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_{n_1} + \boldsymbol{a}_{n_1}\| \leq \|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_{n_1}\| + \|\boldsymbol{a}_{n_1}\| < \varepsilon + \|\boldsymbol{a}_{n_1}\|.$$

Misalkan

$$r = \max\{\|\boldsymbol{a}_1\|, \|\boldsymbol{a}_2\|, \dots, \|\boldsymbol{a}_{p(\varepsilon)}\|, \|\boldsymbol{a}_{n_1}\| + \varepsilon\}.$$

Maka, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\boldsymbol{a}_n\| \leq r.$$

Akibatnya $(\boldsymbol{a}_n)$ terbatas, sehingga terdapat subbarisan $(\boldsymbol{a}_{n_k})$ yang konvergen, katakanlah konvergen ke $\boldsymbol{a}$. Akibatnya untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $p_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga untuk setiap $n_k \geq p_1(\varepsilon)$, berlaku

(3.1) $$\|\boldsymbol{a}_{n_k} - \boldsymbol{a}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sebelumnya telah diketahui, bahwa $(\boldsymbol{a}_n)$ barisan Cauchy, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $p_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $n_k, m > p_2(\varepsilon)$, berlaku

(3.2) $$\|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_{n_k}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pilih $p_0 = \max\{p_1(\varepsilon), p_2(\varepsilon)\}$, sehingga untuk setiap $n_k, m \geq p_0$, pertidaksamaan (3.1) dan (3.2) berlaku

$$\|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_{n_k} + \boldsymbol{a}_{n_k} - \boldsymbol{a}\| \leq \|\boldsymbol{a}_m - \boldsymbol{a}_{n_k}\| + \|\boldsymbol{a}_{n_k} - \boldsymbol{a}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Jadi, $(\boldsymbol{a}_n)$ konvergen ke $\boldsymbol{a}$. ●

Pada bab sebelumnya telah dijelaskan tentang dua ruang linear yang saling isomorfisma. Berikut teorema yang menjelaskan bahwa ruang linier berdimensi-n isomorfis dengan $\mathbb{R}^n$.

Teorema 3.1.1.5

Setiap ruang linier L berdimensi-n isomorfis dengan $\mathbb{R}^n$.

Bukti:

Perhatikan bahwa L ruang linier berdimensi-n, maka ada $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n\}$ basis untuk L**.** Selain itu, setiap $\boldsymbol{x}$ elemen dari L dapat dibentuk menjadi kombinasi linier

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n,$$

dan solusi $k_1, k_2, \cdots, k_n$ tunggal yang bergantung pada $\boldsymbol{x}$. Jadi terdapat korespondensi satu-satu antara $\boldsymbol{x} \in L$ dan $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^n$. Berarti untuk suatu $\boldsymbol{y} \in L$ terdapat $(l_1, l_2, \cdots, l_n) \in \mathbb{R}^n$ sedemikian sehingga

$$\boldsymbol{y} = l_1\boldsymbol{x}_1 + l_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{x}_n.$$

Akibatnya berlaku

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} &= \alpha(k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n) + \beta(l_1\boldsymbol{x}_1 + l_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + l_n\boldsymbol{x}_n)\\ &= \alpha k_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha k_n\boldsymbol{x}_n + \beta l_1\boldsymbol{x}_1 + \beta l_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \beta l_n\boldsymbol{x}_n\end{aligned}$$

$$= \alpha k_1\boldsymbol{x}_1 + \beta l_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha k_2\boldsymbol{x}_2 + \beta l_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha k_n\boldsymbol{x}_n + \beta l_n\boldsymbol{x}_n$$
$$= (\alpha k_1 + \beta l_1)\boldsymbol{x}_1 + (\alpha k_2 + \beta l_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + (\alpha k_n + \beta l_n)\boldsymbol{x}_n.$$

Jadi $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ berkorespondensi dengan $(\alpha k_1 + \beta l_1, \alpha k_2 + \beta l_2, \cdots, \alpha k_n + \beta l_n)$. Misal $T : L \to \mathbb{R}^n$, dan berlaku

$$T(\boldsymbol{x}) = (k_1, k_2, \cdots, k_n) \text{ dan } T(\boldsymbol{y}) = (l_1, l_2, \cdots, l_n).$$

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} T(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) &= (\alpha k_1 + \beta l_1, \alpha k_2 + \beta l_2, \cdots, \alpha k_n + \beta l_n) \\ &= (\alpha k_1, \alpha k_2, \cdots, \alpha k_n) + (\beta l_1, \beta l_2, \cdots, \beta l_n) \\ &= \alpha(k_1, k_2, \cdots, k_n) + \beta(l_1, l_2, \cdots, l_n) \\ &= \alpha T(\boldsymbol{x}) + \beta T(\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

Jadi T pemetaan linier. Akibatnya $T : L \to \mathbb{R}^n$ isomorfisma, sehingga L dan $\mathbb{R}^n$ saling isomorfis. ●

Misalkan $\|.\|_1$ dan $\|.\|_2$ adalah dua norm yang terdefinisi pada ruang linier L yang sama. Kedua norm tersebut dikatakan **ekuivalen secara topologi** jika terdapat bilangan positif m_1 dan m_2 sedemikian sehingga

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq m_1\|\boldsymbol{x}\|_1 \text{ dan } \|\boldsymbol{x}\|_1 \leq m_2\|\boldsymbol{x}\|_2, \text{ untuk setiap } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}.$$

Dalam hal ini, untuk setiap persekitaran-ε dari titik hasil $\|.\|_1$ akan memuat persekitaran-δ dari titik hasil $\|.\|_2$, dan berlaku juga sebaliknya. Kedua norm tersebut dikatakan ekuivalen secara topologi, karena berdasarkan fakta berikut ini.

a) Titik $\boldsymbol{x}$ adalah interior, eksterior atau titik batas dari himpunan U persekitaran yang bergantung $\|.\|_1$ jika dan hanya jika memiliki relasi yang sama dari himpunan U persekitaran yang bergantung $\|.\|_2$.
b) Himpunan U adalah buka, tutup, kompak atau terbatas dari topologi yang dibangun oleh $\|.\|_1$ jika dan hanya jika himpunan U juga buka, tutup, kompak atau terbatas dari topologi yang dibangun oleh $\|.\|_2$.
c) Barisan $(\boldsymbol{x}_n)$ Cauchy dari $\|.\|_1$ jika dan hanya jika barisan $(\boldsymbol{x}_n)$ Cauchy dari $\|.\|_2$. Barisan $(\boldsymbol{x}_n)$ konvergen ke $\boldsymbol{y}$ dari $\|.\|_1$ jika dan hanya jika $(\boldsymbol{x}_n)$ konvergen ke $\boldsymbol{y}$ dari $\|.\|_2$.

Contoh dua norm ekuivalen secara topologi adalah dua norm pada ruang linear $n - tuple$ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ yang didefinisikan oleh

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = (x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{dan} \quad \|\boldsymbol{x}\|_2 = \max|x_i|, i = 1,2, \cdots, n.$$

Berdasarkan hal tersebut, didapatkan ketaksamaan

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \max|x_i| \leq (x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2)^{\frac{1}{2}} = \|\boldsymbol{x}\|_1,$$

dan

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = (x_1{}^2 + x_2{}^2 + \cdots + x_n{}^2)^{\frac{1}{2}} \leq n \max|x_i| = n\|\boldsymbol{x}\|_2.$$

Teorema 3.1.1.6

Semua norm pada ruang linier berdimensi berhingga, ekuivalen secara topologi.

Bukti:

Ambil sebarang L ruang linier berdimensi berhingga, katakanlah berdimensi n dengan basis $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$. Perhatikan bahwa setiap $\boldsymbol{x} \in L$ dapat dibentuk menjadi

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n.$$

Berdasarkan penjelasan tentang ruang linear bernorm, didapat bahwa

$$\|\boldsymbol{x}\| = \left(k_1{}^2 + k_2{}^2 + \cdots + k_n{}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

adalah norm pada L. Perhatikan bahwa ekuivalen secara topologi berarti terdapat relasi transitif, sehingga akan ditunjukkan sebarang norm $\|.\|_1$ pada L, ekuivalen secara topologi dengan $\|.\|$. Akan ditunjukkan bahwa terdapat r dan p bilangan real positif, sedemikian sehingga $\|\boldsymbol{x}\| \leq r\|\boldsymbol{x}\|_1$, dan $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq p\|\boldsymbol{x}\|$. Pertama, misalkan $M = \max|\boldsymbol{x}_i|, i = 1,2, \cdots, n$, maka

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{x}\|_1 &= \|k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n\| \\
&\leq \|k_1\boldsymbol{x}_1\| + \|k_2\boldsymbol{x}_2\| + \cdots \|k_n\boldsymbol{x}_n\| \\
&\leq |k_1|\|\boldsymbol{x}_1\| + |k_2|\|\boldsymbol{x}_2\| + \cdots + |k_n|\|\boldsymbol{x}_n\| \\
&\leq M(|k_1| + |k_2| + \cdots + |k_n|) \\
&\leq Mn \max|k_i| \\
&\leq Mn\|\boldsymbol{x}\|.
\end{aligned}$$

Maka, terdapat bilangan positif $p = Mn$ sedemikian sehingga $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq p\|\boldsymbol{x}\|$. Kemudian akan ditunjukkan terdapat r bilangan positif sedemikian sehingga $\|\boldsymbol{x}\| \leq r\|\boldsymbol{x}\|_1$. Jika tidak ada r sedemikian sehingga $\|\boldsymbol{x}\| \leq r\|\boldsymbol{x}\|_1$, akibatnya untuk setiap s, ada vektor $\boldsymbol{y}$ pada L, sedemikian sehingga $s\|\boldsymbol{y}\|_1 < \|\boldsymbol{y}\|$. Konstruksi $\boldsymbol{z} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|}$, akibatnya $\|\boldsymbol{z}\| = 1$. Kemudian

$$\|\boldsymbol{z}\|_1 = \frac{\|\boldsymbol{y}\|_1}{\|\boldsymbol{y}\|} < \frac{1}{s}.$$

Perhatikan bahwa $\boldsymbol{z}$ elemen pada ruang linier L, sedemikian sehingga dapat dibentuk menjadi kombinasi linier

$$\boldsymbol{z} = a_{1k}\boldsymbol{x}_1 + a_{2k}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_{nk}\boldsymbol{x}_n.$$

Selain itu, karena $\|\boldsymbol{z}\| = 1$, maka barisan $\{(a_{1k}, a_{1k}, \cdots, a_{1k})\}_{k=1}^{\infty}$ adalah barisan yang terbatas, sehingga memiliki subbarisan yang konvergen, katakanlah konvergen ke $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$. Notasikan subbarisan dari $\{(a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk})\}_{k=1}^{\infty}$ adalah barisan $\{(a_{1k}, a_{2k}, \cdots, a_{nk})\}_{k=1}^{\infty}$ sendiri. Jika

$$\boldsymbol{z}_k = b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{x}_n,$$

maka didapat

$$\begin{aligned}\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_k &= a_{1k}\boldsymbol{x}_1 + a_{2k}\boldsymbol{x}_2 + \cdots + a_{nk}\boldsymbol{x}_n - (b_1\boldsymbol{x}_1 + b_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{x}_n)\\ &= (a_{1k} - b_1)\boldsymbol{x}_1 + (a_{2k} - b_2)\boldsymbol{x}_2 + \cdots + (a_{nk} - b_n)\boldsymbol{x}_n.\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_k\| = \lim_{k\to\infty}[(a_{1k} - b_1)^2 + (a_{2k} - b_2)^2 + \cdots + (a_{nk} - b_n)^2]^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Perhatikan bahwa, berdasarkan ketaksamaan segitiga, didapat bahwa

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{z}_k\| = \|\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}\|\\ &\Rightarrow \|\boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_k\| \leq \|\boldsymbol{z}_k\| \leq \|\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z}\|.\end{aligned}$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}(\|\boldsymbol{z}\| - \|\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_k\|) \leq \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{z}_k\| \leq \lim_{k\to\infty}(\|\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{z}\| + \|\boldsymbol{z}\|)\\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{z}\| \leq \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{z}_k\| \leq \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{z}\|\\ &\Rightarrow 1 \leq \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{z}_k\| \leq 1\\ &\Rightarrow \lim_{k\to\infty}\|\boldsymbol{z}_k\| = 1\\ &\Rightarrow \|\boldsymbol{z}_k\| = 1.\end{aligned}$$

Pada lain pihak, didapat bahwa

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{z}_k\|_1 &= \|\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}\|_1 \\ &\leq \|\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z}\|_1 + \|\boldsymbol{z}\|_1 \\ &\leq Mn\,\|\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{z}\| + \frac{1}{s}.\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk k yang besar, nilai $\|\boldsymbol{z}_k\|_1 = 0$. Akibatnya, berdasarkan sifat norm, $\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{0}$. Hal ini kontradiksi dengan $\|\boldsymbol{z}_k\| = 1$, sehingga haruslah terdapat r bilangan positif, sedemikian sehingga $\|\boldsymbol{x}\| \leq r\|\boldsymbol{x}\|_1$. Jadi didapat bahwa $\|.\|_1$ ekuivalen secara topologi dengan $\|.\|$. ●

Misalkan L ruang linear berdimensi hingga, katakanlah n, sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x} \in L$, dapat dibuat menjadi kombinasi linear

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{x}_1 + k_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{x}_n,$$

dengan basis $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$. Perhatikan bahwa, berdasarkan Teorema 3.1.1.5, maka pemetaan φ dari $\boldsymbol{x} \in L$ ke $(k_1, k_2, \cdots, k_n) \in \mathbb{R}^n$, merupakan isomorfisma sehingga L dan $\mathbb{R}^n$ saling isomorfis. Hal tersebut mengakibatkan terdapat hubungan antara $\|.\|$ pada L dan $\|.\|_1$ pada $\mathbb{R}^n$. Jika $\varphi : L \to M$ isomorfisma dari dua ruang linear L dan M, yang memiliki norm $\|.\|$ dan $\|.\|_1$, maka L dan M dikatakan **isomorfis secara topologi** jika memenuhi kondisi

$$\|\boldsymbol{x}\| \leq k\|\varphi(\boldsymbol{x})\|_1, \quad \text{dan} \quad \|\varphi(\boldsymbol{x})\|_1 \leq m\|\boldsymbol{x}\|,$$

untuk suatu bilangan konstan k dan m. Kedua ruang linear tersebut dikatakan isomorfis secara topologi, karena berdasarkan fakta berikut ini.

a) Titik $\boldsymbol{x}$ adalah interior, eksterior atau titik batas dari himpunan $U \subset L$ persekitaran yang bergantung $\|.\|$ jika dan hanya jika memiliki relasi yang sama dengan titik $\varphi(\boldsymbol{x})$ dari himpunan $\varphi(U) \subset M$ persekitaran yang bergantung $\|.\|_1$.
b) Himpunan $U \subset L$ adalah buka, tutup, kompak atau terbatas jika dan hanya jika himpunan $\varphi(U) \subset M$ juga buka, tutup, kompak atau terbatas.
c) Barisan $(\boldsymbol{x}_n)$ Cauchy pada L jika dan hanya jika barisan $\{\varphi(\boldsymbol{x}_n)\}$ Cauchy pada M. Barisan $(\boldsymbol{x}_n)$ konvergen ke $\boldsymbol{y}$ di L jika dan hanya jika $\{\varphi(\boldsymbol{x}_n)\}$ konvergen ke $\varphi(\boldsymbol{y})$ di M.

Teorema 3.1.1.7

Setiap ruang linear bernorm berdimensi hingga dengan dimensi n adalah isomorfis secara topologi dengan $\mathbb{R}^n$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.1.1.5, telah dibuktikan bahwa ruang linear L berdimensi hingga, katakanlah n, saling isomorfis dengan $\mathbb{R}^n$. Berdasarkan Teorema 3.1.1.6, semua normnya ekuivalen secara topologi. Jadi, L dan $\mathbb{R}^n$ isomorfis secara topologi. ●

3.1.2 Fungsi Pada Ruang Linier Bernorm

Fungsi pada ruang linier bernorm adalah fungsi dengan daerah asal ruang linear bernorm U subset dari ruang linier L dan daerah hasil pada ruang linier bernorm M. Fungsi tersebut dapat dituliskan sebagai

$$f : U \to M$$

Jika $M = \mathbb{R}$, maka fungsi f dikatakan **fungsional**.

Pada Definisi 2.3.3.3, telah dijelaskan tentang transformasi linear, sehingga apabila terdapat pemetaan $T : L \to M$, berlaku

$$T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}), \qquad T(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x}), \quad \forall\, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Selanjutnya terdapat hubungan antara transformasi linear dengan transformasi *affine*. Transformasi $A : L \to M$ dikatakan **transformasi *affine*** jika untuk setiap $\boldsymbol{x} \in L$, berlaku

$$A(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b},$$

dimana T adalah transformasi linear dan $\boldsymbol{b}$ vektor konstan di M. Berdasarkan kedua definisi diatas, didapat bahwa jika T linear, maka $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, dan jika A *affine*, maka $A(\mathbf{0}) = \boldsymbol{b}$. Apabila $L = M = \mathbb{R}$, fungsi linear adalah fungsi yang didefinisikan sebagai $T(x) = mx$ dan fungsi *affine* $A(x) = mx + b$.

Teorema 3.1.2.1

$A : L \to M$ *affine* jika dan hanya jika

(3.3) $$A\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \boldsymbol{x}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A(\boldsymbol{x}_i)$$

untuk setiap $\boldsymbol{x}_i \in L$ dan bilangan real α_i, sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1.$$

Bukti:

Jika A *affine*, akan ditunjukkan berlaku (3.3). Perhatikan bahwa A *affine*, maka ada transformasi linear T dan vektor konstan $\boldsymbol{b}$, sedemikian sehingga

$$A\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \boldsymbol{x}_i\right)=T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \boldsymbol{x}_i\right)+\boldsymbol{b}.$$

Perhatikan juga bahwa T linear, maka berlaku

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \boldsymbol{x}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(\boldsymbol{x}_i).$$

Akibatnya

$$A\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \boldsymbol{x}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)+\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T(\boldsymbol{x}_i)+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i [T(\boldsymbol{x}_i)+\boldsymbol{b}],$$

Selanjutnya, karena $T(\boldsymbol{x}_i)+\boldsymbol{b}=A(\boldsymbol{x}_i)$, maka didapat

$$A\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \boldsymbol{x}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A(\boldsymbol{x}_i).$$

Jadi terbukti bahwa jika $A : L \to M$ *affine*, maka

$$A\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \boldsymbol{x}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i A(\boldsymbol{x}_i).$$

Kemudian, jika berlaku (3.3), akan ditunjukkan maka A *affine*. Kontruksi $T(\boldsymbol{x})=A(\boldsymbol{x})-A(\boldsymbol{0})$. Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan real α, karena berlaku (3.3), maka

$$A(\alpha\boldsymbol{x})=A[\alpha\boldsymbol{x}-(1-\alpha)\boldsymbol{0}]=\alpha A(\boldsymbol{x})+(1-\alpha)A(\boldsymbol{0}).$$

Akibatnya

$$T(\alpha\boldsymbol{x})=A(\alpha\boldsymbol{x})-A(\boldsymbol{0})$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha A(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha)A(\boldsymbol{0}) - A(\boldsymbol{0}) \\
&= \alpha A(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{0}) - \alpha A(\boldsymbol{0}) - A(\boldsymbol{0}) \\
&= \alpha A(\boldsymbol{x}) - \alpha A(\boldsymbol{0}) \\
&= \alpha[A(\boldsymbol{x}) - A(\boldsymbol{0})] \\
&= \alpha T(\boldsymbol{x}).
\end{aligned}
$$

Selanjutnya, untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$, berlaku

$$
\begin{aligned}
T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= T\left[2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}\right)\right] \\
&= 2T\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}\right) \\
&= 2\left[A\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}\boldsymbol{y}\right) - A(\boldsymbol{0})\right] \\
&= 2\left\{\frac{1}{2}[A(\boldsymbol{x}) - A(\boldsymbol{0})] + \frac{1}{2}[A(\boldsymbol{y}) - A(\boldsymbol{0})]\right\} \\
&= [A(\boldsymbol{x}) - A(\boldsymbol{0})] + [A(\boldsymbol{y}) - A(\boldsymbol{0})] \\
&= T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}).
\end{aligned}
$$

Jadi didapat bahwa T linear, sehingga $A(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{0})$ adalah *affine*. ●

Perhatikan bahwa, jika T linear, maka berlaku $T(\boldsymbol{y}) - T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$. Akibatnya, dapat ditunjukkan bahwa jika T kontinu di titik asal, maka T kontinu di setiap titik $\boldsymbol{x} \in L$, dan berlaku juga sebaliknya.

Teorema 3.1.2.2

Misal $T : L \to M$ linear. T kontinu di titik asal jika dan hanya jika T kontinu di setiap titik $\boldsymbol{x} \in L$.

Bukti:

Jika T kontinu di titik asal, akan ditunjukkan T kontinu di setiap titik $\boldsymbol{x} \in L$. Perhatikan bahwa T kontinu di titik asal, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon, \boldsymbol{0}) > 0$, sedemikian sehingga jika $\boldsymbol{y}$ sebarang titik di A yang memenuhi kondisi $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{0}\| < \delta$, maka $\|T(\boldsymbol{y}) - T(\boldsymbol{0})\| < \varepsilon$. Kemudian, karena $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{0}\| = \|\boldsymbol{y}\|$ dan $\|T(\boldsymbol{y}) - T(\boldsymbol{0})\| = \|T(\boldsymbol{y})\|$, berlaku jika $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{0}\| = \|\boldsymbol{y}\| < \delta$, maka

$\|T(\boldsymbol{y}) - T(\mathbf{0})\| = \|T(\boldsymbol{y})\| < \varepsilon$. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan $\boldsymbol{x} \in L$. Perhatikan bahwa ada $\delta_1 = \delta$, sedemikian sehingga jika $\boldsymbol{y}$ sebarang titik di A yang memenuhi kondisi $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}\| < \delta_1 = \delta$, maka $\|T(\boldsymbol{y}) - T(\boldsymbol{x})\| = \|T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})\| < \varepsilon$. Jadi didapat bahwa T kontinu di setiap titik $\boldsymbol{x} \in L$.

Selanjutnya, jika T kontinu di setiap titik $\boldsymbol{x} \in L$, maka jelas bahwa T kontinu di titik asal. ●

Transformasi linear T dikatakan **terbatas**, jika untuk setiap $\boldsymbol{x} \in L$, terdapat $m \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga $\|T(\boldsymbol{x})\| \le m\|\boldsymbol{x}\|, m \ge 0$. Dengan demikian, jika$\|\boldsymbol{x}\| \le 1$, maka berlaku $\|T(\boldsymbol{x})\| \le m$. Teorema dibawah ini akan menjelaskan bahwa jika T kontinu, maka T terbatas dan berlaku juga sebaliknya.

Teorema 3.1.2.3

Misal $T : L \to M$ transformasi linear dari suatu ruang linear bernorm ke ruang linear bernorm lainnya. T kontinu jika dan hanya jika T terbatas.

Bukti:

Pertama, jika T kontinu, akan ditunjukkan T terbatas. Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in L$. Perhatikan bahwa T kontinu pada L, sehingga T kontinu di setiap titik $\boldsymbol{x} \in L$. Akibatnya, T kontinu di titik asal, sehingga selalu dapat ditemukan $\delta > 0$, sehingga $\|T(\boldsymbol{x})\| < \varepsilon$, jika $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$. Misalkan $\|\boldsymbol{x}\| \le 1$, maka

$$\left\|\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{x}\right\| = \frac{1}{2}\delta\|\boldsymbol{x}\| < \delta.$$

Akibatnya, didapat bahwa

$$\left\|T\left(\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{x}\right)\right\| < \varepsilon.$$

Perhatikan bahwa $T\left(\frac{1}{2}\delta\boldsymbol{x}\right) = \frac{1}{2}\delta T(\boldsymbol{x})$ dan $T(\boldsymbol{x}) = T\left(\frac{2}{\delta}\frac{\delta}{2}\boldsymbol{x}\right) = \frac{2}{\delta}T\left(\frac{\delta}{2}\boldsymbol{x}\right)$, akibatnya didapat bahwa

$$\|T(\boldsymbol{x})\| = \left\|\frac{2}{\delta}T\left(\frac{\delta}{2}\boldsymbol{x}\right)\right\| = \frac{2}{\delta}\left\|T\left(\frac{\delta}{2}\boldsymbol{x}\right)\right\| < \frac{2}{\delta}\varepsilon = M.$$

Jadi, T terbatas.

Kemudian, jika T terbatas, akan ditunjukkan T kontinu. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa T terbatas, sehingga $\|T(\boldsymbol{x})\| \leq m$, untuk $\|\boldsymbol{x}\| \leq 1$. Pilih $\delta > 0$ sedemikian sehingga $\delta M < \varepsilon$. Jika $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$, maka $\left\|\frac{1}{\delta}\boldsymbol{x}\right\| = \frac{1}{\delta}\|\boldsymbol{x}\| < 1$ sehingga berlaku $\left\|T\left(\frac{1}{\delta}\boldsymbol{x}\right)\right\| \leq m$. Oleh karena itu, untuk $\|\boldsymbol{x}\| < \delta$, berlaku

$$\|T(\boldsymbol{x})\| = \left\|\delta T\left(\frac{1}{\delta}\boldsymbol{x}\right)\right\| = \delta\left\|T\left(\frac{1}{\delta}\boldsymbol{x}\right)\right\| \leq \delta m < \varepsilon.$$

Dengan demikian untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta < \frac{\varepsilon}{m}$, sedemikian sehingga, jika $\boldsymbol{x}$ sebarang titik di A yang memenuhi kondisi $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{0}\| = \|\boldsymbol{x}\| < \delta$, maka

$$\|T(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{0})\| = \|T(\boldsymbol{x})\| < \varepsilon.$$

Jadi T kontinu di titik asal, sehingga T kontinu pada L. ●

Sebuah transformasi linear mungkin tidak kontinu, terutama secara lebih spesifik untuk ruang linear berdimensi tak hingga. Teorema di bawah ini menjelaskan bahwa transformasi linear tidak kontinu harus terdefinisi pada ruang linear berdimensi tak hinga.

Teorema 3.1.2.4

Misal $T : L \to M$ transformasi linear dari suatu ruang linear bernorm ke ruang linear bernorm lainnya. Jika L berdimensi hingga, maka T kontinu.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.1.1.7, karena L ruang linear bernorm berdimensi hingga, misalkan n, maka L isomorfis secara topologi dengan $\mathbb{R}^n$, sehingga dapat dikatakan $L = \mathbb{R}^n$. Perhatikan bahwa $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ adalah basis standar untuk $\mathbb{R}^n$, sehingga untuk setiap $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ dapat dibuat kombinasi linear

$$\boldsymbol{x} = k_1\boldsymbol{e}_1 + k_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + k_n\boldsymbol{e}_n = \sum_{i=1}^{n} k_i\boldsymbol{e}_i.$$

Misalkan $\|\boldsymbol{x}\| \leq 1$ dan

$$m = \max_{i=1,\cdots,n} \|T(\boldsymbol{e}_i)\|,$$

maka

$$\|T(\boldsymbol{x})\| = \left\|T\left(\sum_{i=1}^{n} k_i \boldsymbol{e}_i\right)\right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|k_i T(\boldsymbol{e}_i)\| = \sum_{i=1}^{n} |k_i| \, \|T(\boldsymbol{e}_i)\| \leq m \sum_{i=1}^{n} |k_i|.$$

Perhatikan bahwa $k_i = \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i \rangle$ dan $\|\boldsymbol{e}_i\| = 1$, sehingga berdasarkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz berlaku

$$|k_i| = |\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i \rangle| \leq \|\boldsymbol{x}\| \|\boldsymbol{e}_i\| \leq 1.$$

Akibatnya didapat bahwa

$$\|T(\boldsymbol{x})\| \leq m \sum_{i=1}^{n} |k_i| \leq mn.$$

Jadi T terbatas. Berdasarkan Teorema 3.1.2.3, maka T kontinu. ●

Misalkan $T : L \to \mathbb{R}$, $N \subseteq L$, T linear. Himpunan N yang didefinisikan oleh

$$N = \{\boldsymbol{x} : T(\boldsymbol{x}) = 0\}$$

adalah **ruang nol** dari T. N adalah subruang dari L karena:

a) ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in N$, jelas bahwa $T(\boldsymbol{x}) = 0$ dan $T(\boldsymbol{y}) = 0$, sehingga $T(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = T(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{y}) = 0 + 0 = 0$, maka $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in N$; dan
b) ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in N, \alpha \in \mathbb{R}$, jelas bahwa $T(\boldsymbol{x}) = 0$, sehingga $T(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x}) = \alpha 0 = 0$, maka $\alpha\boldsymbol{x} \in N$.

Jika T nontrivial fungsional linear, maka N adalah **subruang maksimal *proper*** dari L. Artinya, jika K sebarang subruang dari L sedemikian sehingga $N \subset K \subseteq L$, maka berlaku $N = K$ atau $K = L$.

Teorema 3.1.2.5

N adalah subruang maksimal *proper* dari L jika dan hanya jika N ruang nol dari nontrivial fungsional linear. Subruang maksimal *proper* tertutup jika dan hanya jika T kontinu.

Bukti:

Pertama, jika N adalah subruang maksimal *proper* dari L, akan ditunjukkan N ruang nol dari nontrivial fungsional linear. Perhatikan bahwa N adalah subruang maksimal *proper* dari L, maka ada subruang K sedemikian sehingga $K = L$. Karena N subruang maksimal, maka ada $\boldsymbol{x} \notin N$, tetapi $\boldsymbol{x} \in L$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\boldsymbol{y} \in L$ dapat dibentuk menjadi kombinasi linear

$$\boldsymbol{y} = r\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \in N, r \in \mathbb{R},$$

dimana $T : L \to \mathbb{R}$ dan berlaku

$$T(r\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) = r.$$

Ambil sebarang $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in L$, maka $\boldsymbol{a}$ dan $\boldsymbol{b}$ dapat dibentuk menjadi kombinasi linear

$$\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{b} = \beta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}.$$

Akibatnya

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= T(\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} + \beta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) \\ &= T\big((\alpha + \beta)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}\big) \\ &= \alpha + \beta \\ &= T(\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) + T(\beta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) \\ &= T(\boldsymbol{a}) + T(\boldsymbol{b}) \end{aligned}$$

Selanjutnya, ambil sebarang $\boldsymbol{a} \in L$ dan $k \in \mathbb{R}$, maka $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$. Akibatnya

$$\begin{aligned} T(k\boldsymbol{a}) &= T\big(k(\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z})\big) \\ &= T(k\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) \\ &= k\alpha \\ &= kT(\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) \\ &= kT(\boldsymbol{a}) \end{aligned}$$

Jadi T linear. Perhatikan bahwa $T(\boldsymbol{x}_0) = k, k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_0 \in L$. Misalkan $\boldsymbol{x} = \frac{\boldsymbol{x}_0}{k}, \boldsymbol{x} \in L$. Akibatnya $T(\boldsymbol{x}) = 1$. Kemudian, karena

$$\begin{aligned} r &= T(r\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) \\ &= T(r\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{z}) \\ &= rT(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{z}) \\ &= r + T(\boldsymbol{z}) \\ &= r + 0 \end{aligned}$$

maka $T(\boldsymbol{z}) = 0$. Akibatnya, N adalah ruang nol. Jadi terbukti bahwa jika N subruang maksimal *proper*, maka N ruang nol dari nontrivial fungsional linear.

Selanjutnya, jika T nontrivial fungsional linear dan N ruang nol, akan ditunjukkan bahwa N subruang maksimal *proper*. Misalkan ada K subruang yang memuat N, dimana $N \subset K \subseteq L$. Akibatnya, ada $\boldsymbol{x}_0 \in K$, sedemikian sehingga $T(\boldsymbol{x}_0) = k \neq 0$. Misal $\boldsymbol{x} = \frac{x_0}{k}$, maka $T(\boldsymbol{x}) = 1$. Perhatikan bahwa K subruang yang memuat N, maka setiap elemen dari K, katakanlah $\boldsymbol{a}$ dapat dibentuk menjadi $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{z} \in N, \alpha \in \mathbb{R}$. Pilih sebarang $\boldsymbol{b} \in L$ dan konstruksi

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - T(\boldsymbol{b})\boldsymbol{x},$$

maka,

$$\begin{aligned} T(\boldsymbol{r}) &= T(\boldsymbol{b} - T(\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}) \\ &= T(\boldsymbol{b}) - T(T(\boldsymbol{b})\boldsymbol{x}) \\ &= T(\boldsymbol{b}) - T(\boldsymbol{b})T(\boldsymbol{x}) \\ &= T(\boldsymbol{b}) - T(\boldsymbol{b}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dengan demikian $\boldsymbol{r} \in N$. Akibatnya, karena $\boldsymbol{b}$ dipilih sebarang dan dibentuk menjadi

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{b} - T(\boldsymbol{b})\boldsymbol{x},$$

maka, untuk setiap $\boldsymbol{b} \in L$, dapat dibentuk menjadi

$$\boldsymbol{b} = T(\boldsymbol{b})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \in N, T(\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}.$$

Jadi $\boldsymbol{b} \in K$, sehingga $K = L$ dan N adalah subruang maksimal *proper*.

Kemudian, jika T kontinu, akan ditunjukkan bahwa N tertutup. Perhatikan bahwa T kontinu pada L, maka untuk setiap barisan $(\boldsymbol{x}_n)$ pada N yang konvergen ke $\boldsymbol{x}$,

$$\lim_{n\to\infty} T(\boldsymbol{x}_n) = T(\boldsymbol{x}).$$

Perhatikan bahwa $T(\boldsymbol{x}) = 0$ dan N memuat semua titik limit, maka N tertutup.

Sebaliknya, jika N adalah ruang nol tertutup dari fungsional linear T, akan ditunjukkan bahwa T kontinu. Perhatikan bahwa telah ditunjukkan setiap $\boldsymbol{b} \in L$ dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}, \boldsymbol{r} \in N, \boldsymbol{x} \notin N,$$

dan $T(\boldsymbol{b}) = \alpha$. Selain itu, N tertutup, maka terdapat persekitaran-ε dari $\boldsymbol{x}$ yang bukan anggota N. Dengan demikian, untuk setiap $\boldsymbol{r} \in N, \|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}\| > \varepsilon$. Karena, $(-\boldsymbol{r}) \in N$, maka $\|-\boldsymbol{r} - \boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{r} + \boldsymbol{x}\| > \varepsilon$. Akibatnya, untuk setiap $\boldsymbol{b} \in L$,

$$\|\boldsymbol{b}\| = \|\alpha\boldsymbol{x} + \boldsymbol{r}\| = |\alpha| \left\|\boldsymbol{x} + \frac{1}{\alpha}\boldsymbol{r}\right\| \geq |\alpha|\varepsilon = \varepsilon|T(\boldsymbol{b})|.$$

Akibatnya didapat bahwa $|T(\boldsymbol{b})| \leq \frac{1}{\varepsilon}\|\boldsymbol{b}\|$. Jadi, T fungsional linear terbatas, sehingga T kontinu. ●

Misalkan $T : L \to M$ transformasi linear yang kontinu dari ruang linear bernorm L ke ruang linear bernorm M. $\mathcal{L}(L, M)$ adalah keluarga dari transformasi T tersebut. Jika didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar, sehingga untuk setiap $S, T \in \mathcal{L}(L, M)$ dan bilangan real α, berlaku

$$(S + T)(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x})$$

$$(\alpha T)(\boldsymbol{x}) = \alpha T(\boldsymbol{x})$$

maka dapat ditunjukkan bahwa $\mathcal{L}(L, M)$ ruang linear.

Ambil sebarang $S, T, U \in \mathcal{L}(L, M)$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa S, T, U transfomasi linear kontinu dari suatu ruang linear bernorm ke ruang linear bernorm lainnya, maka berdasarkan Teorema 3.1.2.3, S, T, U terbatas. Dengan demikian, jika $\|\boldsymbol{x}\| \leq 1$, maka $\|S(\boldsymbol{x})\| \leq k$, $\|T(\boldsymbol{x})\| \leq l$, $\|U(\boldsymbol{x})\| \leq m$.

a) Perhatikan bahwa $(S + T)$ transfomasi linear karena untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ dan $r, s \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{aligned}(S + T)(r\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y}) &= S(r\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y}) + T(r\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y}) \\ &= rS(\boldsymbol{x}) + sS(\boldsymbol{y}) + rT(\boldsymbol{x}) + sT(\boldsymbol{y}) \\ &= rS(\boldsymbol{x}) + rT(\boldsymbol{x}) + sS(\boldsymbol{y}) + sT(\boldsymbol{y}) \\ &= r\big(S(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x})\big) + s\big(S(\boldsymbol{y}) + T(\boldsymbol{y})\big) \\ &= r\big((S + T)(\boldsymbol{x})\big) + s\big((S + T)(\boldsymbol{y})\big)\end{aligned}$$

Selain itu, berlaku

$$\|(S + T)(\boldsymbol{x})\| = \|S(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x})\| \leq \|S(\boldsymbol{x})\| + \|T(\boldsymbol{x})\| \leq k + l = n,$$

maka $(S + T)$ terbatas. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.1.2.3, $(S + T)$ kontinu. Jadi $(S + T) \in \mathcal{L}(L, M)$.

b) Perhatikan bahwa

$$(S + T)(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{x}) + T(\boldsymbol{x}) = T(\boldsymbol{x}) + S(\boldsymbol{x}) = (T + S)(\boldsymbol{x}),$$

maka $S + T = T + S$.

c) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\big(S+(T+U)\big)(\boldsymbol{x}) &= S(\boldsymbol{x})+(T+U)(\boldsymbol{x})\\ &= S(\boldsymbol{x})+T(\boldsymbol{x})+U(\boldsymbol{x})\\ &= (S+T)(\boldsymbol{x})+U(\boldsymbol{x})\\ &= \big((S+T)+U\big)(\boldsymbol{x}),\end{aligned}$$

maka $S+(T+U)=(S+T)+U$.

d) Perhatikan bahwa ada transformasi O, dimana $O(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$. Akibatnya

$$(S+O)(\boldsymbol{x})=S(\boldsymbol{x})+O(\boldsymbol{x})=S(\boldsymbol{x})=O(\boldsymbol{x})+S(\boldsymbol{x})=(O+S)(\boldsymbol{x}).$$

Transformasi O adalah tranformasi linear karena $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L$ dan $r,s\in\mathbb{R}$, berlaku

$$O(r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=r\boldsymbol{0}+s\boldsymbol{0}=rO(\boldsymbol{x})+sO(\boldsymbol{y}).$$

Selain itu, transformasi linear O terbatas karena untuk $\|\boldsymbol{x}\|\le 1$, berlaku

$$\|O(\boldsymbol{x})\|=\|\boldsymbol{0}\|\le 0,$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.1.2.3, O kontinu, sehingga $O\in\mathcal{L}(L,M)$. Jadi terdapat $O\in\mathcal{L}(L,M)$, sehingga $(S+O)=S=(O+S)$

e) Perhatikan bahwa ada transformasi $(-S)$, dimana jika $S(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'$, $\boldsymbol{x}\in L,\boldsymbol{x}'\in M$, maka $(-S)(\boldsymbol{x})=-\boldsymbol{x}'$. Akibatnya

$$\big(S+(-S)\big)(\boldsymbol{x})=S(\boldsymbol{x})+(-S)(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}'+(-\boldsymbol{x})'=\boldsymbol{0}=O(\boldsymbol{x})$$

dan

$$\big((-S)+S\big)(\boldsymbol{x})=(-S)(\boldsymbol{x})+S(\boldsymbol{x})=(-\boldsymbol{x})'+\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}=O(\boldsymbol{x}).$$

Transformasi $(-S)$ adalah transformasi linear karena $\forall\,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in L$ dan $r,s\in\mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned}(-S)(r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{y}) &= -(r\boldsymbol{x}+s\boldsymbol{y})'\\ &= -r\boldsymbol{x}'+(-s\boldsymbol{y})'\\ &= r(-\boldsymbol{x})'+s(-\boldsymbol{y})'\\ &= r\big((-S)(\boldsymbol{x})\big)+s\big((-S)(\boldsymbol{y})\big).\end{aligned}$$

Selain itu, transformasi $(-S)$ terbatas karena untuk $\|\boldsymbol{x}\|\le 1$, berlaku

$$\|(-S)(\boldsymbol{x})\|=\|-\boldsymbol{x}\|=|-1|\|\boldsymbol{x}\|=1\|\boldsymbol{x}\|=\|S(\boldsymbol{x})\|\le k.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.1.2.3, $(-S)$ kontinu sehingga $(-S) \in \mathcal{L}(L, M)$. Jadi terdapat $(-S) \in \mathcal{L}(L, M)$, sehingga $(-S) + S = O = S + (-S)$.

f) Perhatikan bahwa (αS) transformasi linear karena untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ dan $r, s \in \mathbb{R}$ berlaku

$$\begin{aligned}(\alpha S)(r\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y}) &= \alpha S(r\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{y}) \\ &= \alpha\big(rS(\boldsymbol{x}) + sS(\boldsymbol{y})\big) \\ &= \alpha rS(\boldsymbol{x}) + \alpha sS(\boldsymbol{y}) \\ &= r\alpha S(\boldsymbol{x}) + s\alpha S(\boldsymbol{y}) \\ &= r\big(\alpha S(\boldsymbol{x})\big) + s\big(\alpha S(\boldsymbol{y})\big) \\ &= r\big((\alpha S)(\boldsymbol{x})\big) + s\big((\alpha S)(\boldsymbol{y})\big).\end{aligned}$$

Selain itu, berlaku

$$\|(\alpha S)(\boldsymbol{x})\| = \|\alpha S(\boldsymbol{x})\| = |\alpha|\|S(\boldsymbol{x})\| \leq |\alpha|k,$$

maka (αS) terbatas. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.1.2.3, (αS) kontinu. Jadi $(\alpha S) \in \mathcal{L}(L, M)$.

g) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\big(\alpha(S + T)\big)(\boldsymbol{x}) &= \alpha(S + T)(\boldsymbol{x}) \\ &= \alpha\big(S(\boldsymbol{x})\big) + T(\boldsymbol{x}) \\ &= \alpha S(\boldsymbol{x}) + \alpha T(\boldsymbol{x}) \\ &= (\alpha S)(\boldsymbol{x}) + (\alpha T)(\boldsymbol{x}) \\ &= (\alpha S + \alpha T)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

Jadi $\alpha(S + T) = \alpha S + \alpha T$.

h) Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\big((\alpha + \beta)S\big)(\boldsymbol{x}) &= (\alpha + \beta)S(\boldsymbol{x}) \\ &= \alpha S(\boldsymbol{x}) + \beta S(\boldsymbol{x}) \\ &= (\alpha S)(\boldsymbol{x}) + (\beta S)(\boldsymbol{x}) \\ &= (\alpha S + \beta S)(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

Jadi $(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$.

i) Perhatikan bahwa

$$\big(\alpha(\beta S)\big)(\boldsymbol{x}) = \alpha\big((\beta S)(\boldsymbol{x})\big) = \alpha\big(\beta S(\boldsymbol{x})\big) = \alpha\beta S(\boldsymbol{x}) = \big((\alpha\beta)S\big)(\boldsymbol{x})$$

Jadi $\alpha(\beta S) = (\alpha\beta)S$.

j) Perhatikan bahwa

$$(1S)(\boldsymbol{x}) = 1S(\boldsymbol{x}) = S(\boldsymbol{x})$$

Jadi $1S = S$.

Perhatikan bahwa $S, T, U \in \mathcal{L}(L, M)$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ diambil sebarang, maka untuk setiap $S, T, U \in \mathcal{L}(L, M)$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, berlaku a) sampai j), sehingga $\mathcal{L}(L, M)$ adalah ruang linear.

Sebelumnya telah dijelaskan bahwa $\mathcal{L}(L, M)$ adalah keluarga transformasi linear yang kontinu dari ruang linear bernorm L ke ruang linear bernorm M. Akibatnya, berdasarkan Teorema 3.1.2.3, maka $\mathcal{L}(L, M)$ adalah keluarga transformasi linear yang terbatas. Perhatikan bahwa $T \in \mathcal{L}(L, M)$ terbatas, sehingga berlaku $\|T(\boldsymbol{x})\| \leq M$, untuk $\|\boldsymbol{x}\| \leq 1$. Dengan demikian, $\|T(\boldsymbol{x})\|$ mempunyai batas atas. Berdasarkan fakta tersebut, dapat ditunjukkan bahwa

$$\|.\| : \mathcal{L}(L, M) \to \mathbb{R}$$

dimana

(3.4) $$\|T\| = \sup\{\|T(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\}.$$

adalah norm dari $T \in \mathcal{L}(L, M)$.

Ambil sebarang $T, S \in \mathcal{L}(L, M)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, dan definisikan (3.4). Titik $\boldsymbol{x} \in L$ diambil sebarang dan tetap.

a) Perhatikan bahwa $\|T(\boldsymbol{x})\|$ norm pada M, sehingga $\|T(\boldsymbol{x})\| \geq 0$. Dengan demikian $\|T\| = \sup\{\|T(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} \geq 0$.

b) Jika $\|T\| = 0$, akan ditunjukkan $T = O$, dimana $O : L \to M, O(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in L$. Perhatikan bahwa $\|T\| = 0$, maka $\sup\{\|T(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} = 0$. Dengan demikian, karena nilai $\|T(\boldsymbol{x})\| \geq 0$, maka nilai $\|T(\boldsymbol{x})\|$ yang mungkin adalah $\|T(\boldsymbol{x})\| = 0$. Perhatikan bahwa $\|T(\boldsymbol{x})\|$ adalah norm pada M, sehingga jika $\|T(\boldsymbol{x})\| = 0$, maka berlaku $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in L$. Jadi $T = O$.

Sebaliknya, jika $T = O$ akan ditunjukkan $\|T\| = 0$. Perhatikan bahwa $O(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, maka $T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, sehingga $\|T(\boldsymbol{x})\| = 0$. Akibatnya

$$\|T\| = \sup\{\|T(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} = \sup\{0\} = 0$$

c) Perhatikan bahwa $\|T(\boldsymbol{x})\|$ pada M, sehingga $\|\alpha T(\boldsymbol{x})\| = |\alpha|\|T(\boldsymbol{x})\|$. Akibatnya

$$\begin{aligned}\|\alpha T\| &= \sup\{\|\alpha T(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\alpha|\|T(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} \\ &= |\alpha|\sup\{\|T(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} \\ &= |\alpha|\|T\|\end{aligned}$$

d) Perhatikan bahwa $\|T(\boldsymbol{x})\|$ pada M, sehingga

$$\|T(\boldsymbol{x}) + S(\boldsymbol{x})\| \leq \|T(\boldsymbol{x})\| + \|+S(\boldsymbol{x})\|.$$

Akibatnya

$$\begin{aligned}\|T + S\| &= \sup\{\|(T + S)(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T(\boldsymbol{x}) + S(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|T(\boldsymbol{x})\| + \|S(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|T(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} + \sup\{\|S(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \leq 1\} \\ &= \|T\| + \|S\|\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $T, S \in \mathcal{L}(L, M)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$ diambil sebarang. Jadi untuk setiap $T, S \in \mathcal{L}(L, M)$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku a) sampai d), sehingga (3.4) adalah norm pada $\mathcal{L}(L, M)$. Sebelumnya $T \in \mathcal{L}(L, M)$, terbatas sehingga berlaku $\|T(\boldsymbol{x})\| \leq c\|\boldsymbol{x}\|$, dan karena $\|\boldsymbol{x}\| \leq 1$, maka $\|T(\boldsymbol{x})\| \leq c$. Dengan demikian, c adalah batas atas dari $\|T(\boldsymbol{x})\|$. Perhatikan bahwa (3.4) berlaku, maka $\|T\|$ adalah nilai terkecil dari c yang memenuhi $\|T(\boldsymbol{x})\| \leq c$. Kemudian, dengan memilih $\|T\| = c$, maka didapat bahwa

$$\|T(\boldsymbol{x})\| \leq c\|\boldsymbol{x}\| = \|T\|\|\boldsymbol{x}\|.$$

Teorema 3.1.2.6

Keluarga $\mathcal{L}(L, M)$ adalah ruang linear bernorm dengan norm (3.4). Jika M adalah ruang Banach, maka $\mathcal{L}(L, M)$ adalah ruang Banach.

Bukti:

Ambil sebarang (T_n) barisan Cauchy di $\mathcal{L}(L, M)$. Dengan demikian, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli $K \in \mathbb{N}$, sedemikian sehingga untuk setiap $n, m \geq K$

mengakibatkan $\|T_n - T_{\boldsymbol{m}}\| < \varepsilon_1$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\boldsymbol{x} \in L$, $\big(T_n(\boldsymbol{x})\big)$ adalah barisan di M. Perhatikan juga bahwa

$$\|T_n(\boldsymbol{x}) - T_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{x})\| = \|(T_n - T_{\boldsymbol{m}})(\boldsymbol{x})\| \le \|T_n - T_{\boldsymbol{m}}\|\|\boldsymbol{x}\| < \varepsilon_1\|\boldsymbol{x}\| < \varepsilon.$$

Dengan demikian, didapat bahwa $\big(T_n(\boldsymbol{x})\big)$ adalah barisan Cauchy di M. Sebelumnya diketahui bahwa M ruang Banach, sehingga $\big(T_n(\boldsymbol{x})\big)$ konvergen ke elemen M, katakanlah $T(\boldsymbol{x})$. Oleh karena itu, dapat didefinisikan bahwa

$$T(\boldsymbol{x}) = \lim_{n\to\infty} T_n(\boldsymbol{x}).$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ dan bilangan real α, β, maka $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in L$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned} T(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \big(T_n(\alpha\boldsymbol{x}) + T_n(\beta\boldsymbol{y})\big) \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha\boldsymbol{x}) + \lim_{n\to\infty} T_n(\beta\boldsymbol{y}) \\ &= \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(\boldsymbol{x}) + \lim_{n\to\infty} \beta T_n(\boldsymbol{y}) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(\boldsymbol{x}) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(\boldsymbol{y}) \\ &= \alpha T(\boldsymbol{x}) + \beta T(\boldsymbol{y}). \end{aligned}$$

Dengan demikian T linear. Sebelumnya diketahui bahwa (T_n) barisan Cauchy, maka berdasarkan Lemma 2.2.1.9, (T_n) terbatas, sehingga ada $m > 0$ sedemikian sehingga $\|T_n\| \le m$. Perhatikan bahwa untuk setiap $\boldsymbol{x} \in L$, berlaku

$$\|T(\boldsymbol{x})\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_n(\boldsymbol{x})\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n(\boldsymbol{x})\| \le \lim_{n\to\infty} \|T_n\|\|\boldsymbol{x}\| \le \lim_{n\to\infty} m\|\boldsymbol{x}\| \le m\|\boldsymbol{x}\|.$$

Dengan demikian T terbatas. Akibatnya, karena T terbatas dan T linear, maka berdasarkan Teorema 3.1.2.3, T kontinu. Perhatikan bahwa T linear dan T kontinu, maka $T \in \mathcal{L}(L, M)$. Terakhir akan ditunjukkan bahwa (T_n) konvergen ke T. Perhatikan bahwa

$$\|T_n - T\| = \sup\{\|(T_n - T)(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \le 1\}.$$

Sebelumnya diketahui bahwa $\big(T_n(\boldsymbol{x})\big)$ konvergen ke $\big(T(\boldsymbol{x})\big)$, maka berlaku

$$\|(T_n - T)(\boldsymbol{x})\| = \|T_n(\boldsymbol{x}) - T(\boldsymbol{x})\| < \varepsilon.$$

Dengan demikian

$$\|T_n - T\| = \sup\{\|(T_n - T)(\boldsymbol{x})\| : \|\boldsymbol{x}\| \le 1\} < \sup\{\varepsilon\} = \varepsilon.$$

Jadi didapat bahwa $\|T_n - T\| < \varepsilon$, sehingga (T_n) konvergen ke T. ●

3.1.3 Turunan Fungsi pada Ruang Linear Bernorm

Pada bagian 2.2.4 telah dijelaskan turunan fungsi dengan daerah hasil dan daerah asal pada ruang $\mathbb{R}$. Fungsi tersebut mempunyai turunan pada c apabila nilai limit yang mendekati c dari arah kiri dan arah kanan ada dan bernilai sama. Jika mengambil permisalan $t = x - c$, maka dapat dikatakan bahwa, nilai limit yang terdefinisi pada Definisi 2.2.3.1 dapat diubah menjadi

$$f'(c) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{f(c+t) - f(c)}{t}\right].$$

Nilai limit diatas ada jika nilai limit t yang didekati dari kanan dan dari kiri ada dan bernilai sama. Jadi dapat ditulis bahwa $f^{'}(c) = f'_{+}(c) = f'_{-}(c)$.

Apabila fungsi f terdefinisi pada persekitaran titik $\boldsymbol{x}_0 \in L$, akan terdapat banyak sekali arah untuk mendekati titik $\boldsymbol{x}_0 \in L$. Salah satu caranya adalah membuat arah dari $\boldsymbol{v}$ sehingga

$$f'(\boldsymbol{x}_0; \boldsymbol{v}) = \lim_{t\to 0}\left[\frac{f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{t}\right].$$

Notasi diatas dinamakan **turunan berarah** dari f di $\boldsymbol{x}_0$ pada arah $\boldsymbol{v}$. Pada arah $\boldsymbol{v}$ terdapat dua kemungkinan arah t menuju nol, yang disebut **turunan berarah satu sisi** kanan$f_{+}^{'}(\boldsymbol{x}_0\,; \boldsymbol{v})$ dan kiri $f_{-}^{'}(\boldsymbol{x}_0\,; \boldsymbol{v})$. Nilai $f^{'}(\boldsymbol{x}_0\,; \boldsymbol{v})$ terdefinisi jika

$$f_{+}^{'}(\boldsymbol{x}_0\,; \boldsymbol{v}) = f_{-}^{'}(\boldsymbol{x}_0\,; \boldsymbol{v})$$

Pada kasus fungsi $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ dan $\boldsymbol{u}$ sebarang titik pada $\mathbb{R}^n$. Vektor L_u pada $\mathbb{R}^m$ dikatakan sebagai turunan berarah dari f di $\boldsymbol{c}$ pada arah $\boldsymbol{u}$, jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon)$, sedemikian sehingga, jika $|t| < \delta(\varepsilon)$, maka

$$\left\|\frac{1}{t}[f(\boldsymbol{c} + t\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{c})] - L_u\right\| < \varepsilon.$$

Jika $\boldsymbol{u}$ merupakan basis standar vektor $\mathbb{R}^n$, maka korespondensi $\boldsymbol{e}_i$ dengan turunan berarah dinamakan **turunan parsial ke-$\boldsymbol{i}$**, yang didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_i}(\boldsymbol{x}_0) = f_i(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{x}_0\,;\, \boldsymbol{e}_i)$$

Misalkan fungsi f yang terdefinisi pada himpunan buka U subset dari ruang linear bernorm L dengan daerah hasil di ruang linear bernorm M. Fungsi f **terdiferensial** pada $\boldsymbol{x}_0 \in U$ jika terdapat transformasi linear $T : L \rightarrow M$ sedemikian sehingga untuk nilai $\boldsymbol{h} \in L$ yang sangat kecil, berlaku

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + T(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{h})$$

dimana $\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{h}) \in M$ dan nilai $\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{h}) \rightarrow 0$ ketika $\|\boldsymbol{h}\| \rightarrow 0$. Transformasi linear T dinamakan **turunan** dari f dan dinotasikan sebagai $f'(\boldsymbol{x}_0)$.

Sebagai gambaran digunakan ruang linear bernorm $\mathbb{R}^n = L$ dan $\mathbb{R}^m = M$. Kemudian, dengan menggunakan basis standar dari kedua ruang tersebut, terdapat transfomasi linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tunggal dengan $[T]$ didefinisikan sebagai matriks $m \times n$. Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dimana untuk $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ didefinisikan oleh $T(r, s) = a_1 r + a_2 s$. Bentuk $T(r, s)$ didapat dari matriks $[T] = [a_1 \quad a_2]$, dimana

$$T(r, s) = a_1 r + a_2 s = [a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}.$$

Sekarang misalkan $w = f(r, s)$ fungsi dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}$ yang memiliki turunan sesuai deskripsi diatas. Dengan demikian, untuk $\boldsymbol{x}_0 = (r_0, s_0)$, $f'(\boldsymbol{x}_0)$ dapat direpresentasikan sebagai matriks $[a_1 \quad a_2]$. Selanjutnya, pilih $\boldsymbol{h} = t\boldsymbol{e}_1 = (t, 0)$, bentuk

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + T(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{h})$$
$$\Leftrightarrow f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{h})$$

akan menjadi

$$f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{x}_0) = [a_1 \quad a_2]\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} + |t|\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, t\boldsymbol{e}_1)$$
$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{x}_0) = a_1 t + |t|\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, t\boldsymbol{e}_1)$$
$$\Rightarrow \lim_{t \to 0}[f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{x}_0)] = \lim_{t \to 0}[a_1 t + |t|\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, t\boldsymbol{e}_1)]$$

Perhatikan bahwa ketika $|t| \rightarrow 0$, nilai $\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, t\boldsymbol{e}_1) \rightarrow 0$, sehingga

$$\lim_{t \to 0}[f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{e}_1) - f(\boldsymbol{x}_0)] = \lim_{t \to 0}[a_1 t]$$
$$\Rightarrow \lim_{t \to 0}\left[\frac{f(\boldsymbol{r}_0 + t, \boldsymbol{s}_0) - f(\boldsymbol{r}_{0,}\boldsymbol{s}_0)}{t}\right] = \lim_{t \to 0}\left[\frac{a_1 t}{t}\right]$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0}\left[\frac{f(\boldsymbol{r}_0+t,\boldsymbol{s}_0)-f(\boldsymbol{r}_{0,}\boldsymbol{s}_0)}{t}\right]=a_1$$

$$\Rightarrow \left\{\lim_{t\to 0}\left[\frac{f(\boldsymbol{r}_0+t,\boldsymbol{s}_0)-f(\boldsymbol{r}_{0,}\boldsymbol{s}_0)}{t}\right]\right\}-a_1=0.$$

Akibatnya $a_1=\frac{\partial f}{\partial r}(\boldsymbol{r}_{0,}\boldsymbol{s}_0)$. Kemudian dengan argumen yang sama dengan menggunakan $\boldsymbol{h}=t\boldsymbol{e}_2$, berlaku juga bahwa $a_2=\frac{\partial f}{\partial s}(\boldsymbol{r}_{0,}\boldsymbol{s}_0)$. Dengan demikian, didapat bahwa $[f'(\boldsymbol{x}_0)]=\left[\frac{\partial f}{\partial r}(\boldsymbol{x}_0)\quad \frac{\partial f}{\partial s}(\boldsymbol{x}_0)\right]$.

Metode diatas merupakan ilustrasi untuk mencari matriks $[f'(\boldsymbol{x}_0)]$ ketika daerah asal fungsi f pada $\mathbb{R}^n$ dan daerah hasil pada $\mathbb{R}^m$. Transformasinya ditentukan oleh himpunan dari koordinat fungsi

$$f:\quad \begin{aligned} y_1 &= f^1(x_1,\cdots,x_n)\\ &\vdots\\ y_m &= f^m(x_1,\cdots,x_n)\end{aligned}$$

Pada kasus fungsi $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^n$, fungsi f terdiferensial di $\boldsymbol{c}$ jika ada fungsi linear $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, dan untuk setiap $\varepsilon>0$, terdapat $\delta(\varepsilon)$, sedemikian sehingga jika $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ dan $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|<\delta(\varepsilon)$, maka

$$\|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{c})-L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\|\le\varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|.$$

Fungsi linear L dinamakan turunan dari f di $\boldsymbol{c}$, dan dinotasikan sebagai

$$L=f'(\boldsymbol{c}).$$

Teorema 3.1.3.1

Jika $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ terdiferensial di $\boldsymbol{x}$, maka turunan parsial dari semua fungsi koordinat ada dan

$$[f'(\boldsymbol{x})]=\begin{bmatrix}\frac{\partial f^1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x})\end{bmatrix}.$$

Bukti :

Berdasarkan definisi turunan, maka terdapat transfomasi linear T yang direpresentasikan oleh matriks $[a_{ij}]$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$, sedemikian sehingga untuk $\boldsymbol{h} = t\boldsymbol{e}_j$, berlaku

$$\begin{bmatrix} f^1(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_j) \\ f^2(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_j) \\ \vdots \\ f^m(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_j) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f^1(\boldsymbol{x}) \\ f^2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f^m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ t \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + |t| \begin{bmatrix} \varepsilon^1(\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{e}_j) \\ \varepsilon^2(\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{e}_j) \\ \vdots \\ \varepsilon^m(\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{e}_j) \end{bmatrix}$$

Matriks dikatakan sama jika dan hanya jika setiap entrinya sama, sehingga untuk setiap $i = 1, \cdots, m$, berlaku

$$f^i(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{e}_j) - f^i(\boldsymbol{x}) = ta_{ij} + |t|\varepsilon^i(\boldsymbol{x}, t\boldsymbol{e}_j)$$

Perhatikan bahwa $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, dengan argumen yang sama seperti kasus sebelumnya, didapat bahwa

$$\lim_{t \to 0} \frac{f^i(x_1, \cdots, x_j + t_j, \cdots, x_n) - f^i(x_1, \cdots, x_n)}{t} = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) = a_{ij}\,.$$

Jadi benar bahwa turunan parsial dari semua koordinat fungsi ada dan

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x_1}(\boldsymbol{x}) & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x_n}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad \bullet$$

Jika $U \subseteq L$ dan $f : U \to M$ terdiferensial sepanjang U, maka f' adalah pemetaan dari U ke transformasi linear $T : L \to M$. Akibatnya, jika fungsi f terdiferensial pada suatu titik, maka akan berlaku hubungan dua arah f kontinu dan f' kontinu pada pada titik tersebut.

Teorema 3.1.3.2

Misalkan $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Jika f terdiferensial di $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, maka f kontinu di $\boldsymbol{c}$ jika dan hanya jika f' kontinu di $\boldsymbol{c}$.

Bukti:

Pertama, jika f' kontinu di $\boldsymbol{c}$, akan ditunjukkan bahwa f kontinu di $\boldsymbol{c}$. Perhatikan bahwa f terdiferensial di $\boldsymbol{c}$. Akibatnya ada fungsi linear $L:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sedemikian sehingga $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon)$, sedemikian sehingga

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\| \leq \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|$$

ketika $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\| < \delta(\varepsilon)$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Berdasarkan ketaksamaan segitiga, didapat bahwa

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c})\| - \|L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\| \leq \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c}) - L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\|.$$

Dengan demikian, berlaku bahwa

$$\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c})\| - \|L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\| \leq \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|$$
$$\Rightarrow \|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c})\| \leq \|L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\| + \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|$$

Perhatikan bahwa L fungsi linear dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^m$, sehingga berdasarkan Teorema 2.3.3.4, akan terdapat konstanta positif A, sedemikian sehingga untuk $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$, berlaku bahwa

$$\|L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\| \leq A\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|.$$

Dengan demikian didapat bahwa

$$\begin{aligned}\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c})\| &\leq \|L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\| + \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\| \\ &\leq A\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\| + \varepsilon\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\| \\ &= (A+\varepsilon)\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\| \\ &< (A+\varepsilon)\delta(\varepsilon) \\ &= \varepsilon_1.\end{aligned}$$

Berarti, untuk setiap $\varepsilon_1 < 0$, terdapat $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon_1}{(A+\varepsilon)}$, sedemikian sehingga, jika $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\| < \delta(\varepsilon)$, berlaku $\|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{c})\| < \varepsilon_1$. Jadi f kontinu di $\boldsymbol{c}$.

Kedua, jika f kontinu di $\boldsymbol{c}$, akan ditunjukkan f' kontinu di $\boldsymbol{c}$. Perhatikan bahwa f terdiferensial di $\boldsymbol{c}$, maka dengan argumen yang sama, didapat bahwa

$$\|L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\| \leq A\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\|,$$

dengan L fungsi linear, $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ dan A konstanta positif. Selanjutnya, ambil sebarang $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$, sedemikian sehingga, jika $\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\| < \delta$, berlaku

$$\|L(\boldsymbol{x}) - L(\boldsymbol{c})\| = \|L(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c})\| \leq A\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}\| < A\delta = \varepsilon.$$

Perhatikan bahwa L merupakan turunan dari f di $\boldsymbol{c}$, maka berlaku bahwa f' kontinu pada $\boldsymbol{c}$. ●

Dalam kasus pemetaan dari bidang ke dirinya sendiri yang didefinisikan sebagai

(3.5) $$f : \begin{matrix} u = g(r,s) \\ v = h(r,s) \end{matrix}$$

turunan dari $f'(\boldsymbol{x})$ adalah transformasi linear yang direpresentasikan dengan matriks

$$[f'(\boldsymbol{x})] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial r}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial g}{\partial s}(\boldsymbol{x}) \\ \frac{\partial h}{\partial r}(\boldsymbol{x}) & \frac{\partial h}{\partial s}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan Teorema 3.1.3.1, jika turunan secara umum ada, maka begitu juga turunan parsial dari fungsi koordinatnya. Tetapi, apabila turunan parsial dari fungsi koordinatnya ada, belum tentu turunan secara umumnya ada. Berikut ini teorema yang menjelaskan apabila terdapat turunan parsial dari fungsi koordinatnya dan fungsinya kontinu, maka akan dijamin bahwa terdapat turunan secara umum.

Teorema 3.1.3.3

Jika $f : U \to \mathbb{R}^m$ didefinisikan sebagai koordinat fungsi kontinu yang memiliki turunan parsial setiap titik pada himpunan buka $U \subseteq \mathbb{R}^n$, maka $f'(\boldsymbol{x})$ ada untuk setiap $\boldsymbol{x} \in U$.

Bukti:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in U$. Pertama, akan diambil terlebih dahulu kasus ketika nilai $m = 1$, sehingga fungsi $f : U \to \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa f kontinu di $\boldsymbol{c}$ dan f'_i terdiferensial di $\boldsymbol{c}$, maka berdasarkan Teorema 3.1.3.2, f'_i kontinu di $\boldsymbol{c}$. Artinya, untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon)$, sedemikian sehingga jika $\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{c}\| < \delta(\varepsilon)$ dan $j = 1,2,\cdots,n$, maka

(3.6)
$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{y})-\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{c})\right\|<\varepsilon.$$

Misalkan $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$, dan $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_{n-1}$ dinotasikan sebagai titik

$$\boldsymbol{u}_1=(c_1,x_2,\cdots,x_n),\ \boldsymbol{u}_2=(c_1,c_2,x_3,\cdots,x_n),\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_{n-1}=(c_1,c_2,\cdots,c_{n-1},x_n).$$

Dengan demikian didapat bahwa $\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{u}_n=\boldsymbol{c}$. Jika $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{c}\|<\delta(\varepsilon)$, maka berlaku juga bahwa $\|\boldsymbol{u}_j-\boldsymbol{c}\|<\delta(\varepsilon)$ untuk $j=1,2,\cdots,n$. Kemudian selisih antara $f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{c})$ dinotasikan sebagai

$$f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{c})=\sum_{j=1}^{n}\left[f(\boldsymbol{u}_{j-1})-f(\boldsymbol{u}_j)\right].$$

Dengan mengaplikasikan Teorema 2.2.3.4 (Teorema Nilai Rata-Rata), didapat titik $\bar{\boldsymbol{u}}_j$ yang berada pada segmen garis $\boldsymbol{u}_{j-1}$ dan $\boldsymbol{u}_j$, sedemikian sehingga

$$f(\boldsymbol{u}_{j-1})-f(\boldsymbol{u}_j)=(x_j-c_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{\boldsymbol{u}}_j.$$

Dengan demikian, didapat bahwa

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{u})-f(\boldsymbol{c})-\sum_{j=1}^{n}(x_j-c_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\\
&=\sum_{j=1}^{n}\left[f(\boldsymbol{u}_{j-1})-f(\boldsymbol{u}_j)\right]-\sum_{j=1}^{n}(x_j-c_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\\
&=\sum_{j=1}^{n}(x_j-c_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{\boldsymbol{u}}_j-\sum_{j=1}^{n}(x_j-c_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\\
&=\sum_{j=1}^{n}(x_j-c_j)\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{\boldsymbol{u}}_j-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\right].
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa berlaku (3.6), sehingga bentuk

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{\boldsymbol{u}}_j-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\right]$$

secara umum didominasi oleh ε. Akibatnya, berdasarkan Teorema 2.1.1.4 dan 2.1.1.5, maka didapat hubungan bahwa

$$\left\|\sum_{j=1}^{n}(x_j - c_j)\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{\boldsymbol{u}}_j - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\right]\right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\left\|(x_j - c_j)\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{\boldsymbol{u}}_j - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\right]\right\|$$

$$= \sum_{j=1}^{n}|x_j - c_j|\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{\boldsymbol{u}}_j - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{c}\|\left(\sqrt{n}\sup\left\{\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{\boldsymbol{u}}_j - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\right\|\right\}\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n}\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{c}\|(\sqrt{n}\varepsilon)$$

$$\leq n\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{c}\|(\sqrt{n}\varepsilon)$$

$$= \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{c}\|(n\sqrt{n}\varepsilon).$$

Dengan demikian,

$$\left\|f(\boldsymbol{u}) - f(\boldsymbol{c}) - \sum_{j=1}^{n}(x_j - c_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\right\|$$

$$= \left\|\sum_{j=1}^{n}(x_j - c_j)\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}\bar{\boldsymbol{u}}_j - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{c})\right]\right\|$$

$$\leq \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{c}\|(n\sqrt{n}\varepsilon).$$

Jadi, didapat bahwa f terdiferensial di $\boldsymbol{c}$ dan turunannya adalah $Df(\boldsymbol{c})$ fungsi linear dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$ dengan nilai

$$Df(\boldsymbol{c})(\boldsymbol{z}) = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f}{\partial x_1}(\boldsymbol{c})$$

di titik $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ pada $\mathbb{R}^n$. Untuk nilai $m > 1$, digunakan argumen yang sama untuk fungsi bernilai real $f_i, i = 1,2, \cdots, m$ sehingga fungsi memiliki turunan pada $\mathbb{R}^n$. ●

Berdasarkan teorema 3.1.3.2, didapat bahwa jika f kontinu dan terdiferensial di $\boldsymbol{x}_0$, maka f' kontinu di $\boldsymbol{x}_0$, dimana f' adalah fungsi linear (transformasi linear). Kemudian, berdasarkan Teorema 3.1.2.3, maka f' fungsi linear terbatas. Dengan demikian, untuk setiap $\boldsymbol{h} \in L$, berlaku

$$\|f'(\boldsymbol{x}_0)\boldsymbol{h}\| \leq \|f'(\boldsymbol{x}_0)\|\|\boldsymbol{h}\|.$$

Selain itu, $f'(\boldsymbol{x}_0)$ merupakan anggota dari ruang linear bernorm $\mathcal{L}(L, M)$ dan kontinu dimana $f': U \to \mathcal{L}(L, M)$. Sifat fundamental dari diferensial akan dijelaskan dibawah ini, yang dinamakan **aturan rantai**.

Teorema 3.1.3.4 (Aturan Rantai)

Misalkan L, M dan N adalah ruang linear bernorm, dan misalkan U dan V adalah himpunan buka masing-masing pada L dan M. Misalkan $f : U \to M$ dan $g : V \to N$, keduanya kontinu dengan $f(U) \subseteq V$. Jika $\boldsymbol{y}_0 = f(\boldsymbol{x}_0)$ dan jika $f'(\boldsymbol{x}_0)$ dan $g'(\boldsymbol{y}_0)$ keduanya ada, maka $H = g \circ f$ terdiferensial di $\boldsymbol{x}_0$ dan

$$H'(\boldsymbol{x}_0) = g'(\boldsymbol{y}_0) \circ f'(\boldsymbol{x}_0).$$

Bukti:

Perhatikan bahwa $f'(\boldsymbol{x}_0)$ dan $g'(\boldsymbol{y}_0)$ ada, maka untuk nilai $\boldsymbol{h} \in U$ dan $\boldsymbol{k} \in V$, keduanya bernilai sangat kecil, maka berlaku

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h}),$$
$$g(\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{k}) = g(\boldsymbol{y}_0) + g'(\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{k}) + \|\boldsymbol{k}\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k}).$$

Dengan demikian,

$$H(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = g[f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})] = g[f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})].$$

Konstruksi $\boldsymbol{k} = f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})$, maka

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{k}\| &= \|f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\| \\ &\leq \|f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})\| + \big\|\|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big\| \\ &\leq \|f'(\boldsymbol{x}_0)\|\|\boldsymbol{h}\| + \|\boldsymbol{h}\|\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\| \\ &= \|\boldsymbol{h}\|[\|f'(\boldsymbol{x}_0)\| + \|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\|]\end{aligned}$$

Akibatnya, jika $\boldsymbol{h} \to \boldsymbol{0}$, maka $\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{0}$. Perhatikan bahwa

$$H(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})$$

$$= g[f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})]$$
$$= g[f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})]$$
$$= g(f(\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{k})$$
$$= g(\boldsymbol{y}_0 + \boldsymbol{k})$$
$$= g(\boldsymbol{y}_0) + g'(\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{k}) + \|\boldsymbol{k}\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})$$
$$= g(\boldsymbol{y}_0) + g'(\boldsymbol{y}_0)\big(f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big) + \|\boldsymbol{k}\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})$$
$$= g(\boldsymbol{y}_0) + g'(\boldsymbol{y}_0)\big(f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})\big) + g'(\boldsymbol{y}_0)\big(\|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big) + \|\boldsymbol{k}\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})$$
$$= g(\boldsymbol{y}_0) + [g'(\boldsymbol{y}_0) \circ f'(\boldsymbol{x}_0)](\boldsymbol{h}) + g'(\boldsymbol{y}_0)\big(\|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big) + \|\boldsymbol{k}\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})$$

Perhatikan juga bahwa

$$\|\boldsymbol{k}\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k}) \leq \|\boldsymbol{h}\|[\|f'(\boldsymbol{x}_0)\| + \|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\|]\varepsilon_2(\boldsymbol{k})$$
$$\leq \|\boldsymbol{h}\|[\|f'(\boldsymbol{x}_0)\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k}) + \|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})].$$

Dengan demikian,

$$g'(\boldsymbol{y}_0)\big(\|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big) + \|\boldsymbol{k}\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})$$
$$\leq g'(\boldsymbol{y}_0)\big(\|\boldsymbol{h}\|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big) + \|\boldsymbol{h}\|[\|f'(\boldsymbol{x}_0)\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k}) + \|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})]$$
$$= \|\boldsymbol{h}\|g'(\boldsymbol{y}_0)\big(\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big) + \|\boldsymbol{h}\|[\|f'(\boldsymbol{x}_0)\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k}) + \|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})]$$
$$= \|\boldsymbol{h}\|\big[g'(\boldsymbol{y}_0)\big(\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big) + \|f'(\boldsymbol{x}_0)\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k}) + \|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})\big]$$

dimana, $g'(\boldsymbol{y}_0)\big(\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big) + \|f'(\boldsymbol{x}_0)\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k}) + \|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k}) \in N$. Akibatnya

$$H(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h})$$
$$\leq g(\boldsymbol{y}_0) + [g'(\boldsymbol{y}_0) \circ f'(\boldsymbol{x}_0)](\boldsymbol{h})$$
$$+\|\boldsymbol{h}\|\big[g'(\boldsymbol{y}_0)\big(\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\big) + \|f'(\boldsymbol{x}_0)\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k}) + \|\varepsilon_1(\boldsymbol{h})\|\varepsilon_2(\boldsymbol{k})\big]$$

Perhatikan bahwa $g'(\boldsymbol{y}_0) \circ f'(\boldsymbol{x}_0)$ adalah transformasi linear, karena $g'(\boldsymbol{y}_0)$ dan $f'(\boldsymbol{x}_0)$ keduanya transformasi linear. Jadi H terdiferensial di $\boldsymbol{x}_0$ dan

$$H'(\boldsymbol{x}_0) = g'(\boldsymbol{y}_0) \circ f'(\boldsymbol{x}_0). \qquad \bullet$$

Apabila L, M dan N berdimensi hingga, maka $g'(\boldsymbol{y}_0)$ dan $f'(\boldsymbol{x}_0)$ keduanya dapat direpresentasikan oleh matriks. Aturan rantai dapat direpresentasikan juga oleh matriks $H'(\boldsymbol{x}_0)$, dimana $[H'(\boldsymbol{x}_0)] = [g'(\boldsymbol{y}_0)][f'(\boldsymbol{x}_0)]$.

Selanjutnya, akan dijelaskan juga tentang bentuk turunan kedua. Sebagai ilustrasi, akan digunakan contoh spesifik. Misalkan $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$f(r,s) = r^2 + 3rs + 5s^2.$$

Dengan demikian

$$[f'(r,s)] = [2r + 3s \quad 3r + 10s].$$

Selanjutnya, definisikan pemetaan f' dari vektor (r,s) ke vektor (u,v) yang memenuhi kondisi

$$f' : \begin{matrix} u = 2r + 3s \\ v = 3r + 10s \end{matrix}.$$

Bentuk diatas, sama seperti (3.5), sehingga untuk menemukan turunan dari f' adalah

$$[f''(r,s)] = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Turunan diatas dinamakan turunan kedua dari f.

Ilustrasi dari hasil diatas, diberikan oleh komputasi berikut.

$$f \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$f'(\boldsymbol{x}) \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \text{(linear)}$$

$$f' \; : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f''(\boldsymbol{x}) : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{(linear)}.$$

Perhatikan bahwa $f''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})$ adalah elemen dari $\mathbb{R}^2$. Jika elemen tersebut merupakan matriks yang ditentukan dari transformasi linear $[f''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})](\boldsymbol{k})$, maka mengakibatkan $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^2$. Bentuk $[f''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h})](\boldsymbol{k})$ linear untuk $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2)$ dan $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2)$. Berdasarkan hal tersebut, $f''(\boldsymbol{x})$ adalah transformasi bilinear dari $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}$. Bentuk diatas dapat dinotasikan juga sebagai $f''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$.

Selanjutnya akan dibahas fungsi yang sebelumnya terdefinisi pada $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dapat diganti menjadi fungsi yang terdefinisi pada $U \subseteq L$. Asumsikan bahwa fungsi f kontinu pada U dan memiliki turunan pada U, maka berdasarkan Teorema 3.1.1.2, f' kontinu pada U. Fungsi f yang kontinu dan terdiferensial, dinamakan sebagai fungsi **terdiferensial kontinu**. Sebelumnya diketahui bahwa

$$f' : U \to \mathcal{L}(L, M).$$

Jika fungsi f' terdiferensial di $\boldsymbol{x} \in U$, maka terdapat transformasi linear dari L ke $\mathcal{L}(L, M)$

$$f''(\boldsymbol{x}) : L \to \mathcal{L}(L, M).$$

Dengan demikian, $\big(f''(\boldsymbol{x})\big)(\boldsymbol{h}) \in \mathcal{L}(L, M)$ dan terdapat juga pemetaan $\big[\big(f''(\boldsymbol{x})\big)(\boldsymbol{h})\big](\boldsymbol{k})$ untuk $\boldsymbol{k} \in L$. Bentuk $\big[\big(f''(\boldsymbol{x})\big)(\boldsymbol{h})\big](\boldsymbol{k})$ adalah linear untuk $\boldsymbol{h}$ maupun $\boldsymbol{k}$. Dengan demikian $f''(\boldsymbol{x})$ adalah transformasi bilinear dari $L \times L$ ke M, yang dinotasikan sebagai $\big(f''(\boldsymbol{x})\big)(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{k})$.

Teorema 3.1.3.5

Misalkan $f : U \to \mathbb{R}$ kontinu dan terdiferensial pada himpunan konveks buka $U \subseteq L$. Jika $f''(\boldsymbol{x})$ ada pada U, maka untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0 \in U$, terdapat $s \in (0,1)$ sedemikian sehingga

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2} f''(\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}).$$

dimana $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$.

Bukti:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0 \in U$. Misalkan

$$\varphi : (a, b) \to \mathbb{R},$$

dengan (a, b) memuat interval $[0,1]$, dan φ didefinisikan oleh

$$\varphi(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}).$$

Dengan menggunakan aturan rantai, didapat bahwa

$$\varphi'(t) = f'(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}).$$

Kemudian, misalkan $\theta(t) = f'(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h})$, maka dengan aturan rantai juga, didapat

$$\varphi''(t) = \theta'(t) = f''(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}).$$

Perhatikan bahwa, untuk $t > 0$, terdapat $s \in (0, t)$ sedemikian sehingga

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2.$$

Dengan pensubstitusian nilai, maka didapat

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2}\varphi''(0)t^2$$

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0 + 0\boldsymbol{h}) + f'(\boldsymbol{x}_0 + 0\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h})t + \frac{1}{2}f''(\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})t^2$$

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(t\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2}f''(\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{h})(t\boldsymbol{h},t\boldsymbol{h}).$$

Ambil $t = 1$, maka

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2}f''(\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})$$

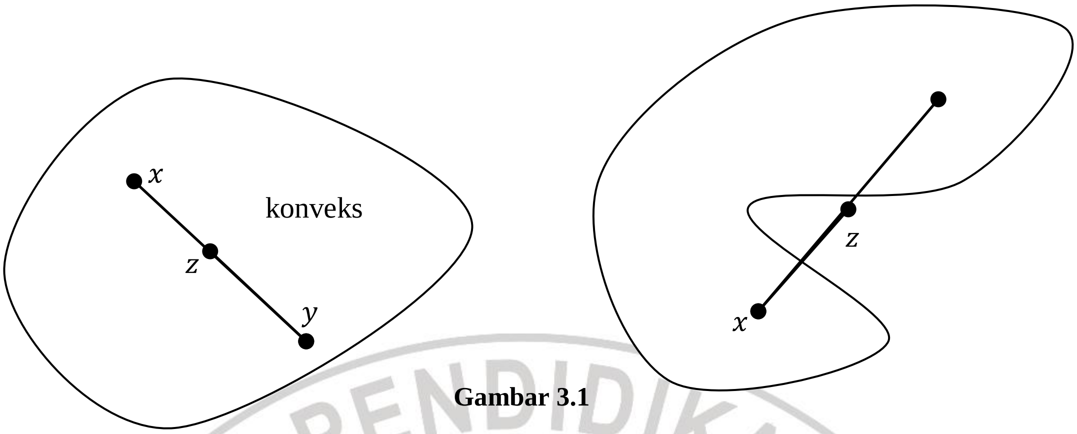
$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2}f''(\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h})$$

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2}f''(\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h},\boldsymbol{h}). \quad \bullet$$

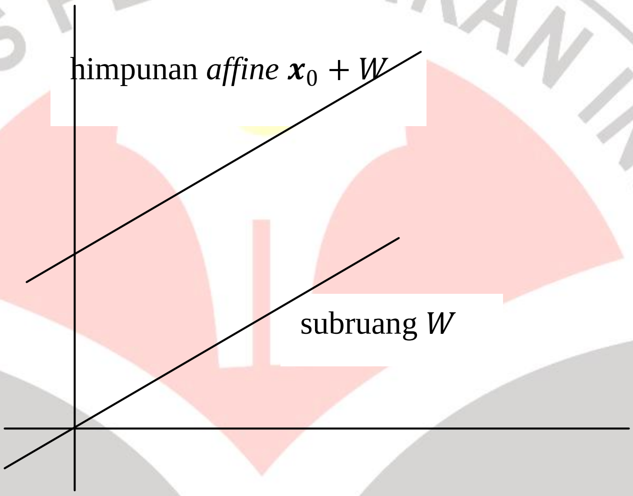
3.2. HIMPUNAN KONVEKS DAN HIMPUNAN *AFFINE*

Misalkan U subset dari ruang linear L. Himpunan U **konveks** jika untuk setiap $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in U$, mengakibatkan $\boldsymbol{z} = [\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}] \in U$, untuk setiap $\alpha \in [0,1]$. Dengan cara yang sama, himpunan U ***affine*** jika $\boldsymbol{z} \in U$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Dalam interpretasi geometri, himpunan konveks harus memuat segmen garis yang menghubungkan sebarang dua titik pada himpunan tersebut. sedangkan himpunan *affine* harus memuat keseluruhan garis yang melewati sebarang dua titik pada himpunan tersebut. Dengan demikian, setiap himpunan *affine* pastilah himpunan konveks, tetapi tidak berlaku sebaliknya. Sebagai contoh, himpunan kosong dan himpunan yang hanya memuat satu titik, merupakan himpunan konveks sekaligus *affine*.

Contoh himpunan konveks pada $\mathbb{R}^2$ antara lain, segmen garis, interior dari segitiga dan ellips, dan bentuk yang lain seperti pada Gambar 3.1. Himpunan *affine* tak trivial, subset dari himpunan $\mathbb{R}^2$, didefinisikan sebagai garis lurus. Perhatikan bahwa subset tak trivial dari $\mathbb{R}^2$ melewati titik pusat dan himpunan *affine* dapat dideskripsikan sebagai pergeseran dari subruang tersebut (Gambar 3.2). Deskripsi diatas juga sama untuk sebarang ruang linear L.



Gambar 3.1



Gambar 3.2

Secara umum, suatu ruang linear atau ruang linear adalah suatu himpunan konveks sekaligus himpunan *affine*. Alasannya adalah, jika diambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$, V ruang linear atau ruang linear, maka $\alpha\boldsymbol{x} \in V$ dan $(1-\alpha)\boldsymbol{y} \in V$, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, sehingga

$$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} \in V.$$

Teorema 3.2.1

Himpunan $U \subseteq L$ *affine* jika dan hanya jika U merupakan hasil pergeseran dari subruang pada L.

Bukti:

Pertama, jika U merupakan hasil pergeseran dari subruang pada L, akan ditunjukkan bahwa U *affine*. Perhatikan bahwa U merupakan hasil pergeseran dari subruang pada L, maka

$$U = \boldsymbol{x}_0 + W = \{\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}; \boldsymbol{w} \in W\}.$$

dengan $\boldsymbol{x}_0$ sebarang titik dari L dan W subruang dari L. Dengan demikian, jika $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2 \in U$, maka keduanya dapat dibentuk menjadi

$$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}_1, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}_2.$$

Kemudian ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 &= \alpha(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}_1) + (1-\alpha)(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{w}_2)\\ &= \alpha\boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{w}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_0 + (1-\alpha)\boldsymbol{w}_2\\ &= \alpha\boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{x}_0 - \alpha\boldsymbol{x}_0 + (1-\alpha)\boldsymbol{w}_2\\ &= \boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{w}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{w}_2.\end{aligned}$$

Perhatikan juga bahwa W adalah subruang, maka $\alpha\boldsymbol{w}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{w}_2 \in W$. Dengan demikian, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{x}_0 + W = U$. Jadi U *affine*.

Kedua, jika U *affine*, akan ditunjukkan bahwa U merupakan pergeseran dari subset pada L. Misalkan $\boldsymbol{x}_0$ sebarang elemen di L dan konstruksi

$$W = -\boldsymbol{x}_0 + U.$$

Jika $\boldsymbol{w}_1$ dan $\boldsymbol{w}_2$ sebarang dua elemen pada W, maka $\boldsymbol{w}_1$ dan $\boldsymbol{w}_2$ dapat dibentuk menjadi

$$\boldsymbol{w}_1 = -\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1, \qquad \boldsymbol{w}_2 = -\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U.$$

Pertama, akan dibuktikan bahwa penjumlahan sebarang dua elemen pada W berada pada W. Perhatikan bahwa

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = (-\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1) + (-\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_2) = (-\boldsymbol{x}_0) + (-\boldsymbol{x}_0) + 2\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2\right).$$

Misalkan $\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2\right) = \boldsymbol{y}$. Perhatikan bahwa $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$, U *affine* dan $\alpha = \frac{1}{2}$, maka didapat

$$\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 = \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{x}_2\right) = \boldsymbol{y} \in U.$$

Dengan demikian, didapat

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = (-\boldsymbol{x}_0) + (-\boldsymbol{x}_0) + 2\boldsymbol{y}.$$

Misalkan $\boldsymbol{z} = (-\boldsymbol{x}_0) + 2\boldsymbol{y}$. Perhatikan bahwa $-\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y} \in U$, kemudian dengan nilai $\alpha = 2$, maka didapat

$$\alpha\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_0 = (-\boldsymbol{x}_0) + 2\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z} \in U.$$

Dengan demikian, didapat

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = (-\boldsymbol{x}_0) + \boldsymbol{z} \in U.$$

Kemudian, ambil sebarang $\alpha \in \mathbb{R}$, akan ditunjukkan bahwa perkalian skalar dengan elemen di W berada di W. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \alpha\boldsymbol{w}_1 &= \alpha(-\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_1) \\ &= -\alpha\boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{x}_1 \\ &= -\alpha\boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0 \\ &= -\boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_0. \end{aligned}$$

Misalkan $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_0$. Perhatikan juga bahwa $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_0 \in U$, dan U *affine*, maka $\boldsymbol{y} \in U$. Dengan demikian

$$\alpha\boldsymbol{w}_1 = -\boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_0 = -\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{y} \in U.$$

Jadi, didapat bahwa baik penjumlahan atau perkalian skalar elemen di W berada pada W, sehingga W adalah subruang. ●

Jika $\alpha_i \in \mathbb{R}$, dan $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, maka $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, x_i$ dinamakan **kombinasi *affine*** dari $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ elemen dari ruang linear L. Jika $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 0$, maka $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, \boldsymbol{x}_i$ dinamakan **kombinasi konveks** dari $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ elemen dari ruang linear L.

Teorema 3.2.2

Misalkan $U \subseteq L$ adalah konveks (*affine*) jika dan hanya jika setiap kombinasi konveks (*affine*) dari titik-titik pada U berada pada U.

Bukti:

Sebagai permulaan, akan ditunjukkan untuk fungsi konveks dan kombinasi konveks terlebih dahulu. Pertama jika setiap kombinasi konveks dari titik-titik pada U berada pada U, akan ditunjukkan U konveks. Jelas sekali bahwa jika setiap kombinasi konveks berada pada U, maka U konveks.

Kedua, jika U konveks, akan ditunjukkan setiap kombinasi konveks dari titik-titik pada U berada pada U. Pembuktian akan menggunakan induksi matematika. Perhatikan bahwa

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \boldsymbol{x}_i, \qquad \boldsymbol{x}_i \in U.$$

Untuk $n = 2$, maka

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2.$$

Pilih $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$, dan $0 < \alpha_1 < 1$. Akibatnya bentuk

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + (1 - \alpha_1)\boldsymbol{x}_2 \in U.$$

Dengan demikian, untuk $n = 2$, berlaku jika setiap kombinasi konveks dari U berada di U, maka U konveks. Sekarang asumsikan bahwa untuk n, pernyataan diatas benar, akan ditunjukkan bahwa untuk $n + 1$, pernyataan diatas juga benar. Ambil sebarang $\alpha_i \in [0,1]$, sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \boldsymbol{x}_i &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \alpha_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1} \\
&= \frac{1 - \alpha_{n+1}}{1 - \alpha_{n+1}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \alpha_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1} \\
&= (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} \boldsymbol{x}_i + \alpha_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1}.
\end{aligned}$$

dengan $\alpha_{n+1} \neq 1$. Misalkan

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} \boldsymbol{x}_i,$$

sehingga didapat

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \boldsymbol{x}_i = (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_{n+1}} \boldsymbol{x}_i + \alpha_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1} = (1 - \alpha_{n+1}) \boldsymbol{y} + \alpha_{n+1} \boldsymbol{x}_{n+1}.$$

Perhatikan bahwa untuk n kombinasi konveks berada pada U. Dengan demikian $\boldsymbol{y} \in U$. Perhatikan juga bahwa $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_{n+1} \in U$, $\alpha_{n+1} \in [0,1)$ dan U konveks, maka

$$(1-\alpha_{n+1})\boldsymbol{y}+\alpha_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}\in U.$$

Dengan demikian

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\in U.$$

Pada pembuktian diatas telah ditunjukkan untuk kasus himpunan konveks. Pada pembuktian dibawah ini akan ditunjukkan untuk himpunan *affine* dan kombinasi *affine*. Dengan argumen yang sama seperti himpunan konveks, jika berlaku setiap kombinasi *affine* dari U berada pada U, maka U himpunan *affine*. Sekarang, jika U himpunan *affine*, akan ditunjukkan bahwa setiap kombinasi *affine* dari U berada pada U. Pembuktian juga akan menggunakan induksi matematika. Pilih $\alpha_1\in\mathbb{R}$, dan $\alpha_2=1-\alpha_1$, maka $\alpha_1+\alpha_2=1$. Dengan demikian, untuk $n=2$, maka kombinasi *affine*

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha_1)\boldsymbol{x}_2\in U.$$

Selanjutnya, asumsikan untuk n, pernyataan diatas benar, maka akan ditunjukkan untuk $n+1$, pernyataan diatas juga benar. Ambil sebarang $\alpha_i\in\mathbb{R}$, sedemikian sehingga $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$. Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\boldsymbol{x}_i=(1-\alpha_{n+1})\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}\boldsymbol{x}_i+\alpha_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}.$$

dengan $\alpha_{n+1}=0$. Misalkan

$$\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{n+1}}\boldsymbol{x}_i.$$

sehingga didapat

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\boldsymbol{x}_i=(1-\alpha_{n+1})\boldsymbol{y}+\alpha_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}.$$

Perhatikan bahwa untuk n kombinasi *affine* berada pada U. Dengan demikian $\boldsymbol{y}\in U$. Perhatikan juga bahwa $\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_{n+1}\in U$, $\alpha_{n+1}=0$ dan U konveks, maka

$$(1-\alpha_{n+1})\boldsymbol{y}+\alpha_{n+1}\boldsymbol{x}_{n+1}\in U.$$

Dengan demikian

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \in U.$$

Jadi, telah terbukti, baik untuk himpunan konveks maupun himpunan *affine*, kombinasi konveks maupun *affine*-nya berada pada himpunan konveks tersebut, dan berlaku juga sebaliknya. ●

Teorema 3.2.3

Jika $\{U_\alpha\}, \alpha \in A$, sebarang keluarga dari himpunan konveks (*affine*), maka $M_1 = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$ adalah konveks (*affine*). Jika $\{U_\alpha\}$ himpunan konveks (*affine*) berantai (artinya untuk $\alpha, \beta \in A$, berlaku $U_\alpha \subseteq U_\beta$ atau $U_\beta \subseteq U_\alpha$), maka $M_2 = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ adalah konveks (*affine*).

Bukti:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M_1$. Perhatikan bahwa $M_1 = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$, maka setiap elemen di M_1, berada pada U_α, untuk setiap$\alpha \in A$. Perhatikan juga bahwa U_α, untuk setiap $\alpha \in A$ konveks. Dengan demikian, $\forall\, \beta \in [0,1]$.

$$\beta \boldsymbol{x} + (1-\beta)\boldsymbol{y} \in U_\alpha, \qquad \forall\, \alpha \in A,$$

sehingga $\beta \boldsymbol{x} + (1-\beta)\boldsymbol{y} \in M_1$. Jadi didapat bahwa M_1 konveks.

Sekarang, ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M_1$. Perhatikan bahwa $M_1 = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$, maka setiap elemen di M_1, berada pada U_α, untuk setiap $\alpha \in A$. Perhatikan juga bahwa $U_\alpha, \forall\, \alpha \in A$ *affine*. Dengan demikian, untuk setiap $\beta \in \mathbb{R}$.

$$\beta \boldsymbol{x} + (1-\beta)\boldsymbol{y} \in U_\alpha, \qquad \forall\, \alpha \in A,$$

sehingga $\beta \boldsymbol{x} + (1-\beta)\boldsymbol{y} \in M_1$. Jadi didapat bahwa M_1 *affine*.

Kasus selanjutnya, ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M_2$. Perhatikan bahwa $M_2 = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ adalah himpunan berantai, maka setiap elemen di M_2 berada pada $U_{\alpha_1}, \alpha_1 \in A$, dimana $U_\alpha \subseteq U_{\alpha_1}$, untuk setiap $\alpha \in A$. Perhatikan juga bahwa U_{α_1} konveks. Dengan demikian, untuk setiap $\beta \in [0,1]$

$$\beta \boldsymbol{x} + (1-\beta)\boldsymbol{y} \in U_{\alpha_1},$$

sehingga $\beta \boldsymbol{x} + (1-\beta)\boldsymbol{y} \in M_2$. Jadi didapat bahwa M_2 konveks.

Kemudian, ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in M_2$. Perhatikan bahwa $M_2 = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ adalah himpunan berantai, maka setiap elemen di M_2 berada pada $U_{\alpha_1}, \alpha_1 \in A$, dimana $U_\alpha \subseteq U_{\alpha_1}, \forall \alpha \in A$. Perhatikan juga bahwa U_{α_1} *affine*. Dengan demikian, untuk setiap $\beta \in \mathbb{R}$

$$\beta \boldsymbol{x} + (1 - \beta)\boldsymbol{y} \in U_{\alpha_1},$$

sehingga $\beta \boldsymbol{x} + (1 - \beta)\boldsymbol{y} \in M_2$. Jadi didapat bahwa M_2 *affine*. ●

Irisan dari semua himpunan konveks yang memuat himpunan U dinamakan **konveks *hull*** dari himpunan U. Dengan argumen yang sama, irisan dari semua himpunan *affine* yang memuat himpunan U dinamakan ***affine hull*** dari himpunan U. Akibatnya, berdasarkan Teorema 3.2.1.3, maka konveks *hull* adalah konveks, dan *affine hull* adalah *affine*.

Teorema 3.2.4

Misalkan $U \subseteq L$. Konveks (*affine*) *hull* dari U memuat dengan tepat semua kombinasi konveks (*affine*) elemen dari U.

Bukti:

Terlebih dahulu, akan dibuktikan untuk kasus konveks *hull*. Misalkan $H(U)$ dinotasikan sebagai konveks *hull* dari U dan $K(U)$ himpunan semua kombinasi konveks elemen dari U. Perhatikan bahwa $U \subseteq H(U)$ dan $H(U)$ himpunan konveks. Berdasarkan Teorema 3.2.1.2, didapat bahwa $K(U) \subseteq U$, maka $K(U) \subseteq H(U)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $H(U) \subseteq K(U)$. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in K(U)$, dan notasikan

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i , \qquad \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{y}_j .$$

Misalkan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &= \gamma \boldsymbol{x} + (1 - \gamma)\boldsymbol{y} \\ &= \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i + (1 - \gamma) \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{y}_j , \end{aligned}$$

dimana $\gamma \in [0,1]$. Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \beta_i =\geq 0,$$

sehingga

$$\gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-\gamma) \sum_{j=1}^{m} \beta_j \geq \gamma.0 + (1-\gamma).0 = 0.$$

Dengan demikian $\boldsymbol{z} \in K(U)$, sehingga $K(U)$ himpunan konveks yang memuat U. Akibatnya, $H(U) \subseteq K(U)$. Jadi, karena $K(U)$ dan $H(U)$ saling subset, maka $H(U) = K(U)$.

Selanjutnya, pembuktian untuk himpunan *affine hull*. Misalkan $A(U)$ dinotasikan sebagai *affine hull* dari U dan $B(U)$ himpunan semua kombinasi *affine* elemen dari U. Perhatikan bahwa $U \subseteq A(U)$ dan $A(U)$ himpunan *affine*. Berdasarkan Teorema 3.2.1.2, didapat bahwa $B(U) \subseteq U$, maka $B(U) \subseteq A(U)$. Selanjutnya akan ditunjukkan $A(U) \subseteq B(U)$. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A(U)$, dan notasikan

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i\,, \qquad \boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{y}_j\,.$$

Misalkan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &= \gamma \boldsymbol{x} + (1-\gamma)\boldsymbol{y} \\ &= \gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i + (1-\gamma) \sum_{j=1}^{m} \beta_j \boldsymbol{y}_j\,, \end{aligned}$$

dimana $\gamma \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1,$$

sehingga

$$\gamma \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + (1-\gamma) \sum_{j=1}^{m} \beta_j = \gamma + 1 - \gamma = 1.$$

Dengan demikian $\boldsymbol{z} \in A(U)$, sehingga $A(U)$ himpunan *affine* yang memuat U. Akibatnya, $A(U) \subseteq B(U)$. Jadi, karena $A(U)$ dan $B(U)$ saling subset, maka $A(U) = B(U)$. ●

Teorema 3.2.1.4 dapat berimprovisasi jika $L = \mathbb{R}^n$. Misalkan $H(U)$ terdiri dari semua kombinasi konveks $n+1$ atau lebih kecil elemen-elemen U. Sebelum dibahas lebih lanjut, akan dijelaskan terlebih dahulu dimensi dari himpunan konveks. Jika U *affine*, **dimensi** dari U adalah dimensi dari subruang yang menggeser U pada Teorema 3.2.1.1. Secara lebih umum, jika U konveks, dimensi dari U adalah dimensi *affine hull* dari U.

Teorema 3.2.5

Misalkan M subset dari ruang linear L. Jika $M = A(\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\})$ *affine hull* dari himpunan berhingga $N = \{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$, maka M merupakan hasil pergeseran dari subruang $A(\{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\})$. M berdimensi n jika dan hanya jika $\{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\}$ himpunan bebas linear.

Bukti:

Misalkan $\{U_\alpha\}, \alpha \in A$ adalah keluarga himpunan *affine* yang memuat N. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}_i \in M$, maka $\boldsymbol{x}_i \in U_\alpha$, untuk setiap α. Perhatikan bahwa U_α *affine*, sehingga berdasarkan Teorema 3.2.1.1, U_α merupakan hasil pergeseran subruang W, yang dinotasikan sebagai

$$U_\alpha = \boldsymbol{x}_0 + W, \quad \boldsymbol{x}_0 \in U_\alpha.$$

Dengan demikian, untuk $\boldsymbol{w}_i \in W$,dan $\boldsymbol{x}_i \in U_\alpha$, berlaku

$$\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0.$$

Misalkan $\boldsymbol{w}_1$ dan $\boldsymbol{w}_2$ sebarang dua elemen pada W, dimana berlaku bahwa $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0$. Perhatikan bahwa, untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} &= \alpha\boldsymbol{w}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{w}_2 \\ &= \alpha(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + (1-\alpha)(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0) \\ &= \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_0 - (1-\alpha)\boldsymbol{x}_0 \\ &= \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 - \alpha\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{x}_0 \\ &= \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0. \end{aligned}$$

Misalkan $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2$. Sebelumnya, diketahui bahwa U_α *affine*, maka bentuk $\boldsymbol{y} \in U_\alpha$. Akibatnya

$$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}_0 \in W.$$

Dengan demikian, W adalah *affine*. Perhatikan bahwa W adalah himpunan *affine* terkecil yang memuat W, maka W adalah *affine hull* dari W, $W = A(W)$. Jadi telah terbukti bahwa M adalah hasil pergeseran *affine hull*

$$W = \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\}. \quad \bullet$$

Teorema 3.2.6 (Teorema Caratheodory)

Jika $U \subseteq L$ dan konveks *hull* $H(U)$ berdimensi m, maka untuk setiap $\boldsymbol{z} \in H(U)$, terdapat $m+1$ titik dari U sedemikian sehingga $\boldsymbol{z}$ kombinasi konveks dari titik-titik tersebut.

Bukti:

Ambil sebarang $\boldsymbol{z} \in H(U)$. Misalkan $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ titik-titik pada U, dimana $\boldsymbol{z}$ merupakan kombinasi konveks dari titik-titik tersebut. Dengan demikian

$$\boldsymbol{z} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i,$$

dimana $\alpha_i > 0, \boldsymbol{x}_i \in U$, dan $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \geq 0$. Sekarang, misalkan $B = \{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$, dan $n = m+1$. Perhatikan bahwa

$$\dim(affine\ hull\ B) \leq \dim(affine\ hull\ U) = m \leq n-1.$$

Berdasarkan Teorema 3.2.1.5, didapat bahwa $\{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0\}$ himpunan tak bebas linear. Dengan demikian, terdapat konstanta $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$, dimana nilai β_i tidak semuanya nol, untuk $i = 1,2, \cdots n$, sedemikian sehingga

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}.$$

Misalkan $\beta_0 = -\sum_{i=1}^{n} \beta_i$. Akibatnya

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i &= \beta_0 \boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_0 \\ &= \beta_0 \boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0) - \beta_0 \boldsymbol{x}_0\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}.$$

Selain itu,

$$\sum_{i=0}^{n} \beta_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i + \beta_0 = -\beta_0 + \beta_0 = 0.$$

Perhatikan bahwa semua nilai α_i positif. Pilih bilangan positif t, sedemikian sehingga $\gamma_i = \alpha_i - t\beta_i \geq 0$, untuk setiap $i = 0,1,\cdots,n$. Dengan demikian, untuk suatu k, nilai $\gamma_k = 0$. Akibatnya berlaku,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{z} &= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (\gamma_i + t\beta_i)\boldsymbol{x}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{i=0}^{n} t\beta_i \boldsymbol{x}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \boldsymbol{x}_i + t\sum_{i=0}^{n} \beta_i \boldsymbol{x}_i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \boldsymbol{x}_i + t0 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \boldsymbol{x}_i + 0 \\
&= \sum_{i=0, i\neq k}^{n} \gamma_i \boldsymbol{x}_i.
\end{aligned}$$

Selain itu,

$$\sum_{i=0, i\neq k}^{n} \gamma_i = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i = \sum_{i=0}^{n} (\alpha_i - t\beta_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i - t\sum_{i=0}^{n} \beta_i = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \geq 0.$$

Berdasarkan hal diatas, didapat bahwa $\boldsymbol{z}$ merupakan kombinasi konveks dari n titik, yaitu $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{x}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{x}_n$. Sebelumnya, telah dimisalkan bahwa $n = m + 1$. Jadi, $\boldsymbol{z}$ merupakan kombinasi konveks dari $m + 1$ titik. ●

Konveks *hull* dari himpunan berhingga titik dengan bentuk

$$P = H(\{\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}),$$

dinamakan ***polytope***. Jika $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0, \cdots, \boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_0$ bebas linear, maka P dinamakan ***n*-simplex** dengan titik $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$. Titik $\boldsymbol{x}$ pada ***n*-simplex** dapat ditulis sebagai kombinasi konveks $\boldsymbol{x} = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i$ dari titik-titiknya. Bilangan $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n$ dinamakan **koordinat barisentris** dari $\boldsymbol{x}$.

Berikutnya, akan dibuktikan beberapa sifat dari ruang linear bernorm L dalam konteks topologi. Perhatikan bahwa L adalah ruang linear bernorm, maka konsep tentang himpunan tutup dan buka dapat dibuktikan.

Teorema 3.2.7

Jika $U \subseteq L$ himpunan konveks, maka interior U^0 dan penutup $\overline{U}$ konveks.

Bukti:

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U^0$, dan $\alpha \in [0,1]$. Perhatikan bahwa

$$\boldsymbol{z} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}.$$

Dengan demikian

$$\boldsymbol{z} + \boldsymbol{u} = \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u} = \alpha\left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{u}}{\alpha}\right) + (1-\alpha)\boldsymbol{y}.$$

Misalkan $\|\boldsymbol{u}\|$ sangatlah kecil, maka $\left(\boldsymbol{x} + \frac{\boldsymbol{u}}{\alpha}\right) \in U$. Dengan demikian $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{u} \in U$, sehingga $\boldsymbol{z} \in U^0$. Jadi U^0 konveks.

Untuk kasus selanjutnya, ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \overline{U}$ dan $\alpha \in [0,1]$. Perhatikan bahwa, berdasarkan Teorema 2.4.1, maka $\overline{U}$ tutup, dan terdapat barisan $(\boldsymbol{x}_n)$ dan $(\boldsymbol{y}_n)$ pada U yang konvergen ke $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{y}$. Dengan demikian

$$\boldsymbol{z}_n = \alpha\boldsymbol{x}_n + (1-\alpha)\boldsymbol{y}_n \to \alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z},$$

dimana $\boldsymbol{z} \in U$. Akibatnya, $\boldsymbol{z} \in \overline{U}$. Jadi $\overline{U}$ konveks. ●

Teorema 3.2.8

Jika U buka pada L, maka konveks *hull* $H(U)$ buka. Jika U kompak dan L berdimensi hingga, maka $H(U)$ kompak.

Bukti:

Pertama, jika U buka pada L, akan ditunjukkan $H(U)$ buka. Ambil sebarang U buka pada L dan misalkan $\boldsymbol{x} \in H(U)$. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.2.1.4, $\boldsymbol{x}$ dapat dibentuk menjadi kombinasi konveks dari U, katakanlah

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i , \quad \boldsymbol{x}_i \in U.$$

Perhatikan bahwa $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \geq 0$. Akibatnya

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{u}).$$

Sebelumnya diketahui bahwa U buka, sehingga untuk nilai $\|\boldsymbol{u}\|$ yang kecil, maka $(\boldsymbol{x}_i + \boldsymbol{u}) \in U$. Dengan demikian $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u} \in H(U)$. Jadi, untuk $\|\boldsymbol{u}\|$ yang kecil, $H(U)$ buka.

Selanjutnya, jika U kompak dan L berdimensi hingga, akan ditunjukkan bahwa $H(U)$ kompak. Perhatikan bahwa L berdimensi hingga, katankanlah $m = \dim L$. Berdasarkan Teorema 3.1.1.5, maka L isomorfis dengan $\mathbb{R}^m$. Selain itu, berdasarkan Teorema Heine-Borel (3.1.1.3), cukup ditunjukkan bahwa $H(U)$ terbatas dan tertutup. Perhatikan bahwa U kompak, maka U terbatas dan tertutup. Misalkan $\|\boldsymbol{x}\| \leq r$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in U, r \in \mathbb{R}$. Ambil sebarang $\boldsymbol{y} \in H(U)$, dan berdasarkan Teorema 3.2.1.6, maka

$$\boldsymbol{y} = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_i.$$

Dengan demikian,

$$\|\boldsymbol{y}\| = \left\| \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{m} |\alpha_i| \|\boldsymbol{x}_i\| \leq \sum_{i=0}^{m} |\alpha_i| \|\boldsymbol{x}\| \leq \sum_{i=0}^{m} |\alpha_i| r = A.$$

Jadi, $H(U)$ terbatas.

Kemudian, untuk menunjukkan $H(U)$ tertutup, akan ditunjukkan bahwa sebarang barisan $(\boldsymbol{x}_n)$ pada $H(U)$ akan konvergen ke $\boldsymbol{x}$ elemen dari $H(U)$. Berdasarkan Teorema 3.2.1.6, maka berlaku

$$\boldsymbol{x}_n = \sum_{i=0}^{m} \alpha_{i_n} \boldsymbol{x}_{i_n}, \qquad \boldsymbol{x}_{i_n} \in U.$$

Perhatikan bahwa untuk setiap i, barisan (α_{i_n}) dan $(\boldsymbol{x}_{i_n})$ terbatas, maka keduanya akan memiliki subbarisan yang konvergen. Pilih bilangan positif n_k, sedemikian sehingga subbarisan $\left(\alpha_{i_{n_k}}\right)$ dan $\left(\boldsymbol{x}_{i_{n_k}}\right)$ konvergen untuk setiap i, katakanlah masing-masing konvergen ke α_i dan $\boldsymbol{z}_i$. Dengan demikian,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \alpha_{i_n} \boldsymbol{x}_{i_n} \\
&= \sum_{i=0}^{m} \lim_{n\to\infty} (\alpha_{i_n} \boldsymbol{x}_{i_n}) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \lim_{n\to\infty} \left(\alpha_{i_{n_k}} \boldsymbol{x}_{i_{n_k}}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{m} \alpha_i \boldsymbol{z}_i.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\alpha_{i_{n_k}} \geq 0$ dan $\sum_{i=0}^{m} \alpha_{i_{n_k}} \geq 0$. Akibatnya, ketika $k \to \infty$, nilai $\alpha_i \geq 0$ dan $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i \geq 0$. Perhatikan juga bahwa $\boldsymbol{x}_{i_{n_k}} \in U$ dan U tertutup, maka $\boldsymbol{z}_i \in U$. Akibatnya $\boldsymbol{x} \in H(U)$. Jadi, karena $(\boldsymbol{x}_n) \to \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in H(U)$, maka $H(U)$ tertutup. ●

Selanjutnya, akan dibahas tentang konsep tentang *hyperplane*. Konsep dari *hyperplane* di L didapat dari generalisasi tentang garis pada $\mathbb{R}^2$ dan bidang pada $\mathbb{R}^3$. ***Hyperplane*** H didefinisikan sebagai subset maksimal *proper affine* dari L atau juga dapat didefinsikan sebagai hasil pergeseran dari subruang maksimal *proper* dari L. Garis pada $\mathbb{R}^2$ didefinisikan sebagai $ax + by = c$ dan bidang pada $\mathbb{R}^3$ didefinisikan sebagai $ax + by + cz = d$. Jadi *hyperplane* dapat didefinisikan sebagai sebuah persamaan. Berdasarkan Teorema 3.1.2.5, subruang maksimal *proper* dari L adalah ruang nol N dari fungsional linear nontrivial $f : L \to \mathbb{R}$.

Perhatikan bahwa H adalah hasil pergeseran dari N, sehingga untuk setiap $\boldsymbol{z} \in H$ dapat ditulis sebagai

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{x} \in N.$$

Perhatikan juga bahwa $f(\boldsymbol{x}) = 0$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in N$, sehingga

$$f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z}_0 + \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z}_0) + f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z}_0) = \alpha.$$

Dengan demikian, setiap *hyperplane* dapat didefinisikan sebagai himpunan pada L dengan bentuk

(3.7) $$H = \{\boldsymbol{z} \in L : f(\boldsymbol{z}) = \alpha, f \text{ nontrivial}\}.$$

Konvers dari pernyataan diatas juga berlaku. Jika $H \subseteq L$ yang didefinisikan oleh (3.7) untuk suatu fungsional linear yang nontrivial dan bilangan real α, maka dapat dipilih sebarang $\boldsymbol{z}_0 \in H$ dan himpunan N dengan bentuk

$$N = \{\boldsymbol{x} \in L : \boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z} \in H\}.$$

Perhatikan bahwa $\boldsymbol{z}_0, \boldsymbol{z} \in H$, maka $f(\boldsymbol{z}) = f(\boldsymbol{z}_0) = \alpha$. Akibatnya,

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0) = f(\boldsymbol{z}) - f(\boldsymbol{z}_0) = \alpha - \alpha = 0.$$

Dengan demikian N adalah ruang nol dari f. Selain itu, berdasarkan Teorema 3.1.2.5, maka N subruang maksimal dari L. Perhatikan bahwa H adalah himpunan dari semua vektor $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}_0$, dimana $\boldsymbol{x} \in N$. Dengan demikian, H adalah hasil pergeseran dari N. Jadi H *hyperplane*.

Jika H *hyperplane* yang didefinisikan oleh (3.7), himpunan

$$\{\boldsymbol{z} \in L : f(\boldsymbol{z}) \leq \alpha\} \text{ dan } \{\boldsymbol{z} \in L : f(\boldsymbol{z}) \geq \alpha\}$$

adalah **setengah ruang** yang bergantung pada H. Jika U dan V berada pada setengah ruang yang saling berlawanan, maka H **membagi** U dan V. Jika H berada tepat diantara dua pergeseran dari H yang membagi U dan V, maka H **membagi kuat** U dan V.

Hyperplane H **mendukung** U di $\boldsymbol{x}_0 \in U$, jika $\boldsymbol{x}_0 \in H$ dan U subset dari salah satu setengah ruang yang bergantung pada H. Titik $\boldsymbol{x}_0$ di himpunan konveks U dinamakan **titik ekstrim** jika $\boldsymbol{x}_0$ tidak berada pada titik interior dari segmen garis U. Artinya, $\boldsymbol{x}_0$ titik ekstrim jika tidak ada $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ dan $\alpha \in (0,1)$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{x}_0 = \alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2$.

3.3 FUNGSI KONVEKS PADA RUANG LINEAR BERNORM

Fungsi konveks pada ruang linear bernorm adalah fungsi bernilai real yang terdefinisi pada sebarang ruang linear bernorm L. Misalkan $U \subseteq L$, U konveks dan definisikan

$$f : U \to \mathbb{R}.$$

Perhatikan bahwa U konveks, maka jika $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$ dan $\alpha \in (0,1)$, maka $\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 \in U$. Dengan demikian f terdefinisi di $\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2$. Fungsi f dikatakan **konveks** pada U, jika

$$f[\alpha\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2] \leq \alpha f(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{x}_2).$$

Kesimpulan yang didapat adalah fungsi konveks bernilai hingga.

Misalkan $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ sebarang titik di U, tiga bilangan positif $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sedemikian sehingga $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, dan f fungsi konveks. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & f(\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \alpha_3\boldsymbol{x}_3) \\ &= f\left[\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \frac{\alpha_2(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_2 + \frac{\alpha_3(\alpha_2+\alpha_3)}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_3\right] \\ &= f\left[\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + (\alpha_2+\alpha_3)\left(\frac{\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_2 + \frac{\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_3\right)\right]. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $\alpha_2 \leq \alpha_2 + \alpha_3$, maka $\frac{\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_3)} \in (0,1)$. Jika $\beta = \frac{\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_3)}$, maka

$$1 - \beta = 1 - \frac{\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_3)} = \frac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_2+\alpha_3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_2+\alpha_3} = \frac{\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)}.$$

Dengan demikain, karena U konveks, maka

$$\beta\boldsymbol{x}_2 + (1-\beta)\boldsymbol{x}_3 = \frac{\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_2 + \frac{\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_3 \in U.$$

Perhatikan bahwa f fungsi konveks dan $1 - \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$, sehingga didapat

$$\begin{aligned} & f\left[\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + (\alpha_2+\alpha_3)\left(\frac{\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_2 + \frac{\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_3\right)\right] \\ &\leq \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1) + (\alpha_2+\alpha_3) f\left(\frac{\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_2 + \frac{\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)}\boldsymbol{x}_3\right) \\ &\leq \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1) + (\alpha_2+\alpha_3)\left[\frac{\alpha_2}{(\alpha_2+\alpha_3)} f(\boldsymbol{x}_2) + \frac{\alpha_3}{(\alpha_2+\alpha_3)} f(\boldsymbol{x}_3)\right] \\ &= \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{x}_2) + \alpha_3 f(\boldsymbol{x}_3). \end{aligned}$$

Jadi didapat bahwa

$$f(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\alpha_3\boldsymbol{x}_3)\le\alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1)+\alpha_2 f(\boldsymbol{x}_2)+\alpha_3 f(\boldsymbol{x}_3).$$

Berdasarkan ilustrasi diatas, dengan pola yang sama untuk n titik di U, n bilangan real positif dimana $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$, dan f fungsi konveks, akan didapatkan

(3.8) $$f\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{x}_i\le\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\boldsymbol{x}_i).$$

Relasi diatas, dinamakan **ketaksamaan Jensen**, yang sewaktu-waktu dipakai untuk menjelaskan tentang definisi fungsi konveks.

Sebagian besar hasil pada subbab ini difokuskan pada sifat dari f di sebuah titik khusus $\boldsymbol{x}_0$. Walaupun nantinya pada teorema, dijelaskan bahwa teorema yang dijelaskan berlaku untuk sebarang titik $\boldsymbol{x}_0\in U$, biasanya pembuktian akan disederhanakan dengan memisalkan $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$ dan $f(\boldsymbol{0})=0$. Hal ini dilakukan tanpa mengurangi keumuman pembuktian. Alasannya adalah konsep dari fungsi konveks f pada himpunan konveks U yang memuat $\boldsymbol{x}_0$ ekuivalen dengan konsep dari fungsi g pada himpunan $V=\{\boldsymbol{x}\in L:\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0\in U\}$ jika didefinisikan

$$g(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0).$$

Dapat ditunjukkan bahwa g konveks pada V.

Ambil sebarang $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in V$ dan $\alpha\in(0,1)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_0\\
&=\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2+\alpha\boldsymbol{x}_0+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_0-(\alpha\boldsymbol{x}_0+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0\\
&=\alpha(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_0)+(1-\alpha)(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_0-\alpha\boldsymbol{x}_0+\alpha\boldsymbol{x}_0\\
&=\alpha(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_0)+(1-\alpha)(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_0)
\end{aligned}$$

Perhatikan juga bahwa $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_0\in U$ dan U konveks, maka

$$\alpha(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_0)+(1-\alpha)(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_0)\in U$$

Dengan demikian $\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2\in V$, sehingga V konveks. Akibatnya g terdefinisi di $\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
&g(\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2)\\
&=f(\alpha\boldsymbol{x}_1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)\\
&=f\big(\alpha(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_0)+(1-\alpha)(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_0)\big)-f(\boldsymbol{x}_0)+\alpha f(\boldsymbol{x}_0)-\alpha f(\boldsymbol{x}_0)\\
&\le\alpha f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_0)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_0)-(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_0)-\alpha f(\boldsymbol{x}_0)\\
&=\alpha\big(f(\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)\big)+(1-\alpha)\big(f(\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_0)-f(\boldsymbol{x}_0)\big)
\end{aligned}$$

$$= \alpha g(\boldsymbol{x}_1) + (1-\alpha) g(\boldsymbol{x}_2)$$

Jadi, g konveks pada V.

Perhatikan bahwa $g(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0) = 0$. Dengan demikian, ketika $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, maka berlaku

$$g(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)$$
$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0) - g(\boldsymbol{x})$$
$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}_0) = f(\mathbf{0} + \boldsymbol{x}_0) - g(\mathbf{0})$$
$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Artinya, f pada saat di $\boldsymbol{x}_0$, identik dengan g pada saat di $\mathbf{0}$. Dengan kata lain, f terbatas lokal (kontinu, terdiferensial) di $\boldsymbol{x}_0$ jika dan hanya jika g terbatas lokal (kontinu, terdiferensial) di $\mathbf{0}$.

Jika f konveks pada himpunan buka $U \subseteq L$ dan jika $\boldsymbol{x}_0 \in U$, maka untuk sebarang nilai $\boldsymbol{y} \in L$, fungsi g adalah konveks, dimana fungsi g didefinisikan oleh

$$g(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{y}),$$

untuk t di suatu interval (a, b) yang memuat titik pusat.

3.3.1 Kekontinuan Fungsi Konveks

Kunci untuk membuktikan kekontinuan dari fungsi konveks f yang terdefinisi pada $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ adalah dengan membuktikan keterbatasan fungsi konveks f tersebut pada subinterval tutup. Akibatnya, fungsi konveks tersebut dikatakan memenuhi kondisi Lipschitz, sehingga f kontinu. Berdasarkan ilustrasi tersebut, jika fungsi f terdefinisi pada himpunan U subset dari ruang linear bernorm, untuk menunjukkan bahwa f terbatas, maka cukup ditunjukkan bahwa f terbatas pada persekitaran dari hanya satu titik pada U. Akibatnya fungsi f memenuhi kondisi Lipschitz sehingga f kontinu.

Teorema 3.3.1.1

Misalkan f fungsi konveks yang terdefinisi pada himpunan buka U pada ruang linar bernorm L. Jika f terbatas di atas pada persekitaran dari suatu titik $\boldsymbol{x}_0 \in U$, maka f terbatas lokal. Artinya, setiap $\boldsymbol{x} \in U$ memiliki persekitaran dimana f terbatas pada persekitaran tersebut.

Bukti:

Pertama, jika f terbatas diatas pada persekitaran-ε dari suatu titik, akan ditunjukkan f terbatas dibawah pada persekitaran yang sama. Ambil titik $\mathbf{0}$ untuk mempermudah pembuktian. Misalkan f terbatas diatas, katakanlah oleh B, dimana $f(\boldsymbol{x}) \leq B$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in N_\varepsilon(\mathbf{0})$. Perhatikan bahwa

$$\mathbf{0} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(-\boldsymbol{x}).$$

dan f fungsi konveks. Dengan demikian

$$f(\mathbf{0}) = f\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{1}{2}(-\boldsymbol{x})\right) \leq \frac{1}{2}f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}f(-\boldsymbol{x})$$

$$\Rightarrow 2f(\mathbf{0}) \leq 2\left(\frac{1}{2}f(\boldsymbol{x}) + \frac{1}{2}f(-\boldsymbol{x})\right)$$

$$\Rightarrow 2f(\mathbf{0}) \leq f(\boldsymbol{x}) + f(-\boldsymbol{x})$$

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \geq 2f(\mathbf{0}) - f(-\boldsymbol{x})$$

Sebelumnya diketahui bahwa, $\boldsymbol{x} \in N_\varepsilon(\mathbf{0})$, maka berlaku $\|\boldsymbol{x}\| < \varepsilon$, sehingga nilai norm

$$\|-\boldsymbol{x}\| = |-1|\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\| < \varepsilon.$$

Akibatnya $(-\boldsymbol{x}) \in N_\varepsilon(\mathbf{0})$, sehingga $f(-\boldsymbol{x}) \leq B$. Dengan demikian, didapat bahwa $-f(-\boldsymbol{x}) \geq -B$. Sebelumnya didapat bahwa

$$f(\boldsymbol{x}) \geq 2f(\mathbf{0}) - f(-\boldsymbol{x})$$

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \geq 2f(\mathbf{0}) - B.$$

Jadi, f terbatas dibawah.

Sekarang, jika f terbatas diatas pada $N_\varepsilon(\mathbf{0})$, akan ditunjukkan bahwa f terbatas pada persekitaran dari $\boldsymbol{y} \in U, \boldsymbol{y} \neq \mathbf{0}$. Pilih $\rho > 1$ sehingga $\boldsymbol{z} = \rho\boldsymbol{y} \in U$ dan misal $\alpha = {}^{1}/_{\rho}$. Perhatikan bahwa

$$M = \{\boldsymbol{v} \in L : \boldsymbol{v} = (1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} \in N_\varepsilon(\mathbf{0})\}.$$

adalah persekitaran dari $\alpha\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ dengan radius $(1-\alpha)\varepsilon$. Dengan demikian

$$f(\boldsymbol{v}) = f\big((1-\alpha)\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{z}\big)$$

$$\leq (1-\alpha)f(\boldsymbol{x}) + \alpha f(\boldsymbol{z})$$
$$\leq f(\boldsymbol{x}) + \alpha f(\boldsymbol{z})$$
$$\leq B + \alpha f(\boldsymbol{z}).$$

Jadi, f terbatas diatas pada M, sehingga berdasarkan pembuktian pertama, didapat bahwa f terbatas dibawah pada M. ●

Fungsi yang terdefinisi pada himpunan buka U dinamakan **Lipschitz lokal** jika untuk setiap $\boldsymbol{x} \in U$, terdapat persekitaran $N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ dan konstanta $K(\boldsymbol{x})$, sedemikian sehingga jika $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$, maka

$$|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{z})| \leq K\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|.$$

Jika ketaksamaan diatas berlaku untuk himpunan $V \subseteq U$ dengan K yang tidak bergantung terhadap $\boldsymbol{x}$, maka f **Lipschitz** pada V.

Teorema 3.3.1.2

Misalkan f konveks pada himpunan buka $U \subseteq L$. Jika f terbatas diatas pada persekitaran dari suatu titik dari U, maka f Lipschitz lokal pada U.

Bukti:

Pembuktian teorema ini menggunakan kontraposisi. Misalkan f bukan Lipschitz lokal, maka untuk setiap persekitaran $N_\varepsilon(\boldsymbol{x})$ dan konstanta $K(\boldsymbol{x})$, berlaku

$$|f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{z})| > K\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|, \qquad \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in N_\varepsilon.$$

Perhatikan bahwa

$$|f(\boldsymbol{y})| + |f(\boldsymbol{z})| \geq |f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{z})| > K\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}\|.$$

Dengan demikian, untuk setiap $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in N_\varepsilon$, nilai f tak terbatas diatas. Jadi, jika f terbatas diatas, maka f Lipschitz lokal. ●

Teorema 3.3.1.3

Misalkan f konveks pada himpunan buka $U \subseteq L$. Jika f terbatas diatas pada persekitaran dari suatu titik dari U, maka f kontinu pada U.

Bukti:

Pada teorema sebelumnya didapat bahwa f Lipschitz lokal pada U, sehingga mengakibatkan f kontinu pada U. ●

3.3.2 Diferensiasi Fungsi Konveks

Berdasarkan Teorema 2.3.5.2, jika fungsi f terdiferensial, maka f fungsi konveks jika dan hanya jika f' naik. Untuk pendiferensialan fungsi pada ruang linear bernorm L, akan digunakan karakterisasi kekonveksan dari turunan pertama.

Teorema 3.3.2.1

Misalkan f terdefinisi pada himpunan konveks buka $U \subseteq L$. Jika f konveks pada U dan terdiferensial di $\boldsymbol{x}_0$, maka untuk $\boldsymbol{x} \in U$,

(3.9) $$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \geq f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Jika f terdiferensial pada U, maka f konveks jika dan hanya jika berlaku (3.9), untuk setiap $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} \in U$. Selain itu, f konveks sempurna jika dan hanya jika ketaksamaan (3.9) tanpa sama dengan.

Bukti:

Pertama, jika f konveks terdiferensial di $\boldsymbol{x}_0$, akan ditunjukkan memenuhi (3.9) untuk setiap $\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x} \in U$. Perhatikan bahwa f konveks, sehingga untuk $t \in (0,1)$, berlaku

$$\begin{aligned} f[\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)] &= f[\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{x}_0] \\ &= f[(1-t)\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{x}] \\ &\leq (1-t)f(\boldsymbol{x}_0) + tf(\boldsymbol{x}) \\ &= f(\boldsymbol{x}_0) - tf(\boldsymbol{x}_0) + tf(\boldsymbol{x}) \\ &= f(\boldsymbol{x}_0) + t[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)]. \end{aligned}$$

Konstruksi $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$, sehingga didapat

$$f[\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)] \leq f(\boldsymbol{x}_0) + t[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)]$$

$$\Rightarrow f[\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}] - f(\boldsymbol{x}_0) \leq t[f(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)].$$

Kedua ruas dikurangi dengan $f'(\boldsymbol{x}_0)(t\boldsymbol{h})$, dan perhatikan bahwa $f'(\boldsymbol{x}_0)$ linear, sehingga didapat

$$f[\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}] - f(\boldsymbol{x}_0) - f'(\boldsymbol{x}_0)(t\boldsymbol{h}) \leq t[f(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)] - f'(\boldsymbol{x}_0)(t\boldsymbol{h})$$
$$\Rightarrow f[\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}] - f(\boldsymbol{x}_0) - f'(\boldsymbol{x}_0)(t\boldsymbol{h}) \leq t[f(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)] - tf'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})$$
$$\Rightarrow f[\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}] - f(\boldsymbol{x}_0) - f'(\boldsymbol{x}_0)(t\boldsymbol{h}) \leq t[f(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0) - f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})].$$

Kemudian, kedua ruas dibagi dengan t sehingga didapat

$$\frac{f[\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}] - f(\boldsymbol{x}_0) - f'(\boldsymbol{x}_0)(t\boldsymbol{h})}{t} \leq f(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0) - f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}).$$

Perhatikan bahwa ketika $t \to 0$, nilai sisi sebelah kiri menuju nol, dan sisi sebelah kanan konstan karena tidak bergantung pada t, sehingga didapat

$$0 \leq f(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0) - f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})$$
$$\Rightarrow f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) \leq f(\boldsymbol{h} + \boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)$$
$$\Rightarrow f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \leq f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

Dengan demikian, berlaku ketaksamaan (3.9). Sedangkan untuk kasus f konveks sempurna, berlaku

$$f[\boldsymbol{x}_0 + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)] < f(\boldsymbol{x}_0) + t[f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0)];\ \ t(0,1).$$

Selanjutnya, dengan cara dan argumen yang sama, akan didapat bahwa

$$f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) < f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0).$$

Kedua, jika berlaku (3.9), akan ditunjukkan bahwa f konveks. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$, $t \in (0,1)$. Konstruksi $\boldsymbol{x}_0 = t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2$. Perhatikan bahwa

$$f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0) = f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_0).$$

dan $f'(\boldsymbol{x}_0)$ linear. Dengan demikian, berlaku bahwa

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{x}_0)\\
&= f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)[t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0]\\
&= f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)[t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0 - t\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{x}_0]\\
&= f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)[t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)] + (1-t)(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)\\
&= f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)[t(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)] + f'(\boldsymbol{x}_0)[(1-t)(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)]\\
&= f(\boldsymbol{x}_0) + tf'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + (1-t)f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)\\
&= f(\boldsymbol{x}_0) + tf(\boldsymbol{x}_0) - tf(\boldsymbol{x}_0) + tf'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + (1-t)f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)\\
&= t[f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)] + (1-t)[f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)].
\end{aligned}$$

Misalkan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ dan $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2$, maka berlaku (3.9), sehingga

$$f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + f(\boldsymbol{x}_0) \le f(\boldsymbol{x}_1),$$

dan

$$f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0) + f(\boldsymbol{x}_0) \le f(\boldsymbol{x}_2).$$

Akibatnya

$$f(\boldsymbol{x}_0) \le tf(\boldsymbol{x}_1) + (1-t)f(\boldsymbol{x}_2)$$

$$\Rightarrow f(t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2) \le tf(\boldsymbol{x}_1) + (1-t)f(\boldsymbol{x}_2).$$

Dengan demikian, f konveks di U. Untuk kasus ketaksamaan sempurna, maka berlaku

$$f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + f(\boldsymbol{x}_0) < f(\boldsymbol{x}_1),$$

dan

$$f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0) + f(\boldsymbol{x}_0) < f(\boldsymbol{x}_2).$$

Akibatnya

$$f(t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2) < tf(\boldsymbol{x}_1) + (1-t)f(\boldsymbol{x}_2).$$

Dengan demikian, f konveks sempurna di U. ●

Teorema 3.3.2.1 tidak sejalan dengan teorema pada variabel real dimana f konveks jika dan hanya jika f' naik, tetapi teorema ini bisa dipakai untuk membuktikan fungsi naik pada $U \subseteq L$. Dalam fungsi yang terdefinisi pada variabel real, f' monoton naik jika dan hanya jika untuk sebarang $x, y \in (a, b)$, $[f'(x) - f'(y)](x - y) \ge 0$. Ekspresi dalam fungsi yang terdefinisi pada variabel real tersebut, dapat juga digunakan untuk fungsi yang terdefinisi pada $U \subseteq L$. Jika untuk setiap $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$, berlaku

(3.10) $$[f'(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{y})](\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \ge 0.$$

maka f' **monoton naik**. Jika pada ketaksamaan (3.10) tidak berlaku sama dengan untuk $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, maka f' **monoton naik sempurna**,

Teorema 3.3.2.2

Misalkan $f : U \to \mathbb{R}$ kontinu dan terdiferensial pada himpunan konveks buka $U \subseteq L$. Fungsi f konveks (konveks sempurna) jika dan hanya jika f' monoton naik (monoton naik sempurna) pada U.

Bukti:

Pertama, jika f konveks, akan ditunjukkan bahwa f' monoton naik. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$. Perhatikan bahwa, f konveks dan terdiferensial pada U. Dengan demikian, berdasarkan Teorema 3.3.2.1, berlaku bahwa

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \geq f'(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$
$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) \geq f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan diatas, maka didapat

$$\begin{array}{l} f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) \geq f'(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \\ \underline{f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) \geq f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \quad +} \end{array}$$

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{y}) \geq f'(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})$$

$$\Rightarrow 0 \geq f'(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + f'(\boldsymbol{x})\big(-(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})\big)$$

$$\Rightarrow 0 \geq f'(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

$$\Rightarrow f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - f'(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq 0$$

$$\Rightarrow [f'(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{y})](\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq 0.$$

Dengan demikian f' monoton naik pada U. Untuk kasus konveks sempurna, ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, maka didapat

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{y}) > f'(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$
$$f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x}) > f'(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}).$$

Dengan argumen yang sama, akan didapat

$$[f'(\boldsymbol{x}) - f'(\boldsymbol{y})](\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) > 0,$$

sehingga, f' monoton naik sempurna pada U.

Kedua, jika f' monoton naik pada U, akan ditunjukkan f konveks. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$. Misalkan

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R},$$

yang definisikan oleh

$$\varphi(\alpha) = f[\alpha\boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y}].$$

Pilih $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$, dan misalkan

$$\boldsymbol{u}_1 = \alpha_1\boldsymbol{x} + (1 - \alpha_1)\boldsymbol{y} \text{ dan } \boldsymbol{u}_2 = \alpha_2\boldsymbol{x} + (1 - \alpha_2)\boldsymbol{y}.$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1 &= \alpha_2\boldsymbol{x} + (1 - \alpha_2)\boldsymbol{y} - (\alpha_1\boldsymbol{x} + (1 - \alpha_1)\boldsymbol{y}) \\ &= \alpha_2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \alpha_2\boldsymbol{y} - \alpha_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} + \alpha_1\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

$$= (\alpha_2 - \alpha_1)\boldsymbol{x} - (\alpha_2 - \alpha_1)\boldsymbol{y}$$
$$= (\alpha_2 - \alpha_1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

Perhatikan bahwa U konveks, sehingga $\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_1 \in U$. Selain itu, diketahui bahwa f monoton naik pada U, dan untuk suatu $\boldsymbol{x} \in U$, $f'(\boldsymbol{x})$ linear, maka berlaku

$$[f'(\boldsymbol{u}_2) - f'(\boldsymbol{u}_1)](\boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1) \geq 0$$
$$\Rightarrow [f'(\boldsymbol{u}_2) - f'(\boldsymbol{u}_1)](\alpha_2 - \alpha_1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq 0$$
$$\Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)[f'(\boldsymbol{u}_2) - f'(\boldsymbol{u}_1)](\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq 0$$
$$\Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)[f'(\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - f'(\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})] \geq 0$$
$$\Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)f'(\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) - (\alpha_2 - \alpha_1)f'(\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq 0$$
$$\Rightarrow (\alpha_2 - \alpha_1)f'(\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq (\alpha_2 - \alpha_1)f'(\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$
$$\Rightarrow f'(\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq f'(\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

Perhatikan bahwa

$$\varphi(\alpha_1) = f(\alpha_1\boldsymbol{x} + (1 - \alpha_1)\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{u}_1),$$

dan

$$\varphi(\alpha_2) = f(\alpha_2\boldsymbol{x} + (1 - \alpha_2)\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{u}_2).$$

Dengan demikian, berlaku

$$\frac{d\varphi(\alpha_1)}{\alpha_1} = \frac{\partial f(\boldsymbol{u}_1)}{\alpha_1} = \frac{\partial f(\boldsymbol{u}_1)}{\partial \boldsymbol{u}_1} \circ \frac{\partial \boldsymbol{u}_1}{d\alpha_1} = f'(\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}),$$

dan

$$\frac{d\varphi(\alpha_2)}{\alpha_2} = \frac{\partial f(\boldsymbol{u}_2)}{\alpha_2} = \frac{\partial f(\boldsymbol{u}_2)}{\partial \boldsymbol{u}_2} \circ \frac{\partial \boldsymbol{u}_2}{d\alpha_2} = f'(\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}).$$

Akibatnya,

$$\frac{d\varphi(\alpha_2)}{\alpha_2} = f'(\boldsymbol{u}_2)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq f'(\boldsymbol{u}_1)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) = \frac{d\varphi(\alpha_1)}{\alpha_1}.$$

Berdasarkan hasil diatas, didapat bahwa

$$\left[\frac{d\varphi(\alpha_2)}{\alpha_2} - \frac{d\varphi(\alpha_1)}{\alpha_1}\right](\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0,$$

sehingga didapat bahwa φ' naik. Berdasarkan Teorema 2.5.3.3, maka φ konveks. Dengan demikian, didapat bahwa

$$f[\alpha\boldsymbol{x} + (1 - \alpha)\boldsymbol{y}] = \varphi(\alpha)$$
$$= \varphi[\alpha(1) + (1 - \alpha)0]$$

$$\leq \alpha\varphi(1) + (1-\alpha)\varphi(0)$$
$$= \alpha f[1\boldsymbol{x} + (1-1)\boldsymbol{y}] + (1-\alpha) f[0\boldsymbol{x} + (1-0)\boldsymbol{y}]$$
$$= \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y}).$$

Jadi, didapat bahwa f konveks. Untuk kasus monoton naik sempurna, dengan cara yang sama dimana tanda sama dengan dari ketaksamaan hilang untuk $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, maka akan didapat bahwa

$$f[\alpha\boldsymbol{x} + (1-\alpha)\boldsymbol{y}] < \alpha f(\boldsymbol{x}) + (1-\alpha) f(\boldsymbol{y}). \quad \bullet$$

Berdasarkan Teorema 2.5.3.4, diketahui jika fungsi f yang terdefinisi pada variabel real dan memiliki turunan kedua, fungsi f konveks jika dan hanya jika turunan keduanya tak negatif. Pada bahasan kali ini, akan dijelaskan tentang kekonveksan fungsi f pada ruang linear bernorm L dari sudut pandang turunan kedua.

Teorema 3.3.2.3

Misal f kontinu dan terdiferensial dan misalkan turunan kedua ada pada himpunan buka konveks $U \subseteq L$. Fungsi f konveks pada U jika dan hanya jika $f''(\boldsymbol{x})$ tak negatif untuk setiap $\boldsymbol{x} \in U$. Jika $f''(\boldsymbol{x})$ bernilai positif pada U, maka f konveks sempurna.

Bukti:

Pertama, jika $f''(\boldsymbol{x})$ tak negatif untuk setiap $\boldsymbol{x} \in U$, akan ditunjukkan f konveks pada U. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x_0} \in U$. Berdasarkan Teorema 3.1.3.5, didapat bahwa

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h}) + \frac{1}{2} f''(\boldsymbol{x}_0 + s\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}),$$

dimana $s \in (0,1)$ dan $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0$. Perhatikan bahwa $f''(\boldsymbol{x})$ tak negatif, maka

$$f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{h})$$
$$= f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Berdasarkan Teorema 3.3.2.1, maka didapat bahwa f konveks. Jika $f''(\boldsymbol{x})$ bernilai positif, maka

$$f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}_0) + f'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Berdasarkan Teorema 3.3.2.1 juga didapatkan bahwa f konveks sempurna.

Kedua, jika f konveks pada U, akan ditunjukkan $f''(\boldsymbol{x})$ tak negatif untuk setiap $\boldsymbol{x} \in U$. Sebelumnya, pada bagian akhir subbahasan 3.3 ini, telah dijelaskan bahwa untuk sebarang fungsi konveks f pada $U \subseteq L$, dapat digunakan fungsi g yang konveks pada persekitaran titik pusat untuk memudahkan dalam pembuktian. Ambil sebarang $\boldsymbol{x} \in U$ dan $\boldsymbol{h} \in L$. Konstruksi fungsi g, dimana

$$g(t) = f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h})$$

dengan $t \in (a, b)$ dan interval (a, b) memuat titik 0. Berdasarkan aturan rantai, didapat bahwa

$$g'(t) = f'(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}),$$

$$g''(t) = f''(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}).$$

Perhatikan bahwa g konveks pada persekitaran titik 0, maka untuk setiap t titik pada persekitaran tersebut, $g''(t) \geq 0$. Perhatikan bahwa $t = 0$ adalah titik pada persekitaran titik 0 tersebut, sehingga $g''(0) \geq 0$. Dengan demikian

$$f''(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}) = f''(\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{h})(\boldsymbol{h}, \boldsymbol{h}) = g''(0) \geq 0.$$

Jadi, $f''(\boldsymbol{x})$ tidak negatif untuk setiap $\boldsymbol{x} \in U$. ●

Pada kasus selanjutnya, akan dijelaskan kasus turunan fungsi yang terdefinisi pada $\mathbb{R}^n$. Untuk fungsi dari beberapa variabel dimana semua turunan parsialnya ada, maka selalu dapat didefinisikan transformasi linear dengan matriks

$$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \left[\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_1}(\boldsymbol{x}_0) \cdots \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{x}_n}(\boldsymbol{x}_0)\right] = [f_1(\boldsymbol{x}_0) \cdots f_n(\boldsymbol{x}_0)].$$

Perumusan diatas dinamakan **gradien** dari f.

Teorema 3.3.2.4

Jika f konveks pada himpunan buka $U \subseteq \mathbb{R}^n$ dan semua turunan parsialnya ada di $\boldsymbol{x}_0 \in U$, maka $f'(\boldsymbol{x}_0)$ ada.

Bukti:

Sebelumnya, pada subbahasan 3.1.3, telah dijelaskan bahwa, fungsi f terdiferensial pada $\boldsymbol{x}_0 \in U$ jika terdapat transformasi linear $T : L \to M$ sedemikian sehingga untuk nilai $\boldsymbol{h} \in L$ yang sangat kecil, berlaku

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + T(\boldsymbol{h}) + \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{h})$$

dimana $\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{h}) \in M$ dan nilai $\varepsilon(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{h}) \to 0$ ketika $\|\boldsymbol{h}\| \to 0$. Dalam kasus pada teorema ini, dapat dianalogikan bahwa turunannya adalah transformasi linear yang bergantung terhadap turunan parsial itu sendiri. Dengan demikian akan dibuktikan nilai

$$\varepsilon(\boldsymbol{h}) = \frac{1}{\|\boldsymbol{h}\|}[f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - T(\boldsymbol{h})],$$

menuju nol ketika $\|\boldsymbol{h}\| \to 0$. Konstruksi

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = \|\boldsymbol{h}\|\varepsilon(\boldsymbol{h})$$

dimana φ fungsi pada persekitaran $N_\delta(\boldsymbol{0})$, sedemikian sehingga jika $\boldsymbol{h} \in N_\delta(\boldsymbol{0})$, maka $n\boldsymbol{h} \in U$. Konstruksi,

$$\varphi(\boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}) - f(\boldsymbol{x}_0) - T(\boldsymbol{h}).$$

Perhatikan bahwa f konveks dan T fungsi linear. Misalkan $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2 \in N_\delta(\boldsymbol{0})$, maka

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha\boldsymbol{h}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{h}_2)\\
&= f(\boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{h}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{h}_2) - f(\boldsymbol{x}_0) - T(\alpha\boldsymbol{h}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{h}_2)\\
&= f(\alpha\boldsymbol{x}_0 - \alpha\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{x}_0 + \alpha\boldsymbol{h}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{h}_2) - f(\boldsymbol{x}_0) - T(\alpha\boldsymbol{h}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{h}_2)\\
&= f\big(\alpha(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}_1) + (1-\alpha)(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}_2)\big) - \alpha f(\boldsymbol{x}_0) + \alpha f(\boldsymbol{x}_0) - f(\boldsymbol{x}_0)\\
&\quad -T(\alpha\boldsymbol{h}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{h}_2)\\
&\le \alpha f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}_1) + (1-\alpha)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}_2) - \alpha f(\boldsymbol{x}_0) - (1-\alpha)f(\boldsymbol{x}_0) - \alpha T(\boldsymbol{h}_1)\\
&\quad -(1-\alpha)T(\boldsymbol{h}_2)\\
&= \alpha\big(f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}_1) - f(\boldsymbol{x}_0) - T(\boldsymbol{h}_1)\big) + (1-\alpha)\big(f(\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{h}_2) - f(\boldsymbol{x}_0) - T(\boldsymbol{h}_2)\big)\\
&= \alpha\varphi(\boldsymbol{h}_1) + (1-\alpha)\varphi(\boldsymbol{h}_2).
\end{aligned}$$

Dengan demikian, φ konveks. Misalkan

$$\boldsymbol{h} = h_1\boldsymbol{e}_1 + h_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + h_n\boldsymbol{e}_n,$$

dinyatakan dalam bentuk basis standar dari $\mathbb{R}^n$. Akibatnya, berdasarkan ketaksamaan Jensen (3.8), didapat bahwa

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{h}) &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} h_i \boldsymbol{e}_i\right)\\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} h_i n \boldsymbol{e}_i\right)\\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \varphi(h_i n \boldsymbol{e}_i)\right)\\ &\leq \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(h_i n \boldsymbol{e}_i)\right).\end{aligned}$$

Sekarang, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\varphi(h_i n \boldsymbol{e}_i) &= f(\boldsymbol{x}_0 + h_i n \boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}_0) - T(h_i n \boldsymbol{e}_i)\\ &= f(\boldsymbol{x}_0 + h_i n \boldsymbol{e}_i) - f(\boldsymbol{x}_0) - f_i(\boldsymbol{x}_0) h_i n.\end{aligned}$$

Akibatnya, berdasarkan definisi turunan parsial, maka didapat

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\varphi(h_i n \boldsymbol{e}_i)}{h_i n} = 0.$$

Selanjutnya, berdasarkan Ketaksamaan CBS, jika $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, dimana

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \cdots, u_n), \quad \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \cdots, v_n),$$

maka didapat

$$\sum_{i=1}^{n} u_i v_i \leq \|\boldsymbol{u}\| \|\boldsymbol{v}\| \leq \|\boldsymbol{u}\| \sum_{i=1}^{n} |v_i|.$$

Sebelumnya didapatkan bahwa

$$\varphi(\boldsymbol{h}) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \varphi(h_i n \boldsymbol{e}_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \frac{h_i}{h_i} \varphi(h_i n \boldsymbol{e}_i) \leq \|\boldsymbol{h}\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n h_i} \varphi(h_i n \boldsymbol{e}_i).$$

Dengan cara yang sama, akan didapat bahwa

$$\varphi(-\boldsymbol{h}) \leq \|\boldsymbol{h}\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n h_i} \varphi(-h_i n \boldsymbol{e}_i)$$

$$\Rightarrow -\varphi(-\boldsymbol{h}) \geq -\|\boldsymbol{h}\| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n h_i} \varphi(-h_i n \boldsymbol{e}_i).$$

Berdasarkan definisi φ dan kekonveksan dari φ, didapat bahwa

$$
\begin{aligned}
0 &= \varphi\left(\frac{\boldsymbol{h}+(-\boldsymbol{h})}{2}\right) \\
&= \varphi\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{h}+\frac{1}{2}(-\boldsymbol{h})\right) \\
&\leq \frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{h})+\frac{1}{2}\varphi(-\boldsymbol{h}) \\
&= \frac{1}{2}\big(\varphi(\boldsymbol{h})+\varphi(-\boldsymbol{h})\big).
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, didapat $-\varphi(-\boldsymbol{h}) \leq \varphi(\boldsymbol{h})$. Akibatnya

$$
-\|\boldsymbol{h}\|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh_i}\varphi(-h_i n\boldsymbol{e}_i) \leq -\varphi(-\boldsymbol{h}) \leq \varphi(\boldsymbol{h}) \leq \|\boldsymbol{h}\|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh_i}\varphi(h_i n\boldsymbol{e}_i)
$$

$$
\Rightarrow -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh_i}\varphi(-h_i n\boldsymbol{e}_i) \leq \frac{\varphi(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh_i}\varphi(h_i n\boldsymbol{e}_i)
$$

$$
\Rightarrow -\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh_i}\varphi(-h_i n\boldsymbol{e}_i) \leq \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{\varphi(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \leq \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh_i}\varphi(h_i n\boldsymbol{e}_i)
$$

$$
\Rightarrow -\lim_{h_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh_i}\varphi(-h_i n\boldsymbol{e}_i) \leq \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{\varphi(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \leq \lim_{h_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{nh_i}\varphi(h_i n\boldsymbol{e}_i)
$$

$$
\Rightarrow 0 \leq \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{\varphi(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} \leq 0
$$

$$
\Rightarrow \lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\frac{\varphi(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = 0.
$$

Perhatikan bahwa $\frac{\varphi(\boldsymbol{h})}{\|\boldsymbol{h}\|} = \varepsilon(\boldsymbol{h})$, maka didapat

$$
\lim_{\|\boldsymbol{x}\|\to 0}\varepsilon(\boldsymbol{h}) = 0.
$$

Jadi, didapat bahwa $f'(\boldsymbol{x}_0)$ ada, dimana $f'(\boldsymbol{x}_0) = \nabla f(\boldsymbol{x}_0)$. •

Berdasarkan hasil dari Teorema 3.3.2.4, maka Teorema 3.3.2.1 dan 3.3.2.2 dapat dikombinasikan menjadi kasus ketika $L = \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.3.2.5

Misalkan f terdefinisi pada himpunan konveks buka $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Jika f konveks pada U dan gradien $\nabla f(\boldsymbol{x}_0)$ ada, maka untuk $\boldsymbol{x} \in U$,

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \geq \nabla f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0).$$

Misalkan $\nabla f(\boldsymbol{x})$ ada pada U. Jika f konveks (konveks sempurna), maka ∇f monoton naik (monoton naik sempurna) pada U. Sebaliknya, jika f kontinu sepanjang U dan jika ∇f monoton naik (monoton naik sempurna) pada U, maka f konveks (konveks sempurna).

Bukti:

Pada kasus pertama, pembuktian

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) \geq \nabla f(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0),$$

menggunakan argumentasi yang sama seperti Teorema 3.3.1.1. Selanjutnya, untuk membuktikan ∇f monoton naik jika f konveks, digunakan argumentasi yang sama seperti Teorema 3.3.1.2. Terakhir, jika ∇f kontinu, maka $f^{'}$ ada dan juga monoton naik, sehingga f konveks. ●

3.3.3 Pendukung dari Fungsi Konveks

Berdasarkan Teorema 2.5.3.5, fungsi konveks $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, salah satu karakterisasinya adalah memiliki garis pendukung di setiap titik di (a, b). Teorema 2.5.3.5 ini dapat diperumum untuk fungsi dengan domain pada ruang linear bernorm L. Sebelumnya, diketahi bahwa garis lurus pada $\mathbb{R}^2$ adalah fungsi *affine*. Konsep diatas diperluas menjadi ruang linear bernorm L sehingga didapat fungsi pendukung yang *affine*. Fungsi *affine* A melewati titik $\big(\boldsymbol{x}_0, f(\boldsymbol{x}_0)\big)$ dan direpresentasikan dalam bentuk

$$A(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0),$$

dimana T linear. Sebelum membuktikan teorema fundamental pada pendukung dari fungsi konveks, dibutuhkan **Teorema Hahn-Banach** dibawah ini.

Teorema 3.3.3.1

Misalkan f konveks pada himpunan buka U, subset dari ruang linear bernorm L dan misal V_0 subruang tak trivial sedemikian sehingga $V_0 \cap U \neq \emptyset$. Jika

$$A_0 : V_0 \to \mathbb{R},$$

affine dan $A_0(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})$ pada $V_0 \cap U$, maka terdapat ekstensi *affine*

$$A : L \to \mathbb{R},$$

dari A_0 sedemikian sehingga $A(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})$.

Bukti:

Definisikan f bernilai $+\infty$, jika $x \notin U$ dan notasikan f memenuhi ketaksamaan untuk fungsi konveks pada semua titik di L. Pilih $\boldsymbol{w} \in L, \boldsymbol{w} \notin V_0$, maka untuk $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V_0, r > 0, s > 0$,

$$\frac{r}{r+s} A_0(\boldsymbol{x}) + \frac{s}{r+s} A_0(\boldsymbol{y}) = A_0\left(\frac{r}{r+s}\boldsymbol{x} + \frac{s}{r+s}\boldsymbol{y}\right)$$
$$\leq f\left(\frac{r}{r+s}\boldsymbol{x} + \frac{s}{r+s}\boldsymbol{y}\right)$$
$$\leq f\left(\frac{r}{r+s}(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w}) + \frac{s}{r+s}(\boldsymbol{y} + r\boldsymbol{w})\right)$$
$$\leq \frac{r}{r+s} f(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w}) + \frac{s}{r+s} f(\boldsymbol{y} + r\boldsymbol{w}).$$

Kedua ruas dikalikan dengan $r + s$, maka didapat

$$rA_0(\boldsymbol{x}) + sA_0(\boldsymbol{y}) \leq rf(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w}) + sf(\boldsymbol{y} + r\boldsymbol{w}).$$

Dengan demikian didapat bahwa

$$rA_0(\boldsymbol{x}) - rf(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w}) \leq sf(\boldsymbol{y} + r\boldsymbol{w}) - sA_0(\boldsymbol{y})$$
$$\Rightarrow r\big(A_0(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w})\big) \leq s\big(f(\boldsymbol{y} + r\boldsymbol{w}) - A_0(\boldsymbol{y})\big)$$
$$\Rightarrow \frac{A_0(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w})}{s} \leq \frac{f(\boldsymbol{y} + r\boldsymbol{w}) - A_0(\boldsymbol{y})}{r}.$$

Misalkan

$$g(\boldsymbol{x}, s) = \frac{A_0(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w})}{s},$$

dan

$$h(\boldsymbol{y}, r) = \frac{f(\boldsymbol{y} + r\boldsymbol{w}) - A_0(\boldsymbol{y})}{r}.$$

Dengan demikian didapat bahwa

$$g(\boldsymbol{x}, s) \leq h(\boldsymbol{y}, r),$$

dengan fungsi

$$g : V_0 \times P \to \mathbb{R},$$

$$h : V_0 \times P \to \mathbb{R},$$

dan P adalah bilangan real positif. Akibatnya, didapat bahwa $\sup g \leq \inf f$ pada $V_0 \times P$. Misalkan α adalah bilangan antara $\sup g$ dan $\inf f$. Dengan demikian

$$\frac{A_0(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w})}{s} \leq \alpha \leq \frac{f(\boldsymbol{y} + r\boldsymbol{w}) - A_0(\boldsymbol{y})}{r}.$$

Misalkan $t = -s$ jika $t < 0$ dan $t = r$ jika $t > 0$, serta $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$. Akibatnya didapat

$$\frac{A_0(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w})}{s} \leq \alpha$$

$$\Rightarrow A_0(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} - s\boldsymbol{w}) \leq \alpha s$$

$$\Rightarrow A_0(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}) \leq -\alpha t$$

$$\Rightarrow A_0(\boldsymbol{x}) + \alpha t \leq f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}),$$

dan

$$\frac{f(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{w}) - A_0(\boldsymbol{x})}{r} \geq \alpha$$

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{w}) - A_0(\boldsymbol{x}) \geq \alpha r$$

$$\Rightarrow f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}) - A_0(\boldsymbol{x}) \geq \alpha t$$

$$\Rightarrow A_0(\boldsymbol{x}) + \alpha t \leq f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}).$$

Oleh karena itu, didapat bahwa

$$A_0(\boldsymbol{x}) + \alpha t \leq f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}).$$

untuk setiap $\boldsymbol{x} \in V_0$, $t \in \mathbb{R}$. Sebagai ilustrasi, misalkan $V_1 = \{\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w} :: \boldsymbol{x} \in V_0, t \in \mathbb{R}\}$. Dengan demikian V_1 adalah subruang dari L yang memuat V_0. Definisikan A_1 pada V_1, dimana

$$A_1(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}) = A_0(\boldsymbol{x}) + t\alpha.$$

Perhatikan bahwa A_0 *affine*, maka A_1 juga *affine* pada V_1. Selain itu, $A_1 = A_0$ pada V_0. Perhatikan juga bahwa

$$A_1(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}) = A_0(\boldsymbol{x}) + t\alpha \leq f(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{w}).$$

Oleh karena itu, didapat bahwa A_1 adalah ekstensi dari A_0. Jika $V_1 = L$, maka pembuktian selesai, dimana $A = A_1$. Jika $V_1 \neq L$, akan dicari himpunan V_α yang memuat V_0, dimana $V_\alpha = L$.

Sekarang, secara umum misalkan V_α adalah subruang dari L yang memuat V_0, dan A_α adalah fungsi *affine* yang terdefinisi pada V_α, sedemikian sehingga A_α merupakan ekstensi dari A_0. Dengan demikian, $A_\alpha(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}), \forall\, \boldsymbol{x} \in V_\alpha \cap U$. Konstruksi pasangan $\{V_\alpha, A_\alpha\}$. Jika $V_\alpha \subseteq V_\beta$ dan A_β ekstensi dari A_α, maka dapat ditulis relasi biner $\ll$, dimana $\{V_\alpha, A_\alpha\} \ll \{V_\beta, A_\beta\}$. Misalkan $\mathcal{P}$ adalah keluarga pasangan-pasangan dari $\{V_\alpha, A_\alpha\}$. Dengan demikian $\mathcal{P}$ adalah himpunan terurut secara parsial dengan relasi biner $\ll$, karena alasan berikut.

a) $V_\alpha \subseteq V_\alpha$ dan A_α ekstensi dari A_α, sehingga berlaku $\{V_\alpha, A_\alpha\} \ll \{V_\alpha, A_\alpha\}$.

b) Jika $\{V_\alpha, A_\alpha\} \ll \{V_\beta, A_\beta\}$ dan $\{V_\beta, A_\beta\} \ll \{V_\gamma, A_\gamma\}$, maka $V_\alpha \subseteq V_\beta$ dan $V_\beta \subseteq V_\gamma$; serta A_β ekstensi dari A_α dan A_γ ekstensi dari A_β. Dengan demikian $V_\alpha \subseteq V_\gamma$ dan A_γ ekstensi dari A_α, sehingga $\{V_\alpha, A_\alpha\} \ll \{V_\gamma, A_\gamma\}$.

c) Jika $\{V_\alpha, A_\alpha\} \ll \{V_\beta, A_\beta\}$ dan $\{V_\beta, A_\beta\} \ll \{V_\alpha, A_\alpha\}$, maka $V_\alpha \subseteq V_\beta$ dan $V_\beta \subseteq V_\alpha$; serta A_β ekstensi dari A_α dan A_α ekstensi dari A_β. Denga demikian $V_\alpha = V_\beta$ dan $A_\alpha = A_\beta$, sehingga $\{V_\alpha, A_\alpha\} = \{V_\beta, A_\beta\}$.

Misalkan subkoleksi $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$. Ambil sebarang$\{V_\alpha, A_\alpha\}$ dan $\{V_\beta, A_\beta\}$anggota subkoleksi $\mathcal{T}$. Dengan demikian $\mathcal{T}$ adalah himpunan terurut secara total atau rantai, karena $\{V_\alpha, A_\alpha\}$ dan $\{V_\beta, A_\beta\}$ dapat dibandingkan (karena memenuhi $\{V_\alpha, A_\alpha\} \ll \{V_\beta, A_\beta\}$ atau $\{V_\beta, A_\beta\} \ll \{V_\alpha, A_\alpha\}$). Himpunan $\{V_0, A_0\}$ dan $\{V_1, A_1\}$ adalah salah satu anggota dari subkoleksi $\mathcal{T}$ karena keduanya dapat dibandingkan ($\{V_0, A_0\} \ll \{V_1, A_1\}$). Misalkan

$$V_T = \bigcup V_\alpha, \quad A_T = \bigcup A_\alpha,$$

dimana $\{V_\alpha, A_\alpha\}$ adalah anggota dari subkoleksi $\mathcal{T}$. Perhatikan bahwa, jika $\boldsymbol{x} \in V_T$, maka $\boldsymbol{x} \in V_\alpha$, untuk suatu α, sehingga $A_T(\boldsymbol{x}) = A_\alpha(\boldsymbol{x})$. Jika $\boldsymbol{x} \in V_T \cap U$, maka $\boldsymbol{x} \in V_\alpha \cap U$, untuk suatu α, sehingga $A_T(\boldsymbol{x}) = A_\alpha(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})$. Dengan demikian A_T adalah ekstensi dari A_α. Selain itu, diketahui bahwa $V_\alpha \subseteq V_T$, maka $\{V_T, A_T\}$ dapat diperbandingkan dengan $\{V_\alpha, A_\alpha\}$, sehingga $\{V_T, A_T\} \in \mathcal{T}$, dimana

$$\{V_\alpha, A_\alpha\} \ll \{V_T, A_T\}, \forall \{V_\alpha, A_\alpha\} \in \mathcal{T}.$$

Dengan demikian, $\{V_T, A_T\}$ adalah batas atas dari $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma Zorn (Lemma 2.6.2), maka $\mathcal{P}$ memiliki elemen maksimal, katakanlah $\{V_M, A_M\}$. Jika $V_M \neq L$, maka dengan menggunakan argumentasi yang sama, akan dicari lagi V_N, dimana $V_N = L$, sehingga elemen maksimalnya adalah $\{V_N, A_N\}$. Selanjutnya argument tetap dilanjutkan sehingga didapat dengan tepat himpunan $V_R = L$, sehingga $\{V_R, A_R\}$ adalah elemen maksimalnya. Perhatikan bahwa A_R terdefinsi pada L dengan sifat-sifat yang berlaku pada A_α, dengan $\{V_\alpha, A_\alpha\} \in \mathcal{P}$. Dengan demikian $A_R(\boldsymbol{x}_0) = A_0(\boldsymbol{x}_0)$, untuk setiap $\boldsymbol{x}_0 \in V_0$, dan

$$A_R(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}), \text{untuk setiap } \boldsymbol{x} \in L \cap U = U.$$

Jadi, dengan mengambil $A_R = A$, maka pembuktian selesai. ●

Misalkan $U \subseteq L$, L ruang linear bernorm. Fungsi $f : U \to \mathbb{R}$ memiliki **pendukung** di $\boldsymbol{x}_0 \in U$ jika terdapat fungsi *affine* $A : L \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $A(\boldsymbol{x}_0) = f(\boldsymbol{x}_0)$ dan $A(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})$, untuk setiap $\boldsymbol{x} \in U$.

Teorema 3.3.3.2

Fungsi f konveks pada himpunan konveks buka U subset ruang linear bernorm L jika dan hanya jika f memiliki pendukung di setiap titik dari U.

Bukti:

Pertama, jika f memiliki pendukung di setiap titik dari U, akan ditunjukkan bahwa f fungsi konveks pada U. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$. Misalkan

$$\boldsymbol{x}_0 = t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2,$$

dimana $t \in [0,1], \boldsymbol{x}_0 \in U$. Misalkan juga bahwa

$$A(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_0) + T(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0),$$

fungsi *affine* yang merupakan pendukung fungsi f di $\boldsymbol{x}_0$. Dengan demikian, berlaku bahwa

$$\begin{aligned} f(t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2) &= f(\boldsymbol{x}_0) \\ &= A(\boldsymbol{x}_0) \end{aligned}$$

$$= A(t\boldsymbol{x}_1 + (1-t)\boldsymbol{x}_2)$$
$$= tA(\boldsymbol{x}_1) + (1-t)A(\boldsymbol{x}_2)$$
$$\leq tf(\boldsymbol{x}_1) + (1-t)f(\boldsymbol{x}_2).$$

Jadi ,didapat bahwa f konveks.

Kemudian, jika f konveks pada U, akan ditunjukkan bahwa f memiliki pendukung di setiap titik di U. Ambil sebarang $\boldsymbol{x}_0 \in U$. Misalkan $\boldsymbol{u}$ vektor yang memiliki arah yang sama dengan $\boldsymbol{x}_0$ (atau sebarang vektor jika $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$) dan definisikan subruang $V_0 = \{\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u} : t \in \mathbb{R}\}$. Perhatikan bahwa interval

$$I = \{\, t : (\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) \in U\},$$

memuat 0 dan seperti biasa definisikan $g(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u})$. Perhatikan bahwa g konveks, sehingga berdasarkan Teorema 2.5.3.6, terdapat fungsi *affine*

$$G : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

sedemikian sehinga $G(0) = g(0)$ dan $G(t) \leq g(t)$ pada I. Misalkan $A_0 : V_0 \to \mathbb{R}$, dimana

$$A_0(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) = G(t).$$

Dengan demikian A_0 *affine*, dan berlaku

$$A_0(\boldsymbol{x}_0) = G(0) = g(0) = f(\boldsymbol{x}_0).$$

Selain itu, didapat bahwa

$$A_0(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}) = G(t) \leq g(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u}),$$

untuk $\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{u} \in V_0 \cap U$. Berdasarkan Teorema 3.3.3.1, diketahui bahwa A_0 dapat diekstensi menjadi fungsi $A : L \to \mathbb{R}$, dimana $A(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x})$ pada U. Jadi, f memiliki pendukung di $\boldsymbol{x}_0$. ●