

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LATAR BELAKANG

Salah satu kajian dalam matematika analisis adalah tentang analisis fungsional. Analisis fungsional adalah matematika abstrak yang berasal dari analisis klasik. Metode analisis fungsional serta hasilnya sangat penting dalam menjelaskan beragam lapangan dari matematika. Fungsi konveks adalah salah satu bahasan masalah dalam analisis fungsional.

Pembahasan tentang fungsi konveks sendiri, sangatlah sedikit dalam buku-buku teks analisis fungsional. Pembahasan fungsi konveks hanya sebatas tentang definisi dari fungsi konveks itu sendiri. Hal ini menimbulkan minat dari penulis untuk membahas lebih terperinci tentang fungsi konveks.

Penelitian tentang fungsi konveks sendiri bermula dari penelitian dari Holder (Holder, 1889), Stolz (Stolz, 1893) dan Hadamard (Hadamard, 1893). Kemudian, penelitian itu dikembangkan oleh Jensen yang memperkenalkan istilah tentang fungsi konveks ((Jensen, 1905), (Jensen, 1906)). Selanjutnya, penelitian tentang fungsi konveks semakin berkembang, diantaranya dikembangkan oleh Beckenbach (Beckenbach, 1948), Fenchel (Fenchel, 1953), Green (Green, 1953), Piexoto (Peixoto, 1948), Krasnosel'skii dan Rutickii (Krasnosel'skii dan Rutickii, 1961). Bahkan, Artin memunculkan bentuk baru dalam pendefinisian fungsi konveks (Artin, 1964).

Pada tahun 1889, Holder telah membuktikan jika $f''(x) \geq 0$, maka f memenuhi sifat, yang pada pembahasan nantinya, dinamakan sebagai ketaksamaan Jensen. Ketaksamaan Jensen juga merupakan salah satu alat untuk membuktikan bahwa suatu fungsi adalah konveks. Kemudian, pada tahun 1893, Stolz telah membuktikan jika f kontinu pada interval tutup $[a, b]$ dan memenuhi

$$(1.1) \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(y)],$$

maka f memiliki turunan kiri dan turunan kanan di setiap titik dari (a, b) . Pada tahun yang sama, Hadamard mendapatkan ketaksamaan integral dasar untuk

fungsi yang memiliki turunan yang monoton naik pada (a, b) . Berdasarkan hasil di atas, Jensen meneliti tentang fungsi konveks. Pada awalnya, Jensen menggunakan ketaksamaan (1.1) untuk mendefinisikan fungsi konveks dan menemukan bahwa jika fungsi f memenuhi ketaksamaan (1.1), maka f kontinu. Kemudian, secara lebih umum jika berlaku

$$f[(1-t)x + ty] \leq (1-t)f(x) + tf(y); t \in [0,1]$$

maka fungsi f konveks.

Pada awalnya, fungsi konveks sendiri adalah fungsi bernilai real yang terdefinisi pada sebarang interval dari \mathbb{R} . Tetapi, domain fungsi konveks dapat diperumum menjadi subset ruang linear bernorm. Untuk itu, pada tugas akhir ini, penulis bermaksud untuk membahas tentang fungsi konveks pada subset ruang linear bernorm.

1.2 RUMUSAN MASALAH

Berdasarkan latar belakang di atas, permasalahan dalam tugas akhir ini dirumuskan sebagai berikut.

- Apa saja sifat-sifat ruang linear bernorm?
- Bagaimanakah bentuk fungsi pada subset ruang linear bernorm?
- Apa pengertian himpunan konveks dan himpunan *affine*?
- Bagaimanakah bentuk fungsi konveks pada subset ruang linear bernorm dan sifat-sifat yang berlaku dalam fungsi tersebut?

1.3 TUJUAN PENULISAN

Tujuan penulisan yang ingin dicapai oleh penulis adalah:

- mengetahui sifat-sifat ruang linear bernorm;
- mengetahui bentuk fungsi pada subset ruang linear bernorm;
- mengetahui himpunan konveks dan himpunan *affine*;
- mengetahui bentuk fungsi konveks pada subset ruang linear bernorm dan sifat-sifat yang berlaku dalam fungsi tersebut; serta

1.4 SISTEMATIKA PENULISAN

Secara garis besar, penulisan pembahasan tugas akhir ini didasarkan dari buku *Convex Functions* (Robert dan Varberg, 1973), termasuk dalam penggunaan istilah, susunan teorema, dan subbahasan yang dibahas. Pembuktian teorema-teorema dalam tugas akhir ini, didasarkan kepada buku tersebut dan beberapa sumber buku pada daftar pustaka, dengan menambahkan beberapa unsur yang tak teruraikan pada pembuktian tersebut.

Susunan pembahasan teori-teori dalam tugas akhir ini didasarkan pada urutan topik pembahasan-pembahasan dibawah ini.

- a. Ruang linear atau ruang vektor.
- b. Barisan dan fungsi pada \mathbb{R}^n .
- c. Ruang linear bernorm dan ruang hasil kali dalam.
- d. Himpunan kompak.
- e. Fungsi konveks pada subset dari bilangan real, beserta sifat-sifat yang berlaku pada fungsi tersebut.
- f. Sifat-sifat ruang linear bernorm.
- g. Fungsi pada subset ruang linear bernorm beserta sifat-sifat yang berlaku pada fungsi tersebut.
- h. Himpunan konveks dan himpunan *affine*.
- i. Fungsi konveks pada subset ruang linear bernorm beserta sifat-sifat yang berlaku pada fungsi tersebut.