BAB III

METODE UNTUK MENAKSIR VOLATILITAS

3.1. Pendahuluan

Dalam menentukan harga opsi *call* dan opsi *put* dibutuhkan parameter harga saham (S), waktu jatuh tempo (T), waktu sekarang (l), suku bunga (r), *strike price* (K), dan volatilitas (σ). Akan tetapi dalam hal ini parameter volatilitas tidak diketahui, sehingga perlu ditaksir dari data yang ada. Pada tugas akhir ini akan ditaksir besarnya nilai volatilitas dengan menggunakan beberapa metode. Untuk menaksir volatilitas digunakan data historis harga saham, seperti harga saham pembukaan (O), harga saham penutupan (C), harga saham terendah (L), dan harga saham tertinggi (H). Selain itu *Implied Volatility* dapat juga digunakan dalam menaksir volatilitas, yaitu jika diberikan besarnya harga opsi dan diketahui nilai $S, T, K,$ dan r kemudian menentukan nilai volatilitas. Menghitung volatilitas (σ) dengan cara seperti ini disebut *Implied Volatility*. *Implied Volatility* adalah penaksiran volatilitas yang dalam penentuannya menggunakan harga opsi yang diperoleh dengan cara menyamakan harga opsi teoritis dengan harga opsi dipasar, yaitu $c(\sigma) = c^*$. Metode yang sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan tersebut adalah metode *Newton-Raphson*. Dengan memisalkan $F(\sigma) = c(\sigma) - c(\sigma^*)$, maka dapat dilihat bahwa volatilitas adalah akar dari persamaan $F(\sigma)$.

3.1.1. Penaksir Volatilitas dengan Menggunakan Data Harga Saham Penutupan

Akan ditaksir σ dengan menggunakan t unit waktu dari data historis harga saham. Misalkan waktu sekarang l dan data harga historis harga saham $S(y)$, dengan $0 \leq y \leq t$. Definisikan peubah acak:

$$X_i = \ln\left(\frac{S(il)}{S\big((i-1)l\big)}\right)$$

di mana

$$l = \frac{t}{n}.$$

Untuk menaksir σ digunakan $t = 1$ tahun. Karena dalam 1 tahun kira-kira ada 252 hari transaksi, maka $l = \frac{1}{252}$. Peubah acak di atas perkembangan harganya diasumsikan mengikuti gerak *Brown Geometric* dengan parameter μ dan σ, dan $X_1, X_2, \dots, X_n$ merupakan peubah acak berdistribusi normal dengan rata-rata $l\mu$ dan variansi $l\sigma^2$. Untuk menaksir $l\sigma^2$ dapat digunakan $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{(n-1)}$. Sehingga diperoleh penaksir untuk σ^2 adalah

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{l}\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$$

$$Var(\hat{\sigma}^2) = \frac{1}{l}\frac{2(l\sigma^2)^2}{n-1} = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

Perhatikan n harga saham penutupan harian yang berurutan, yaitu $C_1, C_2, \dots, C_n$. Misalkan C_0 harga saham sebelum n hari dan

$$X_i = \ln\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right) = \ln(C_i) - \ln(C_{i-1})$$

Variansi sampel dari data adalah sebagai berikut:

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Sehingga dapat diambil

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{\frac{1}{252}} S^2$$

sebagai penaksir, dan

$$S\sqrt{252} \tag{3.1}$$

dapat digunakan untuk menaksir σ. Jika μ dan σ adalah parameter rata-rata dan volatilitas dari gerak *Brown Geometric* maka

$$E\left[\ln\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right] = l\mu = \frac{\mu}{252}$$

$$Var\left[\ln\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right] = l\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{252}$$

3.1.2. Penaksir Volatilitas dengan Menggunakan Data Harga Saham Pembukaan dan Penutupan

Misalkan C_i didefinisikan sebagai harga saham di akhir perdagangan pada hari ke-*i* dan O_i adalah harga pembukaan saham pada saat transaksi yang dimulai pada hari ke-*i*. Diasumsikan harga saham mengikuti gerak *Brown Geometric* dan $\ln\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)$ adalah peubah acak yang berdistribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi $\frac{\sigma^2}{252}$.

$$\ln\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right) = \ln\left(\frac{C_i}{O_i}\frac{O_i}{C_{i-1}}\right) = \ln\left(\frac{C_i}{O_i}\right) + \ln\left(\frac{O_i}{C_{i-1}}\right)$$

Diasumsikan:

- $\frac{C_i}{O_i}$ dan $\frac{O_i}{C_{i-1}}$ saling bebas
- Rasio perubahan harga selama hari transaksi dengan perubahan harga yang terjadi pada saat transaksi ditutup adalah saling bebas.

$$Var\left[\ln\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right] = Var\left[\ln\left(\frac{C_i}{O_i}\right)\right] + Var\left[\ln\left(\frac{O_i}{C_{i-1}}\right)\right]$$

$$= Var\,(C_i^* - O_i^*) + Var(O_i^* - C_{i-1}^*)$$

di mana, $C_i^* = \ln(C_i)$ dan $O_i^* = \ln(O_i)$.

Besarnya nilai saham pada pembukaan (O) dan penutupan (C) yang tidak jauh berbeda mengakibatkan besarnya nilai $C_i^* - O_i^*$ dan $O_i^* - C_{i-1}^*$ mempunyai rata-rata 0 dan

$$\frac{\sigma^2}{252} = Var\left[\ln\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right]$$

sehingga,

$$Var\left[\ln\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right] = Var\,(C_i^* - O_i^*) + Var(O_i^* - C_{i-1}^*)$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}(C_i^* - O_i^*)^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(O_i^* - C_{i-1}^*)^2}{n}$$

Dapat diambil penaksirnya sebagai berikut:

$$\frac{\hat{\sigma}^2}{252} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(C_i^* - O_i^*)^2}{n} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(O_i^* - C_{i-1}^*)^2}{n}$$

Akhirnya, diperoleh penaksir untuk σ adalah

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{252}{n}\sum_{i=1}^{n}[(C_i^* - O_i^*)^2 + (O_i^* - C_{i-1}^*)^2]} \qquad (3.2)$$

3.1.3. Penaksir Volatilitas dengan Menggunakan Data Harga Saham Pembukaan-Penutupan, dan Terendah-Tertinggi

Dalam sub bab ini akan dibahas cara menaksir volatilitas menggunakan data harga saham pembukaan-penutupan, dan terendah-tertinggi. Misalkan $H(t)$ adalah harga tertinggi dari suatu harga saham dan $L(t)$ adalah harga terendah dari suatu harga saham dengan panjang interval t.

Jadi,

$$H(t) = \max_{0 \le y \le t} S(y)$$

$$L(t) = \min_{0 \le y \le t} S(y)$$

Diasumsikan harga saham mengikuti gerak *Brown Geometric* dengan rata-rata nol dan volatilitas σ, sehingga menurut Sheldon (2003: 140) dapat ditunjukkan bahwa

$$E\left[\left(H_i^*(t) - L_i^*(t)\right)^2\right] = 2{,}773\, Var\left(\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right)$$

di mana $H_i^* = \ln(H_i)$ dan $L_i^* = \ln(L_i)$.

Misalkan O_i dan C_i adalah harga pembukaan dan penutupan pada hari transaksi ke- i. Misalkan H_i dan L_i adalah harga tertinggi dan terendah dalam satu hari. Karena

$$E\left[\ln(\frac{C_i}{O_i})\right] \approx 0$$

maka perkiraan harga selama hari transaksi mengikuti gerak *Brown Geometric* dengan besarnya rata-rata nol. Dengan menggunakan persamaan yang sebelumnya, maka dapat ditulis

$$E[(H_i^* - L_i^*)^2] \approx 2{,}773\, Var\left(\ln\left(\frac{C_i}{O_i}\right)\right)$$

Kemudian dengan menggunakan data harga selama n hari dapat menaksir $Var\left(\ln\left(\frac{C_i}{O_i}\right)\right)$ dengan penaksir

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2{,}773}\sum_{i=1}^{n}\frac{(H_i^* - L_i^*)^2}{n}$$

$$= \frac{0{,}361}{n}\sum_{i=1}^{n}(H_i^* - L_i^*)^2$$

Karena $Var\left(\ln\left(\frac{C_i}{O_i}\right)\right) = Var(C_i^* - O_i^*)$ sehingga dapat juga ditaksir dengan

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(C_i^* - O_i^*)^2$$

Setiap kombinasi linear dari penaksir dapat dibentuk sebagai berikut:

$$\alpha\mathcal{E}_1 + (1-\alpha)\mathcal{E}_2$$

persamaan di atas dapat juga digunakan untuk menaksir $Var(\ln(C_i - O_i)$.

Penaksir terbaik untuk tipe ini (variansi yang paling kecil) dapat ditunjukkan dengan hasil $\alpha = \frac{0,5}{0,361} = 1,39$. Sehingga penaksir terbaik dari $Var\left(\ln\left(\frac{C_i}{O_i}\right)\right)$ adalah

$$\mathcal{E} = \frac{0,5}{0,361}\mathcal{E}_1 - 0,39\mathcal{E}_2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[0,5(H_i^* - L_i^*)^2 - 0,39(C_i^* - O_i^*)^2]$$

Karena $Var\left(\ln\left(\frac{O_i}{C_{i-1}}\right)\right) = Var\ (\ln(O_i^* - C_{i-1}^*))$ dapat ditaksir dengan

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(O_i^* - C_{i-1}^*)^2$$

Jika

$$\mathcal{E} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(O_i^* - C_{i-1}^*)^2 = \frac{1}{n}[0,5(H_i^* - L_i^*)^2 - 0,39(C_i^* - O_i^*)^2 + (O_i^* - C_{i-1}^*)^2]$$

Maka penaksir dari

$$Var\left(\ln\left(\frac{C_i}{O_i}\right)\right) + Var\ln(O_i^* - C_{i-1}^*)$$

$$= Var\left(\ln\left(\frac{C_i}{C_{i-1}}\right)\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{252}$$

Akibatnya dapat ditaksir besarnya nilai volatilitas dengan parameter σ, yaitu:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{252}{n}\sum_{i=1}^{n}[0,5(H_i^* - L_i^*)^2 - 0,39(C_i^* - O_i^*)^2 + (O_i^* - C_{i-1}^*)^2]} \qquad (3.3)$$

3.2. Implied Volatility

Metode *Newton-Raphson* juga dapat digunakan untuk menaksir volatilitas (σ) selain metode yang telah dibahas sebelumnya. Diberikan harga opsi dan diketahui $S, T, K,$ dan r kemudian menentukan nilai volatilitasnya. Menghitung volatilitas (σ) dengan cara seperti ini disebut dengan *Implied Volatility*. Metode *Newton-Raphson* ini adalah metode yang paling banyak digunakan dalam *Implied Volatility*.

3.2.1. Harga Opsi Sebagai Fungsi dari Volatilitas

Asumsikan besarnya nilai $S, T, K,$ dan r telah diketahui. Harga opsi sebagai fungsi dari σ didefinisikan sebagai $c(\sigma)$. Diberikan harga c^* akan ditentukan *Implied Volatility* σ^*, sehingga akan menghasilkan $c(\sigma) = c^*$. Persamaan tak linear $c(\sigma) = c^*$ akan mempunyai solusi jika dan hanya jika (Higham, 2008: 132):

$$\text{maks}\left(\mathrm{S} - \mathrm{K}\, e^{\mathrm{r}(\mathrm{T}-\mathrm{t})}, 0\right) \leq c^* < S \tag{3.4}$$

jika solusinya ada, maka solusinya unik. Dalam hal ini untuk menghitung volatilitas diperlukan solusi persamaan tak linear dan akan digunakan metode *Newton-Raphson*. Karena nilai volatilitas tak negatif $(\sigma \, \epsilon \, [0, \infty])$, maka akan dicari $c(\sigma)$ pada kasus volatilitas yang besar atau kecil.

Pembuktian persamaan (3.4) dilakukan sebagai berikut. Pertama untuk $\sigma \to \infty$,

Jika

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + 0{,}5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\left(\sqrt{T-t}\right)}$$

maka $d_1 \to \infty$ dan $N(d_1) \to 1$.

Kedua, untuk $\sigma \to \infty$,

Jika

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r - 0{,}5\sigma^2)(T-t)}{\sigma(\sqrt{T-t})}$$

maka $d_2 \to -\infty$ dan $N(d_2) \to 0$.

Dengan mengikuti persamaan

$$c(\sigma) = SN(d_1) - Ke^{-\mathrm{r(T-t)}}N(d_2)$$

diperoleh

$$\lim_{\sigma \to \infty} c(\sigma)$$

Sekarang lihat untuk $\sigma \to 0^+$ memiliki 3 kasus sebagai berikut:

Kasus 1: $S - Ke^{-\mathrm{r(T-t)}} > 0$. Pada kasus ini $\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t) > 0$, sehingga untuk $\sigma \to 0^+$ diperoleh $d_1 \to \infty$, $N(d_1) \to 1$, $d_2 \to \infty$ dan $N(d_2) \to 1$. Maka diperoleh $c \to S - Ke^{-\mathrm{r(T-t)}}$.

Kasus 2: $S - Ke^{-\mathrm{r(T-t)}} < 0$. Pada kasus ini $\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t) < 0$, sehingga untuk $\sigma \to 0^+$ diperoleh $d_1 \to -\infty$, $N(d_1) \to 0$, $d_2 \to -\infty$ dan $N(d_2) \to 0$. Maka diperoleh $c \to 0$.

Kasus 3: $S - Ke^{-\mathrm{r(T-t)}} = 0$. Pada kasus ini $\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t) = 0$, sehingga untuk $\sigma \to 0^+$ diperoleh $d_1 \to 0$, $N(d_1) \to \frac{1}{2}$, $d_2 \to 0$ dan $N(d_2) \to \frac{1}{2}$. Maka diperoleh $c \to \frac{1}{2}\left(S - Ke^{-\mathrm{r(T-t)}}\right) = 0$.

Dari ketiga kasus tersebut dapat diringkas dengan formula sebagai berikut:

$$\lim_{\sigma \to 0^+} c(\sigma) = \max\left(S - Ke^{-\mathrm{r(T-t)}}, 0\right)$$

Turunan dari c terhadap σ disebut $vega$ $\left(vega = S\sqrt{T-t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}\right)$. Turunan c terhadap σ $\left(\frac{\partial c}{\partial \sigma}\right) > 0$. Karena $c(\sigma)$ kontinu dengan $\frac{\partial c}{\partial \sigma}$ positif, maka dapat disimpulkan c monoton naik pada $[0, \infty)$. Dari persamaan

$$\lim_{\sigma \to 0^+} c(\sigma) = S$$

dan

$$\lim_{\sigma \to 0^+} c(\sigma) = \max\left(S - Ke^{-\mathrm{r(T-t)}}, 0\right)$$

Dapat disimpulkan bahwa persamaan tak linear nilai dari $c(\sigma) = c^*$ mempunyai solusi jika dan hanya jika harus terletak antara

$$\max\left(S - Ke^{-\mathrm{r(T-t)}}, 0\right) \le c^* < S$$

Selanjutnya akan dicari tahu tebakan awal (yaitu $\hat{\sigma}$) sehingga metode *Newton-Raphson* akan selalu konvergen. Pertama-tama akan dicari turunan kedua dari $c(\sigma)$ yaitu

$$\frac{\partial^2 c}{\partial^2 \sigma^2}.$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = -\frac{S\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}d_1^2}d_1\frac{\partial d_1}{\partial \sigma}$$

Dari persamaan,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (r + 0{,}5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

akan diperoleh

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t)}{\sigma^2\sqrt{T-t}} + \frac{1}{2}\sqrt{T-t}$$

$$= -\left[\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)}{\sigma^2\sqrt{T-t}}\right]$$

dan

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = \frac{S\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}d_1^2} \frac{d_1 d_2}{\sigma} = \frac{d_1 d_2}{\sigma}\frac{\partial c}{\partial \sigma}$$

$\frac{\partial c}{\partial \sigma}$ maksimum di $[0, \infty)$ pada saat $\sigma = \hat{\sigma}$, dengan

$$\hat{\sigma} = \sqrt{2\left|\frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + r(T-t)}{T-t}\right|} \tag{3.5}$$

Jadi $\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2}$ dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial^2 c}{\partial \sigma^2} = \frac{T-t}{4\sigma^3}(\hat{\sigma}^4 - \sigma^4)\frac{\partial c}{\partial \sigma} \tag{3.6}$$

Persamaan (3.6) menunjukkan bahwa $c(\sigma)$ konveks untuk $\sigma < \hat{\sigma}$ dan konkaf untuk $\sigma > \hat{\sigma}$. Nilai $\hat{\sigma}$ akan digunakan sebagai tebakan awal pada metode *Newton-*

Raphson. Dengan $\hat{\sigma}$ ini pula metode *Newton-Raphson* akan selalu konvergen. Penjelasan ini akan dibahas pada subbab selanjutnya.

3.2.2. Menaksir Volatilitas Dengan Metode *Newton-Raphson*

Berikut adalah metode *Newton-Raphson* yang digunakan dalam *Implied Volatility* (Higham, 2008: 134):

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{F(\sigma(n))}{F'(\sigma(n))}$$

dengan $F(\sigma) = c(\sigma) - c(\sigma^*)$ dan $F'(\sigma) = \frac{\partial c}{\partial \sigma}$.

Gunakan $F(\sigma^*) = 0$ dan *mean value theorem* sehingga akan diperoleh:

$$\sigma_{n+1} - \sigma^* = \sigma_n - \sigma^* - \frac{F(\sigma_n) - F(\sigma^*)}{F'(\sigma_n)}$$

$$= \sigma_n - \sigma^* - \frac{(\sigma_n - \sigma^*)F'(\xi_n)}{F'(\sigma_n)}$$

Untuk setiap ξ_n diantara σ_n dan σ^*. Oleh sebab itu persamaan tersebut dapat juga ditulis sebagai berikut:

$$\frac{\sigma_{n+1} - \sigma^*}{\sigma_n - \sigma^*} = 1 - \frac{F'(\xi_n)}{F'(\sigma_n)} \qquad (3.7)$$

Karena *vega* selalu positif maka $F'(\sigma)$ juga positif. Berdasarkan hasil sebelumnya F' mencapai maksimum pada $\hat{\sigma}$ di persamaan (3.5). Kemudian, gunakan tebakan awal $\sigma_0 = \hat{\sigma}$ dan $0 < F'(\xi_0) < F'(\hat{\sigma})$ dipersamaan (3.7) sehingga diperoleh:

$$0 < \frac{\sigma_1 - \sigma^*}{\sigma_0 - \sigma^*} < 1 \qquad (3.8)$$

Ini berarti bahwa *error* σ_1 lebih kecil dibandingkan *error* σ_0. *Error* σ_1 mempunyai tanda yang sama dengan *error* σ_0. Lanjutkan dengan menggunakan $\hat{\sigma} < \sigma^*$. Dari persamaan (3.8) diperoleh bahwa $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma^*$. Kemudian dari persamaan (3.6) diperoleh bahwa $F''(\sigma) < 0$ untuk setiap $\sigma > \hat{\sigma}$ dan ξ_1 pada persamaan (3.7) diantara σ_1 dan σ^*. Jadi, $0 < F'(\xi_1) < F'(\sigma_1)$ akibatnya

$$0 < \frac{\sigma_2 - \sigma^*}{\sigma_1 - \sigma^*} < 1$$

Proses ini dapat dilakukan terus menerus sehingga pada iterasi ke $-n$ diperoleh

$$0 < \frac{\sigma_{n+1} - \sigma^*}{\sigma_n - \sigma^*} < 1 \qquad , n \geq 0$$

Jadi, *error* yang diperoleh monoton dengan n yang semakin meningkat. Hal ini berarti dengan menggunakan $\hat{\sigma}$ sebagai tebakan awal, kekonvergenan pada metode *Newton-Raphson* akan selalu tercapai.