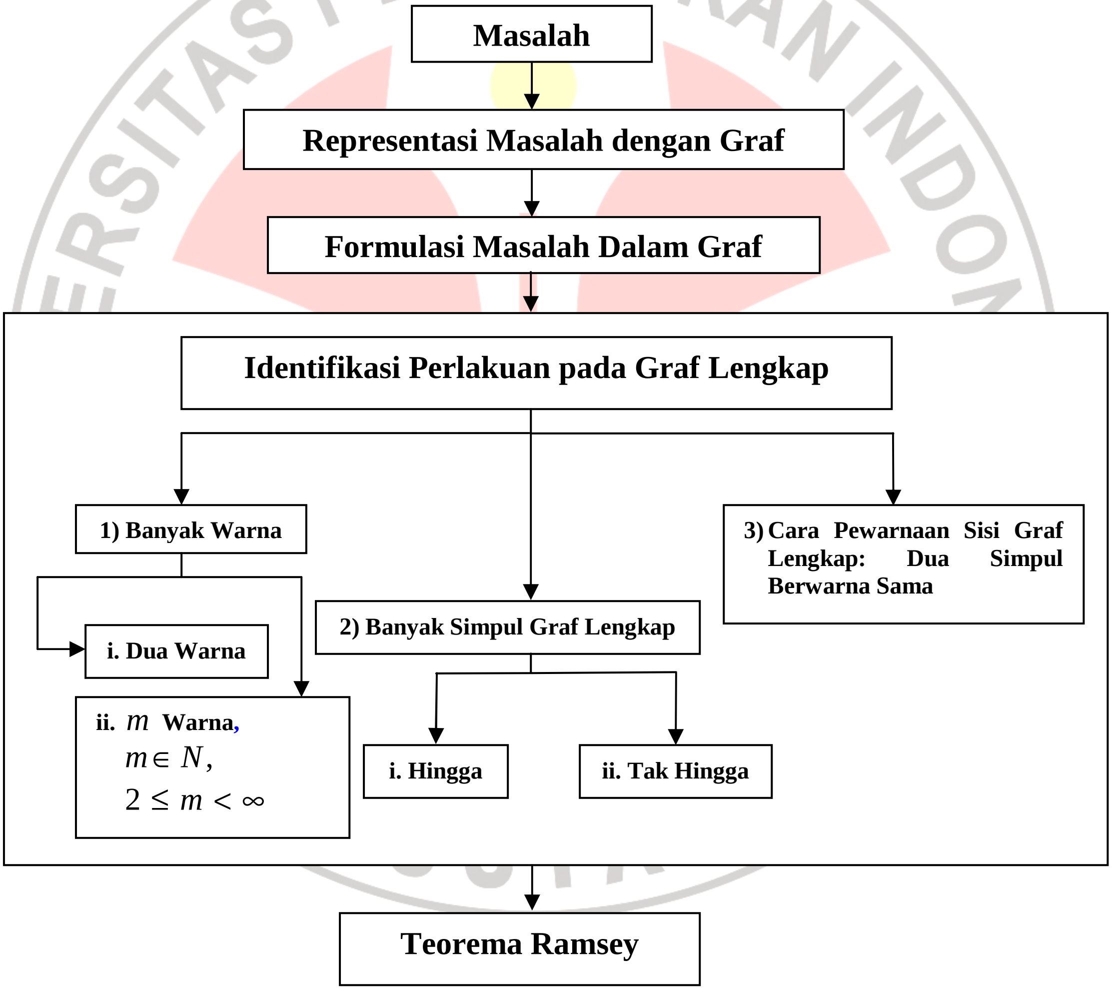
BAB III

TEORI RAMSEY

Pada bab ini disajikan gambaran umum bahasan teori Ramsey dalam formulasi graf untuk membantu memahami bahasan tersebut. Gambaran umum tersebut disajikan berupa peta konsep yang merupakan pokok-pokok bahasan tugas akhir ini (Bagan 3.1).



Bagan 3.1
Peta Konsep Teori Ramsey

Peta konsep tersebut adalah petunjuk tentang awal dan akhir dari bahasan teori Ramsey dalam formulasi graf. Pada bab ini disajikan penjelasan dari peta konsep tersebut.

3.1 Formulasi Masalah Dalam Graf

Permasalahan dosen di Subbab 1.1 direpresentasikan dengan graf. Sebelum memformulasikan masalahnya dalam graf, didapatkan beberapa hasil di bawah ini:

1) Karena sebarang dua orang mahasiswa di S pasti berelasi, misal $|S| = n,$ maka terbentuklah graf lengkap dengan n simpul, yaitu K_n.
2) Karena relasi sebarang dua orang mahasiswa di $S,$ yaitu tidak saling kenal (direpresentasikan dengan sisi merah) atau saling kenal (direpresentasikan dengan sisi biru), maka graf lengkap yang dimaksud 1) adalah graf lengkap dengan sebarang sisinya berwarna merah atau berwarna biru.
3) Karena sebarang sisi graf lengkap pada 2) berwarna merah atau berwarna biru. Bisa dikatakan semua sisi graf lengkap diwarnai dengan warna merah atau warna biru, dengan sebarang cara pewarnaan.
4) Karena ada tiga orang mahasiswa yang saling kenal satu sama lain atau tiga orang mahasiswa yang tidak saling kenal satu sama lain, di antara semua mahasiswa di S. Bisa dikatakan dalam formulasi graf, yaitu: ”Ketika semua sisi K_n diwarnai dengan warna merah atau warna biru, di K_n akan terdapat K_3 (semua sisinya berwarna biru) atau K_3 (semua sisinya berwarna merah)”.

Dari keempat poin tersebut, untuk kasus ini, didapatkan formulasi masalah dalam graf, yang secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

”Diberikan $b, r \in N$. Berapakah nilai n, sehingga ketika semua sisi K_n diwarnai dengan warna merah atau warna biru, akan terdapat subgraf K_b (semua sisinya berwarna biru) atau subgraf K_r (semua sisinya berwarna merah)?”.

Formulasi masalah dalam graf tersebut, hanyalah salah satu dari topik yang ada di lingkup bahasan teori Ramsey. Dengan dituliskannya formulasi tersebut, teori Ramsey dapat dipahami dan ditelaah lebih jauh.

3.2 Identifikasi Perlakuan pada Graf Lengkap

Dari formulasi masalah tersebut, setidaknya didapatkan tiga perlakuan pada graf lengkap, yaitu:

1) Banyak warna. Pada formulasi masalah tersebut, sebarang sisi K_n hanya diwarnai dengan dua warna (masalah dua warna). Akibatnya, bisa dikembangkan untuk m warna, $m \in N$ (masalah m warna).
2) Banyak simpul K_n. Banyak simpul K_n dapat berhingga atau tak berhingga.
3) Cara pewarnaan sisi K_n: dua simpul berwarna sama. Telah diketahui sebarang dua simpul dihubungkan oleh sisi yang berwarna, misalnya sisi merah. Artinya dalam formulasi graf, sisi merah tersebut menyatakan sebarang dua simpul berwarna merah. Dengan kata lain, pada formulasi masalah di atas, cara pewarnaan sisinya hanya mewarnai sebarang dua simpul berwarna sama.

3.3 Teorema Ramsey

Kelima teorema Ramsey yang dipilihkan, semuanya diberi nama sesuai maksud teorema tersebut. Kelima teorema tersebut adalah:

1) Teorema 3.5: Penentuan Nilai n.
2) Teorema 3.6: Rentangan Keberadaan Bilangan Ramsey.
3) Teorema 3.7: Hasil Lain Dalam Masalah Dua Warna.
4) Teorema 3.8: Hasil Dalam Masalah m Warna.
5) Teorema 3.9: Hasil Dalam Masalah m Warna, Jika K_n Graf Tak Hingga.

Sebelum membahas kelima teorema Ramsey tersebut, permasalahan dosen di kelas Matematika Kombinatorik akan diselesaikan terlebih dahulu pada Subbab 3.4. Setelah itu dilanjutkan dengan bahasan mengenai pembuktian kelima teorema Ramsey yang disajikan dari Subbab 3.5 sampai Subbab 3.9.

3.4 Penentuan Nilai $R(3,3)$

Mengenai persoalan dosen di kelas Matematika Kombinatorik, persoalannya dapat diformulasikan dalam graf. K_n sisi-sisinya diwarnai dengan warna biru atau warna merah. Akan dicari nilai n, sehingga K_n selalu memuat K_3 biru atau K_3 merah.

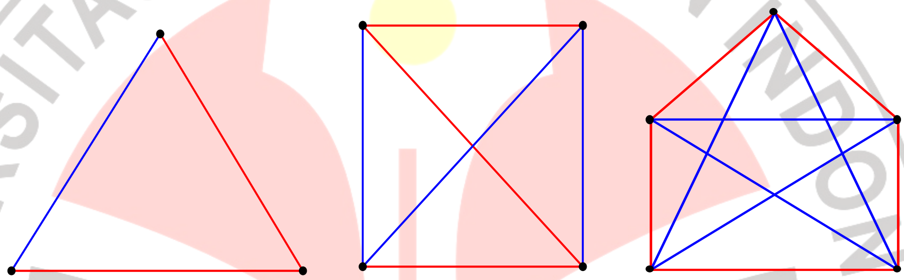
Berikut ini adalah langkah-langkah penelusuran penentuan nilai n sebagai indeks dari K_n. Berdasarkan Gambar 3.4.1, untuk $n = 1, 2$ dapat dengan mudah terlihat tidak mungkin terdapat K_3 merah dan K_3 biru.

K_1 K_2

Gambar 3.4.1

K_1 dan K_2, tak memuat K_3 merah dan K_3 biru

Berdasarkan Gambar 3.4.2, untuk $n = 3, 4, 5,$ ada cara pewarnaan sisi pada K_3, K_4, dan K_5, sehingga tidak terdapat K_3 merah dan K_3 biru. Dengan kata lain, K_3, K_4, dan K_5, tak memuat K_3 merah dan K_3 biru.

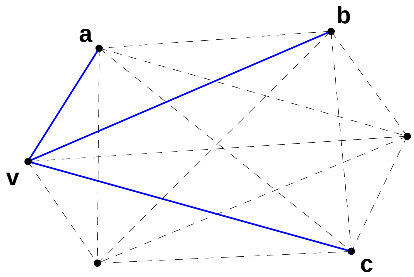


K_3 K_4 K_5

Gambar 3.4.2

K_3, K_4, dan K_5, tak memuat K_3 merah dan K_3 biru

Akibat hasil tersebut, nilai n haruslah $n \geq 6$. Untuk $n = 6$ didapat K_6 (Gambar 3.4.3). Untuk sebarang simpul di K_6, misal simpul v, maka ada lima sisi yang berinsiden dengan simpul v. Berdasarkan Definisi 2.4.2, didapat paling sedikit ada tiga sisi berwarna sama (misal pada Gambar 3.4.3 ditunjukkan dengan sisi biru), yaitu sisi va, sisi vb, dan sisi vc.

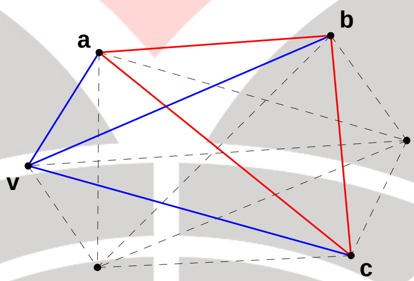


K_6

Gambar 3.4.3

K_6 memuat paling sedikit tiga sisi berwarna sama

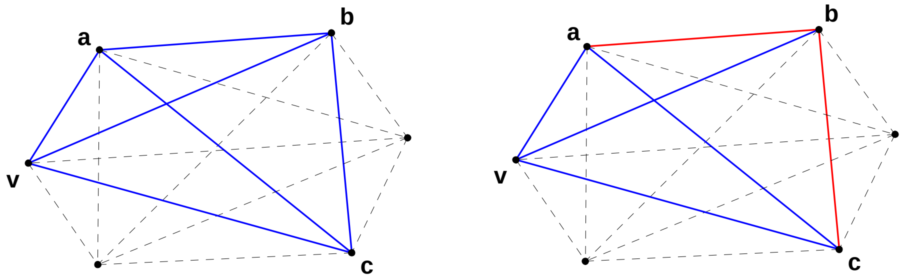
Pada Gambar 3.4.3 didapat sisi ab, sisi bc, dan sisi ac. Jika warna ketiga sisi tersebut tidak ada yang biru maka termuatlah K_3 merah (Gambar 3.4.4). Sebaliknya, jika tidak ada sisi merah atau salah satu sisi di antara ab, bc, dan ac bukan merupakan sisi merah maka termuatlah K_3 biru (Gambar 3.4.5).



K_6

Gambar 3.4.4

K_6 memuat K_3 merah



K_6 K_6

Gambar 3.4.5
K_6 memuat K_3 biru

Dengan demikian, nilai n yang dicari adalah $n = 6$. Dengan kata lain, K_n adalah K_6. Berdasarkan penelusuran tersebut, didapat $n = 6 = R(3,3)$. Nilai n ini ternyata tidak tunggal, karena untuk $n > 6$ berlaku. Tetapi nilai $R(3,3)$ bersifat tunggal karena $R(3,3)$ merupakan nilai n terkecil (Lesser, 2001: 3-4). ■

3.5 Penentuan Nilai *n*

Setelah diketahui ketika setiap sisi K_6 diwarnai dengan warna merah atau warna biru, K_6 memuat K_3 merah atau memuat K_3 biru. Lalu, “Bagaimanakah cara menentukan nilai *n*, untuk nilai *r* dan *b* yang lain?”. Pada subbab ini disajikan teorema yang secara eksplisit merupakan rumusan nilai n yang dicari, sebagai jawaban dari pertanyaan tersebut.

Teorema 3.5: Penentuan nilai *n*. Diberikan $b \geq 2,\ r \geq 2,$ dan $n = \binom{r+b-2}{r-1}$. Jika semua sisi K_n diwarnai dengan warna biru atau warna merah maka K_n selalu memuat K_b (dengan semua sisi berwarna biru) atau selalu memuat K_r (dengan semua sisi berwarna merah) dengan $b, r, \in N$ (Bryant, 1993: 203).

Bukti.

Pembuktian teorema ini menggunakan Prinsip Induksi Matematika (Definisi 2.4.1) pada $r+b$. *Langkah pertama*:

1) Untuk $r = 2$ didapat $n = \binom{2+b-2}{2-1} = b.$ Hasilnya, jika $b \geq 2$ didapat $K_{n=b\geq 2}$ yang sisinya diwarnai dengan warna merah atau warna biru. Akan terdapat $K_{r=2}$ jika salah satu sisi atau beberapa sisi atau semua sisi $K_{n=b\geq 2}$ diwarnai merah, atau terdapat $K_{b\geq 2}$ jika semua sisi $K_{n=b\geq 2}$ tidak diwarnai dengan warna merah.

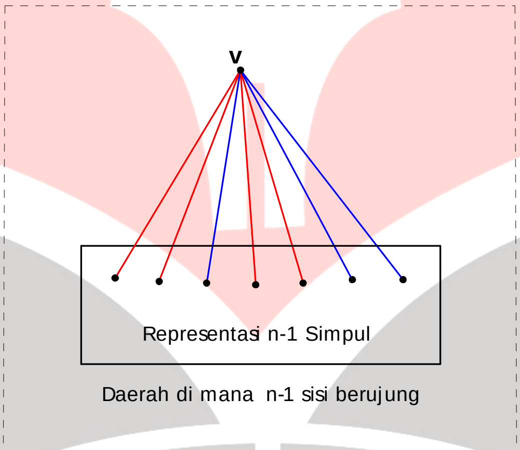
2) Untuk $b = 2$ didapat $n = \binom{r+2-2}{2-1} = r.$ Hasilnya, jika $r \geq 2$ didapat $K_{n=r\geq 2}$ yang sisinya diwarnai dengan warna merah atau warna biru. Akan terdapat $K_{b=2}$ jika salah satu sisi atau beberapa sisi atau semua sisi $K_{n=r\geq 2}$ diwarnai biru, atau terdapat $K_{r\geq 2}$ jika semua sisi $K_{n=r\geq 2}$ tidak diwarnai dengan warna biru.

Langkah kedua. Untuk $r > 2, b > 2,$ dan $(r+b)-1$ andaikan benar dua pernyataan berikut:

1) K_{n_1} memuat K_r atau K_{b-1}, $n_1 = \binom{r+(b-1)-2}{r-1}$, ketika setiap sisi K_{n_1} diwarnai dengan warna merah atau warna biru.

2) K_{n_2} memuat K_{r-1} atau K_b, $n_2 = \binom{(r-1)+b-2}{(r-1)-1}$, ketika setiap sisi K_{n_2} diwarnai dengan warna merah atau warna biru.

Langkah ketiga. Ambil sebarang simpul di K_n misal simpul v, maka ada $n-1$ sisi yang berinsiden pada simpul tersebut (Gambar 3.5.1).



Gambar 3.5.1
Representasi K_n

Akan dibuktikan:

1) $n_1 + n_2 = n$.

2) $n_1 = \left(\frac{b-1}{r-1}\right) n_2$.

3) Ketika $n-1$ sisi yang berinsiden dengan simpul v diwarnai dengan warna merah atau warna biru, ada paling sedikit n_1 sisi berwarna sama atau ada paling sedikit n_2 sisi berwarna sama.

4) K_n akan memuat K_b atau K_r, ketika setiap sisi K_n diwarnai dengan warna merah atau warna biru.

Bukti:

1) Berdasarkan rumus Pascal didapat:

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= \binom{r+(b-1)-2}{r-1} + \binom{(r-1)+b-2}{(r-1)-1} \\ &= \binom{(r+b-2)-1}{r-1} + \binom{(r+b-2)-1}{(r-1)-1} \\ &= \binom{r+b-2}{r-1} \\ &= n. \end{aligned}$$

Akibatnya, K_n memuat K_r atau K_b atau K_{r-1} atau K_{b-1}. Dari langkah kedua, secara implisit didapat: jika $n_1 \geq n_2$ maka K_{n_1} memuat K_r atau K_b atau K_{r-1} atau K_{b-1}, atau jika $n_1 \leq n_2$ maka K_{n_2} memuat K_r atau K_b atau K_{r-1} atau K_{b-1}. Hal tersebut berlaku karena sifat dari graf lengkap, misal K_x dan K_y, $\forall x, y \in N$, yaitu $K_x = K_y \Leftrightarrow x = y$ atau $K_x \subset K_y \Leftrightarrow x < y$ atau $K_x \supset K_y \Leftrightarrow x > y$. Pertanyaannya, "Bagaimana jika K_n memuat K_{r-1} atau K_{b-1}?", hasil dari 2), 3), dan 4) akan membuktikan K_n tetap memuat K_r atau K_b pada kondisi tersebut.

2) Karena:

i. $$n_1 = \binom{r+(b-1)-2}{r-1} = \frac{(r+(b-1)-2)!}{(b-2)!(r-1)!} = \frac{(r+b-3)!}{(b-2)!(r-1)!}.$$

ii. $n_2 = \binom{(r-1)+b-2}{(r-1)-1} = \dfrac{((r-1)+b-2)!}{(b-1)!((r-1)-1)!} = \dfrac{(r+b-3)!}{(b-1)!(r-2)!}$.

Didapatkan, $\dfrac{(r+b-3)!}{(b-2)!(r-1)!} = \left(\dfrac{b-1}{r-1}\right)\dfrac{(r+b-3)!}{(b-1)!(r-2)!}$. Dengan kata lain, $n_1 = \left(\dfrac{b-1}{r-1}\right)n_2$.

3) Karena $n_1 + n_2 = n$ dan $n_1 = \left(\dfrac{b-1}{r-1}\right)n_2$, untuk $r > 2, b > 2$ dan $b, r, n \in N$. Berdasarkan Definisi 2.4.3, didapat tiga kemungkinan nilai b terhadap nilai r, yaitu:

a) Untuk $b = r$ didapat $n_1 = \left(\dfrac{b-1}{b-1}\right)n_2 = \left(\dfrac{r-1}{r-1}\right)n_2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$. Akibatnya didapat, $n-1 = n_1 + n_2 - 1 = n_2 + n_2 - 1 = 2n_2 - 1 = 2n_1 - 1$. Didapatkan banyaknya sisi $\dfrac{n-1}{2}$ kali banyaknya warna. Karena $\exists t \in N \ni \dfrac{n-1}{2} = n_2 - \dfrac{1}{2} = n_1 - \dfrac{1}{2} = t + \dfrac{1}{2}$, berdasarkan Definisi 2.4.2 maka ada paling sedikit $t+1$ sisi berwarna sama. Dengan kata lain, karena $t+1 = n_2 = n_1$, di antara $n-1$ sisi yang berwarna ada paling sedikit n_2 sisi berwarna sama, dengan $n_2 = n_1$.

b) Untuk $b > r$ didapat $\exists \varepsilon \in N \ni b = r + \varepsilon$. Akibatnya didapat, $n_1 = \left(\dfrac{r+\varepsilon-1}{r-1}\right)n_2 \Leftrightarrow n_1 > n_2$. Sehingga, $n-1 = n_1 + n_2 - 1 > 2n_2 - 1$ dan $2n_1 - 1 > n_1 + n_2 - 1 = n - 1$. Dengan kata lain, $2n_1 - 1 > n - 1 > 2n_2 - 1$. Didapat dua hasil berikut ini:

i. Untuk $2n_1 - 1$ sisi. Didapat banyaknya sisi $\frac{2n_1 - 1}{2}$ kali banyaknya warna. Karena $\exists k \in N \ni n_1 - \frac{1}{2} = k + \frac{1}{2}$, berdasarkan Definisi 2.4.2 maka ada paling sedikit $k+1$ sisi berwarna sama. Dengan kata lain, karena $k+1 = n_1$, di antara $2n_1 - 1$ sisi yang berwarna ada paling sedikit n_1 sisi berwarna sama.

ii. Untuk $2n_2 - 1$ sisi. Didapat banyaknya sisi $\frac{2n_2 - 1}{2}$ kali banyaknya warna. Karena $\exists l \in N \ni n_2 - \frac{1}{2} = l + \frac{1}{2}$, berdasarkan Definisi 2.4.2 maka ada paling sedikit $l+1$ sisi berwarna sama. Dengan kata lain, karena $l+1 = n_2$, di antara $2n_2 - 1$ sisi yang berwarna ada paling sedikit n_2 sisi berwarna sama.

Misalkan di antara $n-1$ sisi yang berwarna merah atau berwarna biru selalu ada paling sedikit x sisi yang berwarna sama, $x \in N$. Karena $2n_1 - 1 > n - 1 > 2n_2 - 1$ maka $n_1 \geq x \geq n_2$. Dengan kata lain, bisa disimpulkan di antara $n-1$ sisi yang berwarna merah atau berwarna biru selalu ada dan paling sedikit n_2 sisi yang berwarna sama.

c) Untuk $r > b$ didapat $\exists \delta \in N \ni r = b + \delta$. Akibatnya didapat, $n_1 = \left(\frac{b-1}{b+\delta-1}\right)n_2 \Leftrightarrow n_2 > n_1$. Sehingga, $n - 1 = n_1 + n_2 - 1 < 2n_2 - 1$ dan $2n_1 - 1 < n_1 + n_2 - 1 = n - 1$. Dengan kata lain, $2n_1 - 1 < n - 1 < 2n_2 - 1$. Didapat dua hasil berikut ini:

i. Untuk $2n_1 - 1$ sisi. Didapat banyaknya sisi $\frac{2n_1 - 1}{2}$ kali banyaknya warna. Karena $\exists g \in N \ni n_1 - \frac{1}{2} = g + \frac{1}{2}$, berdasarkan Definisi 2.4.2 maka ada paling sedikit $g + 1$ sisi berwarna sama. Dengan kata lain, karena $g + 1 = n_1$, di antara $2n_1 - 1$ sisi yang berwarna ada paling sedikit n_1 sisi berwarna sama.

ii. Untuk $2n_2 - 1$ sisi. Didapat banyaknya sisi $\frac{2n_2 - 1}{2}$ kali banyaknya warna. Karena $\exists h \in N \ni n_2 - \frac{1}{2} = h + \frac{1}{2}$, berdasarkan Definisi 2.4.2 maka ada paling sedikit $h + 1$ sisi berwarna sama. Dengan kata lain, karena $h + 1 = n_2$, di antara $2n_2 - 1$ sisi yang berwarna ada paling sedikit n_2 sisi berwarna sama.

Misalkan di antara $n - 1$ sisi yang berwarna merah atau berwarna biru ada paling sedikit y sisi yang berwarna sama, $y \in N$. Karena $2n_1 - 1 < n - 1 < 2n_2 - 1$, maka $n_1 \leq y \leq n_2$. Dengan kata lain, bisa disimpulkan, di antara $n - 1$ sisi yang berwarna merah atau berwarna biru ada paling sedikit n_1 sisi yang berwarna sama.

Akhirnya, berdasarkan hasil di atas, ketika $n - 1$ sisi diwarnai dengan warna merah atau warna biru ada paling sedikit n_1 sisi yang berwarna sama atau ada paling sedikit n_2 sisi yang berwarna sama.

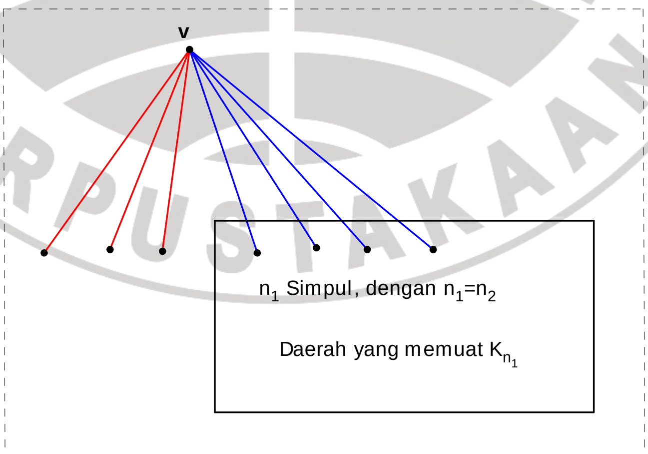
4) Mengingat di antara $n - 1$ sisi yang diwarnai dengan warna merah atau warna biru, dengan $n - 1 = n_1 + n_2 - 1$, ada paling sedikit n_1 sisi yang berwarna sama

atau ada paling sedikit n_2 sisi yang berwarna sama. Maka, didapat dua hasil berikut:

I. Untuk ada paling sedikit n_1 sisi yang berwarna sama. Berdasarkan 3) hal tersebut berlaku untuk $n_2 \geq n_1$, yakni:

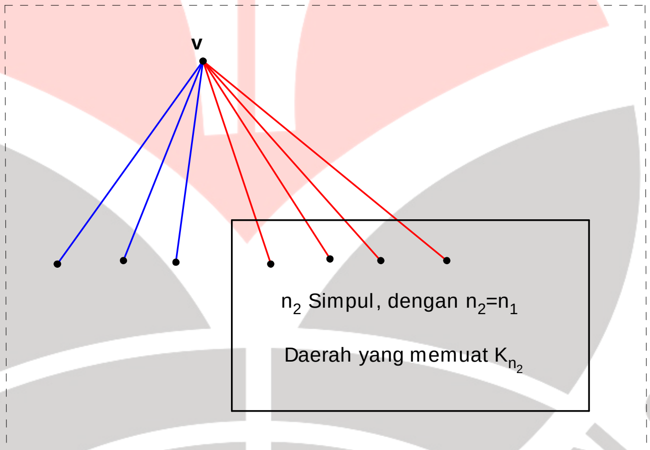
A Untuk $n_1 = n_2$. Didapat dua kemungkinan warna ke- n_1 sisi, yaitu:

i. Untuk n_1 sisi yang berwarna biru. Ke- n_1 sisi biru itu berujung di dalam daerah segiempat mulus pada Gambar 3.5.2. Sehingga, di dalam daerah segiempat itu ada n_1 simpul. Pada Gambar 3.5.2, karena di dalam daerah segiempat itu ada n_1 simpul didapat K_{n_1}. Karena K_{n_1} memuat K_r maka K_n memuat K_r. Atau, karena K_{n_1} memuat K_{b-1} maka K_n memuat K_b, hal itu berlaku karena semua simpul di K_{n_1} terhubung oleh sisi-sisi yang berwarna biru. Hasil tersebut disajikan Gambar 3.5.2.



Gambar 3.5.2
K_n memuat K_b atau K_r

ii. Untuk n_1 sisi yang berwarna merah, karena $n_1 = n_2$ didapat n_2 sisi yang berwarna merah. Ke-n_2 sisi merah itu berujung di dalam daerah segiempat mulus pada Gambar 3.5.3. Sehingga, di dalam daerah segiempat itu ada n_2 simpul. Pada Gambar 3.5.3, karena di dalam daerah segiempat itu ada n_2 simpul didapat K_{n_2}. Karena K_{n_2} memuat K_b maka K_n memuat K_b. Atau, karena K_{n_2} memuat K_{r-1} maka K_n memuat K_r, hal itu berlaku karena semua simpul di K_{n_2} terhubung oleh sisi-sisi yang berwarna merah.

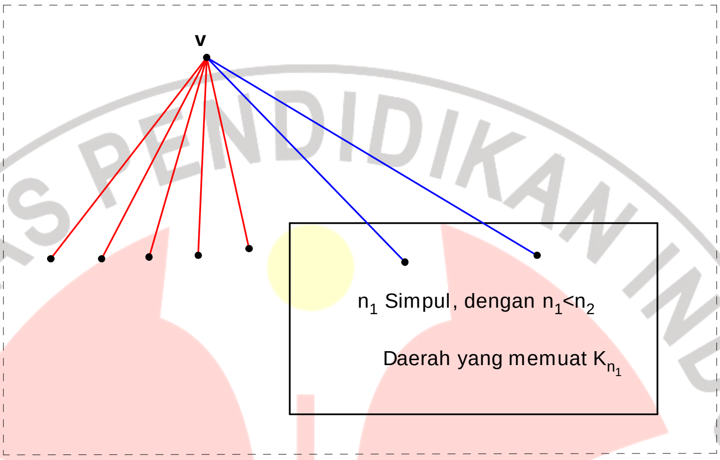


Gambar 3.5.3
K_n memuat K_b atau K_r

B Untuk $n_1 < n_2$. Didapatkan dua kemungkinan warna ke-n_1 sisi, yaitu:

i. Untuk n_1 sisi yang berwarna biru. Ke-n_1 sisi biru itu berujung di dalam daerah segiempat mulus pada Gambar 3.5.4. Sehingga, di dalam daerah segiempat itu ada n_1 simpul. Pada Gambar 3.5.4, karena di dalam daerah segiempat itu ada n_1 simpul didapat K_{n_1}.

Karena K_{n_1} memuat K_r maka K_n memuat K_r. Atau, karena K_{n_1} memuat K_{b-1} maka K_n memuat K_b, hal itu berlaku karena semua simpul di K_{n_1} terhubung oleh sisi-sisi biru.

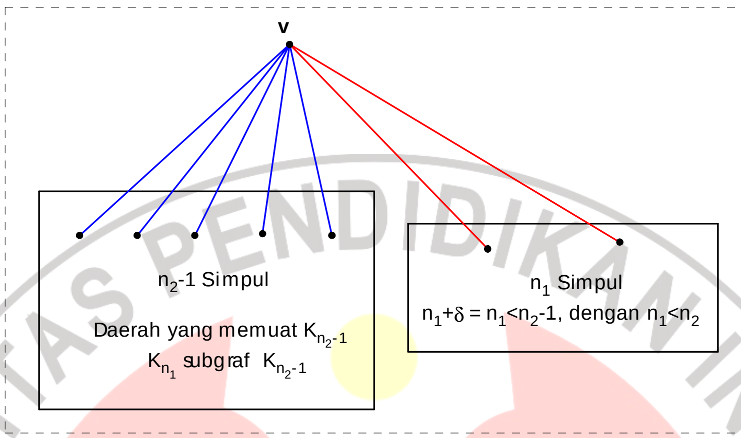


Gambar 3.5.4
K_n memuat K_b atau K_r

ii. Untuk n_1 sisi yang berwarna merah, karena ada paling sedikit n_1 sisi merah, $n_1 < n_2$, didapat kemungkinan lain banyaknya sisi merah, yaitu: karena $\exists \varepsilon \in N \ni n_1 + (\varepsilon - 1) = n_2 - 1$ maka $\exists \delta \in N$, $0 \le \delta \le \varepsilon - 1$, sehingga $n_1 + \delta \le n_2 - 1$. Berdasarkan rentangan nilai δ, didapatkan 'pergerakan' nilai δ terhadap $n_1 + \delta \le n_2 - 1$, yaitu:

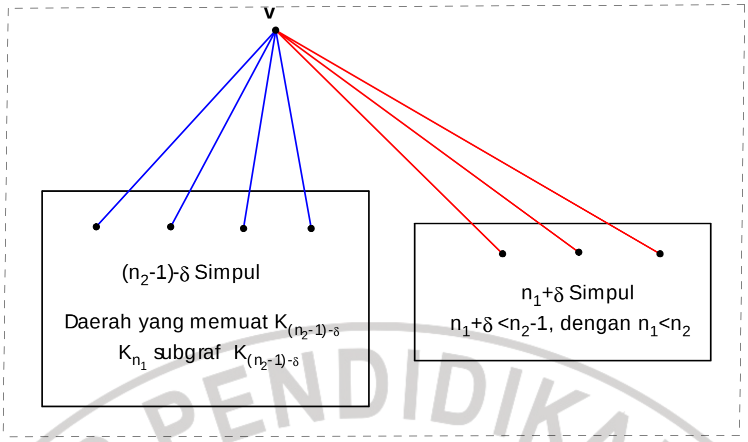
a. Untuk $\delta = 0$. Pada Gambar 3.5.5, di daerah segiempat mulus ruas kiri hanya ada $n_2 - 1$ sisi biru berujung, termuatlah $K_{n_2 - 1}$. Karena $n_1 + \delta = n_1 < n_2 - 1$ maka di $K_{n_2 - 1}$ termuat K_{n_1}. Jika K_{n_1} memuat K_r maka K_n memuat K_r. Atau, karena K_{n_1}

memuat K_{b-1} maka K_n memuat K_b, hal itu berlaku karena semua simpul di K_{n_1} terhubung oleh sisi-sisi biru.



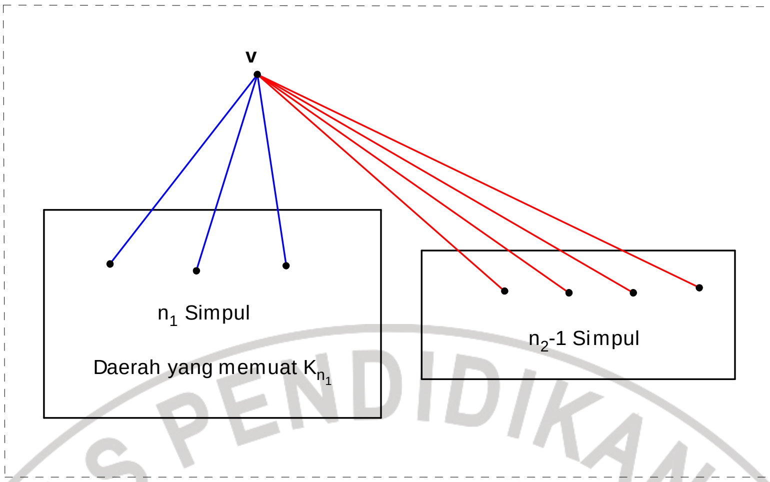
Gambar 3.5.5
K_n memuat K_b atau K_r

b. Untuk $1 \leq \delta < \varepsilon - 1$. Pada Gambar 3.5.6, di daerah segiempat mulus ruas kiri hanya ada $(n_2 - 1) - \delta$ sisi biru berujung termuatlah $K_{(n_2-1)-\delta}$. Karena $n_1 + \delta < n_2 - 1$ maka $n_1 < (n_2 - 1) - \delta$. Sehingga, di $K_{(n_2-1)-\delta}$ termuat K_{n_1}. Jika K_{n_1} memuat K_r maka K_n memuat K_r. Atau, karena K_{n_1} memuat K_{b-1} maka K_n memuat K_b, hal itu berlaku karena semua simpul di K_{n_1} terhubung oleh sisi-sisi biru.



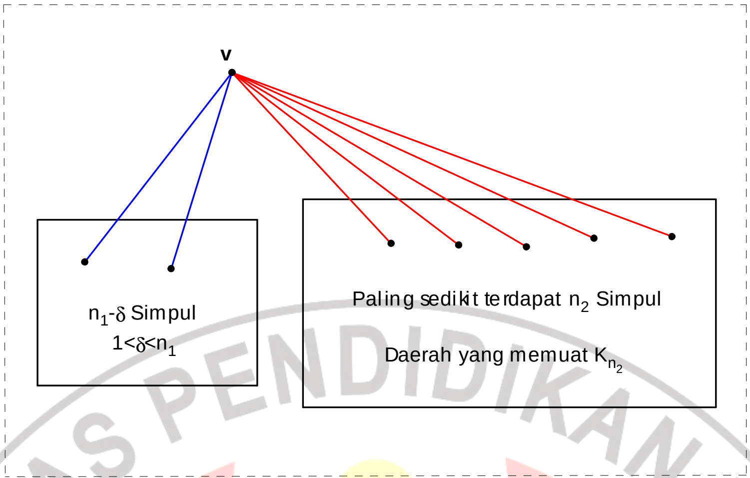
Gambar 3.5.6
K_n memuat K_b atau K_r

c. Untuk $\delta = \varepsilon - 1$. Pada Gambar 3.5.7, di daerah segiempat mulus ruas kiri hanya ada $(n_2 - 1) - \delta$ sisi biru berujung. Dengan kata lain, di daerah segiempat mulus ruas kiri hanya ada n_1 sisi biru. Sedangkan di daerah segiempat mulus ruas kanan, hanya ada $n_2 - 1$ sisi merah. Maka, di daerah segiempat mulus ruas kiri termuatlah K_{n_1}. Jika K_{n_1} memuat K_r maka K_n memuat K_r. Atau, karena K_{n_1} memuat K_{b-1} maka K_n memuat K_b, hal itu karena semua simpul di K_{n_1} terhubung oleh sisi-sisi biru.



Gambar 3.5.7
K_n memuat K_b atau K_r

d. Pada Gambar 3.5.7, di daerah segiempat mulus ruas kiri memuat n_1 sisi biru dan di daerah segiempat mulus ruas kanan memuat $n_2 - 1$ sisi merah. Penambahan nilai δ di daerah segiempat mulus ruas kanan masih berlanjut. Untuk kondisi sekarang nilai δ ada di rentangan $1 \leq \delta \leq n_1, \forall \delta \in N$. Karena $1 \leq \delta \leq n_1$ maka di daerah segiempat mulus ruas kanan memuat paling sedikit n_2 simpul. Sehingga, paling sedikit n_2 sisi merah berujung di daerah segiempat mulus ruas kanan. Dengan kata lain, di daerah segiempat mulus ruas kanan termuat K_{n_2}. Jika K_{n_2} memuat K_b maka K_n memuat K_b. Atau, jika K_{n_2} memuat K_{r-1} maka K_n memuat K_r, hal itu berlaku karena semua simpul di K_{n_2} terhubung oleh sisi merah. Hasil tersebut diilustrasikan Gambar 3.5.8.



Gambar 3.5.8
K_n memuat K_b atau K_r

II. Untuk ada paling sedikit n_2 sisi yang berwarna sama. Setelah mengetahui hasil untuk n_1 sisi yang berwarna sama di antara $n-1$ sisi, dengan kemungkinan $n_1 = n_2$ atau $n_1 < n_2$, yaitu benar K_n selalu memuat K_r atau K_b. Akan diperoleh hasil yang sama jika di antara $n-1$ sisi terdapat n_2 sisi yang berwarna sama. Sebagai buktinya, dengan memperhatikan kesangkilan dan kemangkusan, tulis kembali alur bukti untuk kasus di antara $n-1$ sisi terdapat n_1 sisi yang berwarna sama. Kemudian gantikan n_1 dengan n_2, n_2 dengan n_1, warna merah dengan warna biru, dan warna biru dengan warna merah.

Akhirnya, dari hasil ketiga langkah tersebut, benar K_n selalu memuat K_r atau K_b, ketika semua sisi K_n diwarnai dengan warna merah atau warna biru, dengan $n = \binom{r+b-2}{r-1}$. Berdasarkan hasil tersebut, maka proses pembuktian dengan induksi matematika ini selesai dan teorema telah terbukti. ■

3.6 Rentangan Keberadaan Bilangan Ramsey

Teorema sebelumnya hanya menentukan nilai yang mungkin untuk *n*. Teorema subbab ini adalah penentuan batas-batas rentangan di mana nilai n terkecil (bilangan Ramsey) berada.

Teorema 3.6: Rentangan Keberadaan Bilangan Ramsey. Diberikan $r, b \in N$, $r, b \geq 2$, dan $r, b < \infty$. Jika $R(b,r)$ adalah nilai *n* terkecil maka $R(b,r)$ berada di rentangan $(r-1)(b-1)+1 \leq R(b,r) \leq n = \binom{r+b-2}{r-1}$ (Bryant, 1993: 204).

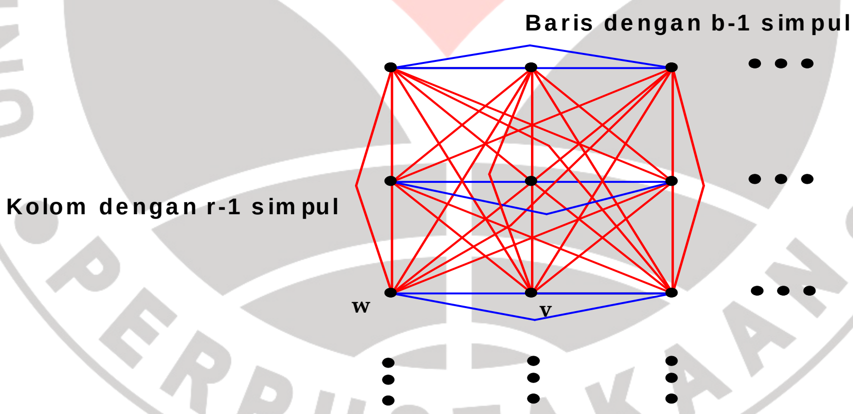
Bukti.

Karena $R(b,r)$ merupakan nilai n terkecil maka benar ketaksamaan berikut, yaitu $R(b,r) \leq n = \binom{r+b-2}{r-1}$. Sehingga, yang perlu dibuktikan adalah $(r-1)(b-1)+1 \leq R(b,r)$.

Pertama-tama, konstruksi suatu graf lengkap yang menyerupai persegipanjang dengan 'luas' $r-1 \times b-1$. Kemudian, semua sisi graf lengkap $K_{(r-1)(b-1)}$ diwarnai dengan warna merah atau warna biru dengan cara yang dijelaskan pada paragraf selanjutnya.

Didefinisikan dua istilah, yaitu baris dan kolom. Baris adalah kelompok simpul yang membentuk barisan simpul dengan pola mendatar (horisontal). Sedangkan kolom adalah kelompok simpul yang membentuk barisan simpul dengan pola vertikal. Pada setiap baris ada $b-1$ simpul dan di setiap kolom ada $r-1$ simpul.

Pada setiap baris terdapat graf lengkap K_{b-1}, karena hanya untuk sebarang dua simpul pada baris yang sama dihubungkan dengan sisi biru. Pada setiap kolom terdapat graf lengkap K_{r-1}, karena sebarang dua simpul yang tidak berada pada baris yang sama dihubungkan dengan sisi merah. Hal tersebut diperlihatkan Gambar 3.6.1. Pada Gambar 3.6.1, ada cara pewarnaan pada $K_{(r-1)(b-1)}$ sehingga $K_{(r-1)(b-1)}$ tidak memuat K_b dan K_r.



Gambar 3.6.1
$K_{(r-1)(b-1)}$ tak memuat K_b dan K_r

Ambil sebarang b simpul di $K_{(r-1)(b-1)}$, sehingga didapat graf lengkap dengan b simpul. Ada paling sedikit dua simpul di graf lengkap tersebut terhubung oleh sisi berwarna merah. Akibatnya, K_b tidak termuat di $K_{(r-1)(b-1)}$.

Ambil sebarang r simpul di $K_{(r-1)(b-1)}$, sehingga didapat graf lengkap dengan r simpul. Ada paling sedikit dua simpul di graf lengkap tersebut terhubung oleh sisi berwarna biru. Akibatnya, K_r tidak termuat di $K_{(r-1)(b-1)}$.

Karena ada cara pewarnaan sehingga K_r dan K_b tidak termuat di $K_{(r-1)(b-1)}$, didapat $(r-1)(b-1) < R(b,r) \Rightarrow (r-1)(b-1)+1 \leq R(b,r)$. Dengan demikian, teorema telah terbukti. ■

3.7 Hasil Lain Dalam Masalah Dua Warna

Hasil dari pewarnaan semua sisi K_n pada dua teorema sebelumnya berupa graf lengkap berwarna sama. Pada subbab ini, ternyata ada hasil lain ketika semua sisi K_n diwarnai dengan warna merah atau warna biru, yaitu akan ada K_r atau pohon T (dengan b simpul dan semua sisinya berwarna biru).

Teorema 3.7: Hasil Lain Dalam Masalah Dua Warna. Diberikan $r, b \geq 2$, $r, b \in N$, $r, b < \infty$. Jika semua sisi $K_{(r-1)(b-1)+1}$ diwarnai dengan warna merah atau warna biru, akan ada K_r (semua sisinya berwarna merah) atau pohon T (dengan b simpul dan semua sisinya berwarna biru) (Bryant, 1993: 206).

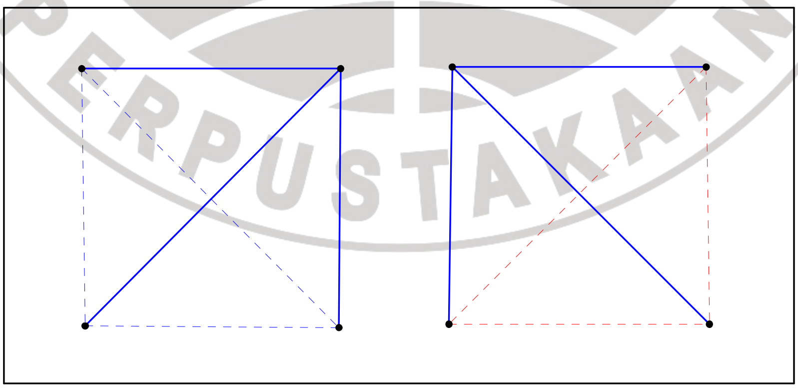
Bukti.

Akan dibuktikan dengan menggunakan prinsip induksi matematika (Definisi 2.4.1) pada $r+b$. *Langkah pertama.* Untuk $r=2$, didapat $(2-1)(b-1)+1=b$. Didapat:

1) Untuk $b = 2$ didapat $K_{(r-1)(b-1)+1} = K_2$ yang hanya memiliki satu sisi. Akan ada K_r jika satu sisi tersebut berwarna merah, atau akan ada K_b jika satu sisi itu berwarna biru. Pada Gambar 3.7.1, K_b adalah pohon T dengan b simpul (Definisi 2.2.11).

Gambar 3.7.1
$K_{(r-1)(b-1)+1}$ memuat K_r atau pohon T

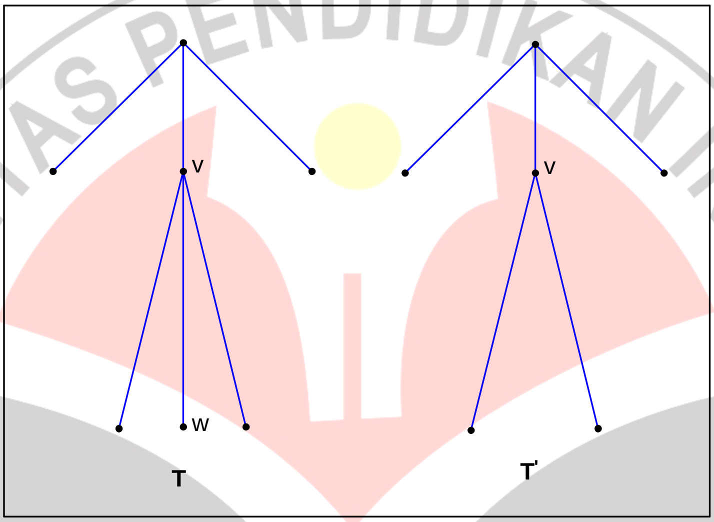
2) Untuk $b > 2$ didapat $K_{(r-1)(b-1)+1} = K_{b>2}$. Akan ada K_r, jika setiap sisi atau beberapa sisi atau salah satu sisi di $K_{b>2}$ berwarna merah. Atau, akan ada T dengan b simpul dan semua sisinya berwarna biru jika setiap sisi atau beberapa sisi (yang merupakan sisi pohon rentang K_b, dengan b simpul) di K_b berwarna biru (Definisi 2.2.12).



Gambar 3.7.2
$K_{(r-1)(b-1)+1}$ memuat pohon T

Untuk $b = 2$ didapat hasil yang mirip dengan hasil untuk $r = 2$ tersebut.

Langkah kedua. Untuk $r, b > 2$. Sebelumnya, misalkan pohon T dengan b simpul dan pohon T' dengan $b-1$ simpul. Kedua pohon tersebut, semua sisinya berwarna biru. Representasi kedua pohon yang dimaksud disajikan Gambar 3.7.3.



Gambar 3.7.3
Representasi T dan T'

Andaikan benar:

1) Jika setiap sisi K_{n_1} diwarnai dengan warna merah atau warna biru maka K_{n_1} memuat K_r atau pohon T', dengan $n_1 = (r-1)((b-1)-1)+1$.

2) Jika setiap sisi K_{n_2} diwarnai dengan warna merah atau warna biru maka K_{n_2} memuat K_{r-1} atau pohon T, dengan $n_2 = ((r-1)-1)(b-1)+1$.

Langkah ketiga. Untuk $r, b > 2$. Misal $n = (r-1)(b-1)+1$. Akan dibuktikan:

1) $n = (r-1) + n_1$.

2) $n = (b-1) + n_2$.

3) $K_{n_1}, K_{n_2} \subset K_n$.

4) Ketika semua sisi di $K_{(r-1)(b-1)+1}$ diwarnai dengan warna merah atau warna biru, $K_{(r-1)(b-1)+1}$ selalu memuat K_r atau T.

Bukti:

1) Karena $n-(r-1) = ((r-1)(b-1)+1)-(r-1) = n_1$.

   Akibatnya $n = (r-1) + n_1$.

2) Karena $n-(b-1) = ((r-1)(b-1)+1)-(b-1) = n_2$.

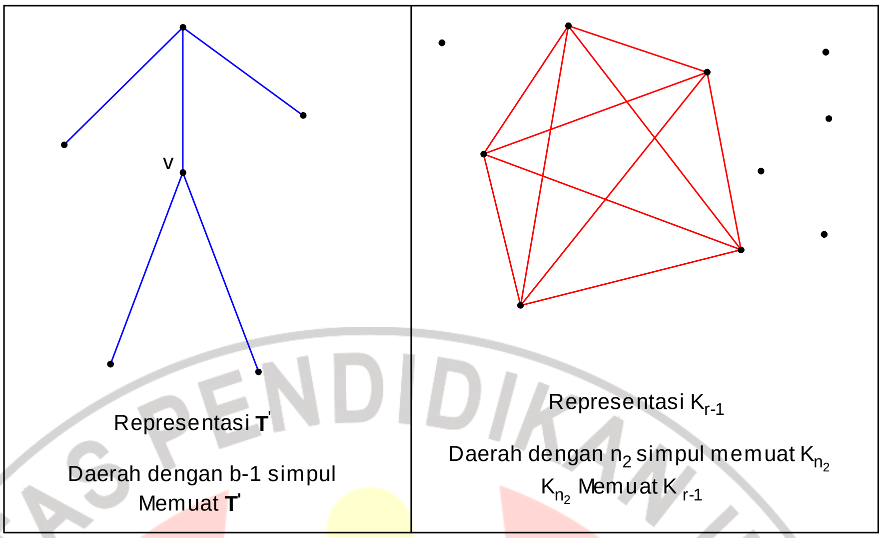
   Akibatnya, $n = (b-1) + n_2$.

3) Karena $n = (r-1) + n_1$ dan $n = (b-1) + n_2$ maka n_1, $n_2 < n$.

   Akibatnya $K_{n_1}, K_{n_2} \subset K_n$.

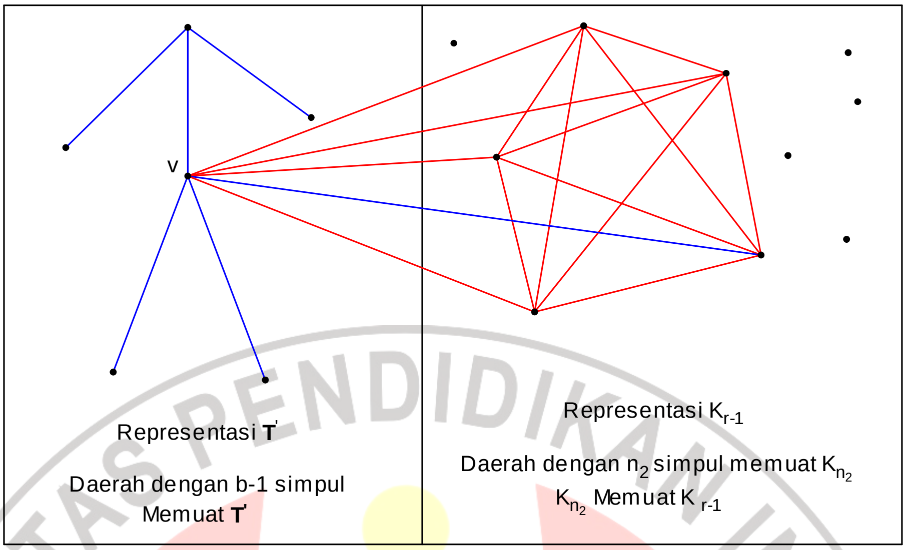
4) Andaikan semua sisi $K_{(r-1)(b-1)+1}$ telah diwarnai dengan warna merah atau warna biru. Didapat:

   ❖ Jika di K_n termuat K_{n_1}. Sehingga, apabila di K_{n_1} termuat K_r maka di K_n termuat K_r. Tetapi mungkin juga yang didapatkan pohon T' dengan $b-1$ simpul termuat di K_n. Misal ruas kiri Gambar 3.7.4 memuat pohon T' dengan $b-1$ simpul. Karena $n = (b-1) + n_2$ maka ada n_2 simpul di ruas kanan Gambar 3.7.4, didapat K_{n_2}. Jika K_{n_2} memuat pohon T dengan b simpul maka K_n memuat pohon T dengan b simpul. Tetapi mungkin juga yang didapatkan K_{r-1}, seperti diilustrasikan Gambar 3.7.4.



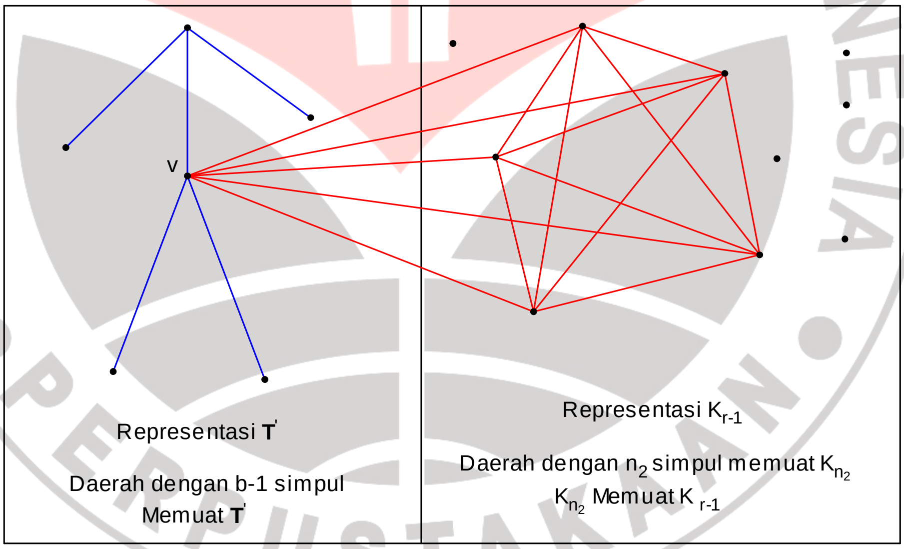
Gambar 3.7.4
$K_{(r-1)(b-1)+1}$ memuat K_{r-1} atau pohon T'

Karena K_n graf lengkap maka setiap simpul di pohon T' dengan setiap simpul di K_{r-1} terhubung. Ambil sebarang simpul v di pohon T'. Jika di antara $r-1$ sisi yang menghubungkan simpul v dengan semua simpul di K_{r-1} ada paling sedikit satu sisi berwarna biru, termuatlah pohon T di K_n. Tetapi jika di antara $r-1$ sisi itu tak ada sisi yang berwarna biru, dengan kata lain semuanya berwarna merah, maka termuatlah K_r di K_n. Gambar 3.7.5 dan Gambar 3.7.6 menunjukkan hasil tersebut.



Gambar 3.7.5

$K_{(r-1)(b-1)+1}$ memuat pohon T



Gambar 3.7.6

$K_{(r-1)(b-1)+1}$ memuat K_r

❖ Hasil yang sama akan didapatkan jika di K_n termuat K_{n_2}.

Akhirnya di K_n selalu terdapat K_r atau pohon T (dengan b simpul), ketika semua sisi K_n diwarnai dengan warna merah atau warna biru, dengan

$(r-1)(b-1)+1=n.$ Dengan tuntasnya ketiga langkah pembuktian, maka keseluruhan proses pembuktian selesai dan teorema telah terbukti. ■

3.8 Hasil Dalam Masalah *m* Warna

Tiga teorema sebelumnya hanya berisikan hasil dalam masalah dua warna. Teorema subbab ini berisikan hasil dalam masalah *m* warna.

Teorema 3.8: Hasil Dalam Masalah *m* Warna. Misalkan $m \in N,\ \ m < \infty.$ Diberikan m buah warna yang berbeda, yaitu: warna ke-1, warna ke-2, warna ke-3, sampai warna ke-$m.$ Ada $M \in N,$ sehingga ketika semua sisi di K_M diwarnai dengan m buah warna yang tersedia, K_M memuat K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-1 atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-2 atau ... atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-m (Bryant, 1993: 206).

Bukti.

Akan dibuktikan keberadaan M dengan prinsip induksi matematika (Definisi 2.4.1) pada $m.$ *Langkah Pertama*:

1) Untuk $m=1.$ Didapat benar ada $M \in N,$ yaitu $M = M_1 = 3.$ Sebagai buktinya, ketika semua sisi di K_3 diwarnai hanya dengan satu warna, misal warna kuning, benar ada satu buah K_3 dengan semua sisinya berwarna kuning.
2) Untuk $m=2.$ Didapat benar ada $M \in N,$ yaitu $M = M_2 = 6.$ Berdasarkan hasil di Subbab 3.4, ketika semua sisi di K_6 diwarnai dengan dua buah warna

yang berbeda, K_6 selalu memuat K_3 dengan semua sisi berwarna warna ke-1 atau akan ada K_3 dengan semua sisi berwarna warna ke-2.

Langkah Kedua. Untuk $m > 2$. Andaikan benar ada $M^{\#} \in N$, sehingga ketika semua sisi di $K_{M^{\#}}$ diwarnai dengan $m-1$ warna yang tersedia, $K_{M^{\#}}$ selalu memuat K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-1 atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-2 atau ... atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-$(m-1)$.

Langkah Ketiga. Misal $x_m = R(3, M^{\#})$. Akan dibuktikan ketika semua sisi di K_{x_m} diwarnai dengan m warna yang tersedia, K_{x_m} selalu memuat K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-1 atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-2 atau ... atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-*m*.

Karena $x_m = R(3, M^{\#})$, artinya semua sisi di K_{x_m} diwarnai seolah-olah dalam masalah dua warna, misal diwarnai biru atau diwarnai selain warna biru. Maka, K_{x_m} selalu memuat K_3 (semua sisinya berwarna biru) atau $K_{M^{\#}}$ (semua sisinya berwarna selain warna biru).

Jika yang muncul K_3 dengan semua sisinya berwarna biru di K_{x_m}, maka teorema terpenuhi. Tetapi jika yang muncul $K_{M^{\#}}$ dengan warna semua sisinya selain warna biru, akan didapatkan K_3 dengan semua sisinya berwarna sama di K_{x_m}. Ketiga paragraf di bawah ini menjelaskan hal tersebut.

Karena semua sisi $K_{M^\#}$ berwarna selain warna biru, berdasarkan langkah kedua di atas, di $K_{M^\#}$ terdapat K_3 dengan semua sisinya berwarna selain warna biru. Akibatnya bisa dikatakan, semua sisi $K_{M^\#}$ diwarnai dengan $m-1$ warna yang berbeda, warna biru tak termasuk di antara $m-1$ tersebut.

Sehingga, K_{x_m} memuat K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-1 atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-2 atau ... atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-$(m-1)$ atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna biru. Dengan kata lain, adalah benar ketika semua sisi di K_{x_m} diwarnai dengan m warna yang tersedia, diperoleh K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-1 atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-2 atau ... atau K_3 dengan semua sisinya berwarna warna ke-m. ■

Akibat Teorema 3.8. Diberikan sebarang bilangan asli m, $m<\infty$. Berdasarkan Teorema Ramsey 3.8, ada bilangan asli M yang memenuhi ketentuan teorema tersebut, maka $M>m$.

Bukti.

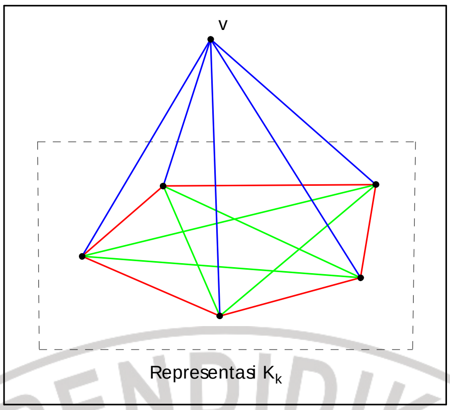
Akan dibuktikan kontrapositif dari pernyataan teorema. Karena $M\le m$, untuk $M=m$ didapat K_M yang setiap sisinya diwarnai dalam m warna. Akan dibuktikan dengan cara induksi matematika (Definisi 2.4.1) pada m, ada cara pewarnaan semua sisi K_M, sehingga di K_M tak memuat K_3 warna ke-1 dan K_3 warna ke-2 dan ... dan K_3 warna ke-m.

Langkah pertama. Banyaknya sisi K_M, $M = m$, adalah $\binom{m}{2} = \frac{m^2 - m}{2}$. Untuk masalah satu warna $m = 1$, didapat banyaknya sisi K_1 adalah 0 buah sisi. Untuk masalah dua warna $m = 2$, didapat banyaknya sisi K_2 adalah 1 buah sisi. Dengan kata lain, K_1 dan K_2 tak memuat K_3.

Langkah kedua. Andaikan untuk masalah *k* warna, $m = k$, didapat ada cara pewarnaan sisi K_k sehingga K_k tak memuat K_3 warna ke-1 dan K_3 warna ke-2 dan ... dan K_3 warna ke-*k*.

Langkah ketiga. Akan dibuktikan untuk masalah $k+1$ warna, $m = k+1$, didapat ada cara pewarnaan K_{k+1} sehingga K_{k+1} tak memuat K_3 warna ke-1 dan K_3 warna ke-2 dan ... dan K_3 warna ke-*k* dan K_3 warna ke-$(k+1)$.

Ambil sebarang simpul di K_{k+1}, misal simpul *v*, didapat *k* sisi yang berinsiden dengannya, sehingga terdapat *k* simpul. Dengan kata lain, di K_{k+1} terdapat K_k. Misal *k* sisi yang berinsiden dengan simpul *v* berwarna biru (warna biru bukan di antara *k* warna). Berdasarkan langkah kedua, maka ada cara pewarnaan sehingga K_{k+1} tak memuat: K_3 warna ke-1 dan K_3 warna ke-2 dan ... dan K_3 warna ke-*k* dan K_3 warna ke-$(k+1)$ (Gambar 3.8.1). ∎



Gambar 3.8.1
K_{k+1} tak memuat K_3 biru

Akibatnya adalah benar, jika $M \leq m$ maka tak ada bilangan asli M yang memenuhi teorema masalah m warna. Oleh karenanya, teorema terbukti. ■

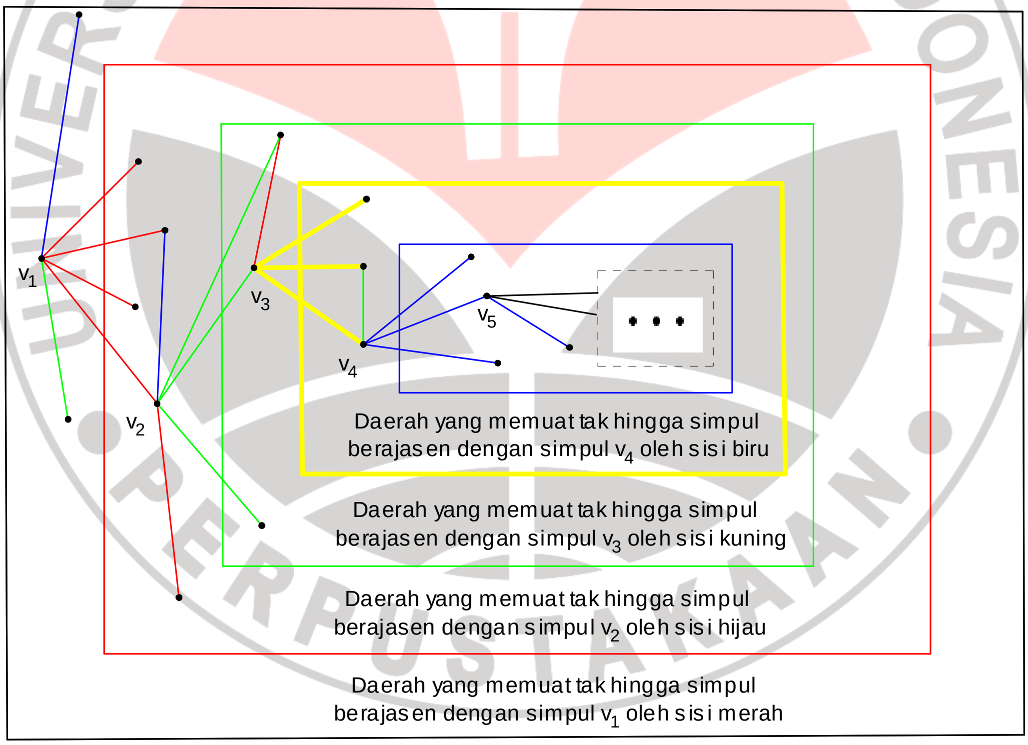
3.9 Hasil Dalam Masalah m Warna, Jika K_n Graf Tak Hingga

Teorema di Subbab 3.8 berisi hasil ketika semua sisi K_n yang merupakan graf hingga, diwarnai dengan salah satu warna atau beberapa warna atau semua warna dari m warna yang tersedia, $m < \infty$. Pada subbab ini, akan diketahui hasil untuk K_n yang merupakan graf tak hingga, diwarnai dengan salah satu warna atau beberapa warna atau semua warna dari m warna yang tersedia.

Teorema 3.9: Hasil Dalam Masalah m Warna, Jika K_n Graf Tak Hingga. Jika semua sisi graf tak hingga K_n diwarnai dengan m buah warna yang berbeda (masalah m warna), $m < \infty$, maka K_n akan memuat graf tak hingga K_x yang semua sisinya berwarna sama, warna semua sisi K_x adalah salah satu warna di antara m warna yang tersedia (Bryant, 1993: 208).

Bukti.

Untuk membuktikan keberadaan K_x ini, ambil sebarang simpul v_1 di K_n (Gambar 3.9.1). Paragraf selanjutnya menjelaskan Gambar 3.9.1.



Gambar 3.9.1
Representasi pewarnaan graf lengkap tak hingga

Simpul v_1 tersebut ajasen dengan semua simpul selain v_1 di K_n. Karena K_n graf tak hingga, didapat tak hingga sisi yang berinsiden dengan v_1. Akibat pewarnaan semua sisi di K_n dengan m warna berhingga, didapat tak hingga sisi berwarna sama, misal berwana merah, di antara tak hingga sisi yang berwarna yang berinsiden dengan v_1.

Tak hingga sisi yang berwarna merah dikelompokkan ke dalam himpunan yang direpresentasikan oleh segiempat dengan sisi berwarna merah (selanjutnya disebut; segiempat merah). Dengan kata lain, semua simpul yang berada di dalam segiempat merah ini ajasen dengan v_1 oleh sisi yang berwarna merah.

Di dalam segiempat merah ini ada sebarang simpul, misal v_2. Simpul tersebut ajasen dengan semua simpul di segiempat merah, kecuali v_2. Karena semua simpul di segiempat merah ada sebanyak tak hingga simpul, didapat tak hingga sisi ajasen dengan v_2. Karena tak hingga sisi yang berajasen dengan v_2 diwarnai dengan berhingga warna, maka ada tak hingga sisi berwarna sama, misal berwana hijau.

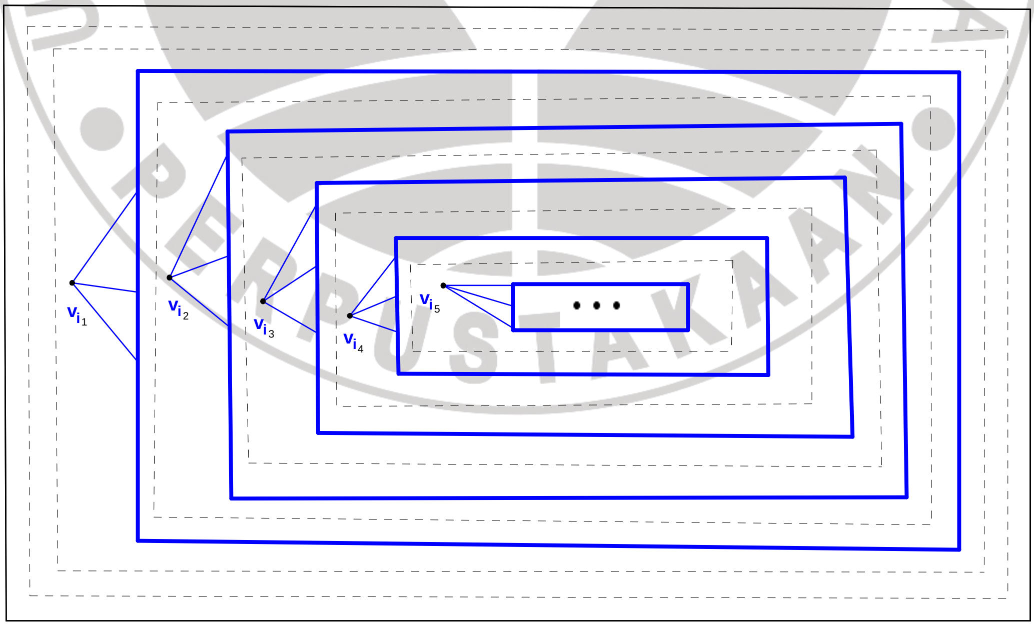
Kemudian, tak hingga sisi hijau tersebut dikelompokkan ke dalam himpunan yang diwakili segiempat dengan sisi berwarna hijau. Dengan kata lain, semua simpul yang berada di dalam segiempat hijau ajasen dengan v_2 oleh sisi yang berwarna hijau.

Di dalam segiempat hijau ada sebarang simpul, misal v_3. Simpul tersebut ajasen dengan semua simpul di segiempat hijau, kecuali v_3. Karena semua simpul di segiempat hijau ada sebanyak tak hingga simpul, didapat tak hingga sisi ajasen dengan v_3. Karena tak hingga sisi yang berajasen dengan v_3 diwarnai dengan berhingga warna, maka ada tak hingga sisi berwarna sama, misal berwana kuning.

Kemudian, tak hingga sisi kuning tersebut dikelompokkan ke dalam himpunan yang diwakili segiempat dengan sisi berwarna kuning. Dengan kata lain, semua simpul yang berada di dalam segiempat kuning ajasen dengan v_3 oleh sisi yang berwarna kuning.

Hasil tersebut terjadi secara berulang-ulang. Sehingga, dapat disimpulkan ada banyak kemunculan segiempat berwarna dan ada banyak kemunculan v_i; $i \in N$.

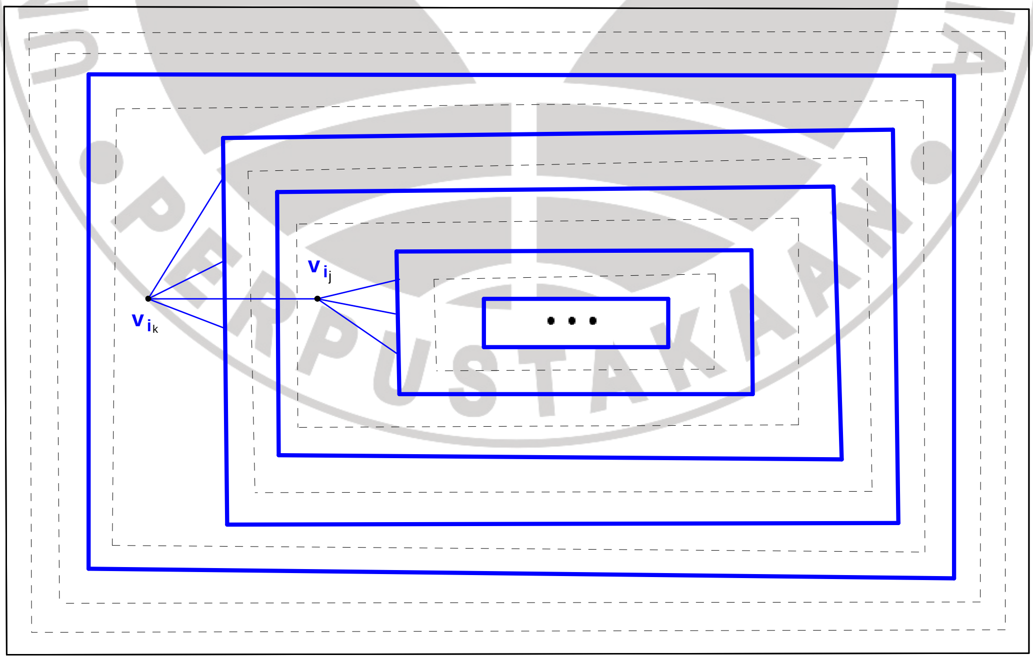
Pada Gambar 3.9.2. Karena K_n graf tak hingga, sehingga sebarang simpul di K_n berderajat tak hingga pula. Dengan kata lain, sebarang simpul di K_n berinsiden dengan tak hingga sisi. Karena banyaknya warna berhingga, maka segiempat berwarna dan v_i akan muncul tak hingga kali. Misal warna segiempat dan sisi yang berinsiden dengan v_i tersebut berwarna biru.



Gambar 3.9.2
Terdapat tak hingga kondisi tentu

Kemunculan v_i sebanyak tak hingga kali dikelompokkan dalam himpunan berikut, yaitu $\{v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \ldots, v_{i_j}, \ldots\}$. Ambil sebarang v_{i_j} dan v_{i_k}, $v_{i_j}, v_{i_k} \in \{v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \ldots, v_{i_j}, \ldots\}$, $j, k \in N$. Dengan ketentuan, v_{i_j} ajasen dengan semua simpul di segiempat biru ke-*j* oleh sisi biru dan v_{i_k} ajasen dengan semua simpul di segiempat biru ke-*k* oleh sisi biru.

Misalkan segiempat biru ke-*j* bersarang (*nested*) di dalam segiempat biru ke-*k*, atau sebaliknya. Dengan kondisi demikian, didapat v_{i_j} dan v_{i_k} berajasen oleh sisi yang berwarna biru. Karena v_{i_j} dan v_{i_k} sebarang, didapat tak hingga simpul di $\{v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \ldots, v_{i_j}, \ldots\}$ membentuk graf lengkap tak hingga, yaitu K_x biru (Gambar 3.9.3). Akhirnya, proses pembuktian secara keseluruhan selesai dan teorema telah terbukti. ■



Gambar 3.9.3
Terdapat K_x biru