

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

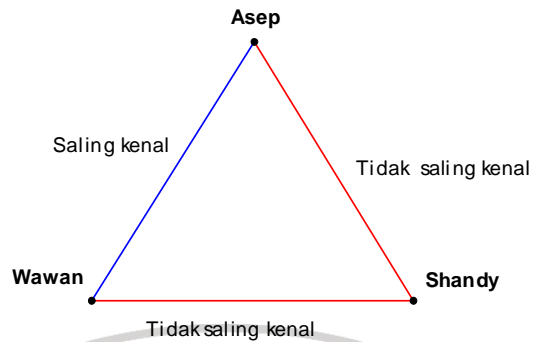
Pemaparan mengenai latar belakang masalah diawali dengan sajian persoalan dosen di kelas Matematika Kombinatorik. Persoalan tersebut, yaitu seorang dosen ingin mengetahui banyaknya mahasiswa yang hadir di kelas Matematika Kombinatorik, sehingga selalu terdapat tiga orang mahasiswa yang saling kenal satu sama lain atau tiga orang mahasiswa yang tidak saling kenal satu sama lain (Lesser, 2001: 3).

Tugas akhir ini berisikan bahasan yang merupakan pendalaman dan perluasan persoalan tersebut. Bahasan tersebut dikenal dengan nama teori Ramsey. Teori tersebut diperkenalkan pada tahun 1928, oleh Frank P. Ramsey di dalam makalahnya yang berjudul *On a Problem of Formal Logic*. Saat itu teori Ramsey dikaji dalam konteks permasalahan mencari prosedur untuk menentukan benar-tidaknya (konsistensi) suatu formula logika yang diberikan. Kemudian, teori tersebut menjadi terkenal setelah Erdos dan Szekeres (1935) mengaplikasikannya ke dalam teori graf (Surahmat, 2003: 1).

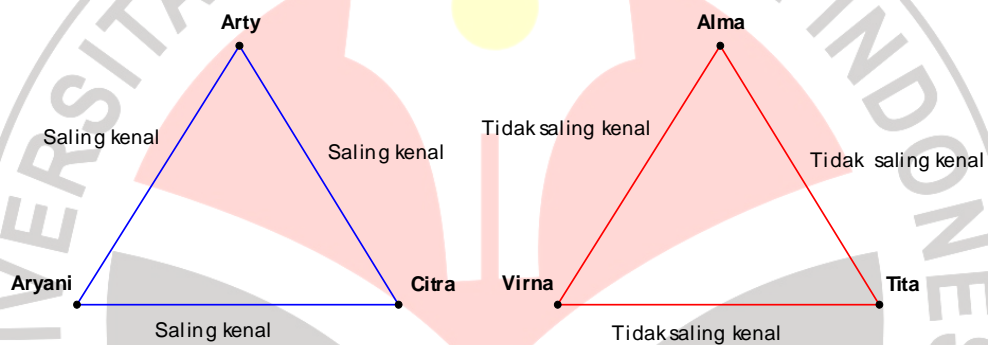
Bahasan teori Ramsey berada dalam lingkup kombinatorika. Di dalam bahasan teori Ramsey, akan dipelajari jawaban dari pertanyaan "*How many elements of some structure must there be to guarantee that a particular property will hold?*" (Wikimedia Foundation, Inc., 2009), atau pertanyaan "*How large structures can become without containing various substructures?*" (Lesser, 2001: 5).

Secara umum teori Ramsey adalah cara menentukan syarat yang harus dipenuhi oleh himpunan tak kosong  $S$  sehingga ketika sebarang dua elemennya berelasi pada kondisi tak tentu, akan ada  $H \subset S$  yang sebarang dua elemennya berelasi pada kondisi tentu. Pada contoh persoalan yang telah dikemukakan, di antara semua mahasiswa yang hadir di kelas Matematika Kombinatorik terdapat kondisi untuk sebarang dua orang mahasiswa, yaitu mungkin saling kenal atau mungkin tidak saling kenal (kondisi tak tentu). Pada kondisi demikian dosen ingin tahu banyaknya mahasiswa yang hadir di kelas tersebut (banyaknya elemen himpunan  $S$ ), sehingga selalu ditemukan tiga orang mahasiswa yang saling kenal satu sama lain ( $H_1$ ) atau tiga orang mahasiswa yang tidak saling kenal satu sama lain ( $H_2$ ), ( $H_1, H_2 \subset S$ , keduanya dalam kondisi tentu).

Persoalan tersebut adalah masalah klasik dari teori Ramsey yang dapat direpresentasikan dengan graf, mahasiswa direpresentasikan dengan simpul dan relasi sebarang dua orang mahasiswa direpresentasikan dengan sisi yang menghubungkan dua buah simpul yang berbeda (Gambar 1.1.1). Sisi berwarna merah merepresentasikan tidak saling kenal dan sisi berwarna biru merepresentasikan saling kenal. Sehingga, ketiga mahasiswa yang saling kenal satu sama lain direpresentasikan dengan  $K_3$  biru dan ketiga mahasiswa yang tidak saling kenal satu sama lain direpresentasikan dengan  $K_3$  merah (Gambar 1.1.2).



Gambar 1.1.1  
Representasi masalah dengan graf



Gambar 1.1.2  
Dua subgraf lengkap:  $K_3$  biru dan  $K_3$  merah

Misalkan jawaban persoalan dosen tersebut adalah  $n$  orang mahasiswa. Dengan kata lain, kedua graf bagian (subgraf) pada Gambar 1.1.2 dimisalkan berada di sebuah graf dengan  $n$  simpul,  $n \in \mathbb{N}$ . Karena simpul representasi dari mahasiswa dan sebarang dua orang mahasiswa pasti berelasi, yaitu saling kenal atau tidak saling kenal (direpresentasikan dengan warna sisi yang berbeda), maka graf yang dicari adalah graf lengkap (setiap sisinya berwarna, biru atau merah), yaitu  $K_n$ . Dengan kata lain, dalam formulasi graf persoalan dosen tersebut dapat dikatakan dengan pertanyaan berikut ini, “Berapakah nilai  $n$  yang memenuhi, sehingga ketika semua sisi  $K_n$  diwarnai dengan warna biru atau warna merah,  $K_n$

selalu memuat  $K_3$  (semua sisinya berwarna biru) atau  $K_3$  (semua sisinya berwarna merah)?”.

Dengan demikian ada pesan dari bahasan teori Ramsey ini, yaitu keyakinan tentang adanya kondisi yang tentu di dalam kondisi tak tentu, *infinite disorder is impossible* (Bryant, 1993: 212). Pernyataan *infinite disorder is impossible* dapat dikatakan selaras dengan pernyataan pribahasa ”Sebuas-buasnya induk harimau, tidak ada induk harimau yang menjadikan anaknya sebagai mangsa”. Hubungannya, pada sifat buas induk harimau (kondisi tak tentu) terdapat kondisi yang tentu, yaitu rasa sayang pada anak-anaknya. Atau, pernyataan tersebut selaras dengan pernyataan salah satu ayat surat Al Insyirah yang terjemahannya, ”Dibalik kesulitan ada kemudahan”.

## 1.2 Rumusan Masalah

Diberikan  $b, r, m \in \mathbb{N}$ . Setelah formulasi masalah teori Ramsey dalam graf diketahui, dapat dirumuskan beberapa permasalahan sebagai berikut:

- 1) Berapakah nilai  $n$ , sehingga ketika setiap sisi  $K_n$  diwarnai dengan warna biru atau dengan warna merah (masalah dua warna),  $K_n$  akan memuat  $K_b$  (setiap sisinya berwarna biru) atau memuat  $K_r$  (setiap sisinya berwarna merah),  $r, b < \infty$ ?
- 2) Bagaimana batas-batas dari rentangan keberadaan bilangan Ramsey (nilai  $n$  terkecil) dalam masalah dua warna?

- 3) Apa yang akan didapat, ketika semua sisi  $K_n$  diwarnai merah atau diwarnai biru dengan  $n = (r-1)(b-1)+1$ ?
- 4) Adakah nilai  $n$  yang memenuhi dan apakah hasilnya, ketika semua sisi  $K_n$  (graf hingga) diwarnai dengan dua buah warna yang berbeda atau lebih dari dua buah warna yang berbeda (masalah  $m$  warna),  $m < \infty$ ?
- 5) Apa yang akan didapat, jika  $K_n$  adalah graf tak hingga dan semua sisinya diwarnai dengan  $m$  buah warna yang berbeda (masalah  $m$  warna),  $m < \infty$ ?
- 6) Bagaimana aplikasi teorema Ramsey?

### 1.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan rumusan masalah, penulisan tugas akhir ini memiliki enam buah tujuan penulisan. Keenam tujuan penulisan tersebut adalah:

- 1) Menentukan nilai  $n$ , sehingga memenuhi jawaban pertanyaan pertama pada rumusan masalah.
- 2) Menentukan batas-batas dari rentangan keberadaan bilangan Ramsey dalam masalah dua warna.
- 3) Memperlihatkan hal yang didapat, ketika semua sisi  $K_n$  diwarnai merah atau diwarnai biru dengan  $n = (r-1)(b-1)+1$ .
- 4) Memperlihatkan adanya nilai  $n$  yang memenuhi dan hal yang didapat, ketika semua sisi  $K_n$  (graf hingga) diwarnai dengan  $m$  buah warna yang berbeda (masalah  $m$  warna),  $m \in N$ ,  $m < \infty$ .

- 5) Memperlihatkan hal yang didapat, jika  $K_n$  adalah graf tak hingga dan semua sisinya diwarnai dengan  $m$  buah warna yang berbeda,  $m < \infty$ .
- 6) Memperlihatkan aplikasi teorema Ramsey.

#### 1.4 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini, salah satunya, merujuk pada tujuan penulisan. Sistematika penulisan tersebut adalah:

- 1) Bab I berjudul Pendahuluan, berisi: latar belakang masalah, rumusan masalah, tujuan penulisan, dan sistematika penulisan.
- 2) Bab II berjudul Teori Pendukung, berisi tentang pengetahuan dasar yang diperlukan untuk membantu memahami isi dari skripsi ini.
- 3) Bab III berjudul Teori Ramsey, berisi: peta konsep teori Ramsey, penentuan nilai  $R(3,3)$ , penentuan nilai  $n$ , rentangan keberadaan bilangan Ramsey, hasil lain dalam masalah dua warna, hasil dalam masalah  $m$  warna, dan hasil dalam masalah  $m$  warna, jika  $K_n$  graf tak hingga.
- 4) Bab VI berjudul Aplikasi Teorema Ramsey, berisi aplikasi Teorema 3.8 pada pembuktian Teorema Schur dan Teorema Terakhir Fermat (mod  $p$ ).
- 5) Bab V berjudul Kesimpulan dan Saran, berisi kesimpulan dari penulisan tugas akhir ini dan saran untuk pengembangan bahasan teori Ramsey.