BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matriks Toeplitz T yang dikaji dalam karya tulis ini adalah matriks n x n dengan nilai entri $t_{k,j} = t_{k+1,j+1}$ dan indeks yang digunakan setiap entrinya adalah $t_{k,j} = t_{k-j}$. Secara umum matriks Toeplitz dituliskan dalam bentuk

$$T = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \dots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & \ddots & & \\ t_2 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & t_{-1} \\ t_{n-1} & & \dots & t_1 & t_0 \end{bmatrix}.$$

Matriks di atas diberi nama matriks Toeplitz, sebagaimana penemu pertamanya yaitu Otto Toeplitz, seorang matematikawan berkebangsaan Jerman di awal abad 20. Penelitian mengenai ruang matriks Toeplitz telah banyak dilakukan, misalnya oleh [6] dan [5], sedangkan [9] mendalami sifat asimtotik matriks Toeplitz. Pengembangan dengan pendekatan dan arah yang berbeda dilakukan oleh [3] dan [7] melakukannya tahun 1998 sampai dengan sekarang.

Beberapa penelitian diatas membahas sifat-sifat himpunan $\mathcal{T}_n$ yang dibangun oleh matriks-matriks Toeplitz orde n, yaitu untuk $n > 0$ $\mathcal{T}_n \coloneqq \{T : T\ matriks\ Toeplitz\ n \times n\}$. Dibawah penjumlahan dan perkalian skalar, $\mathcal{T}_n$ merupakan ruang vektor, yang memenuhi sifat-sifat bahwa untuk sebarang $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_n$ dan $k \in \mathbb{C}$ maka $T_1 + T_2 \in \mathcal{T}_n$ dan $kT_1 \in \mathcal{T}_n$. Telah diketahui bahwa di ruang vektor V dapat didefinisikan norm umum $\|\cdot\|$, yaitu fungsi dari ruang vektor V ke $\mathbb{R}$ yang memenuhi sifat kepositifan, homogenitas, dan ketaksamaan segitiga, selanjutnya V disebut ruang vektor bernorm. Telah banyak dikaji sifat-sifat pada ruang vektor bernorm, salah satunya adalah aspek kelengkapannya. Ruang Banach adalah ruang vektor bernorm yang lengkap, yaitu setiap barisan Cauchy-nya konvergen (ke ruang vektor V).

Sebagaimana diuraikan diatas, $\mathcal{T}_n$ adalah ruang vektor. Pada tugas akhir ini akan dikonstruksi suatu norm pada $\mathcal{T}_n$, yang kemudian disebut norm matriks. Norm matriks memenuhi sifat nonnegatif, kepositifan, homogenitas, ketaksamaan segitiga dan submultiplikatif. Sifat perkalian (submultiplikatif) tidak ditemukan pada norm umum. Pada tulisan ini akan dibahas beberapa jenis norm pada $\mathcal{T}_n$, yaitu norm pada ruang $\ell^1(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{N})$ dan $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Selanjutnya, kajian ini akan difokuskan pada pengkonstruksian ruang Banach dari $\mathcal{T}_n$ dengan menggunakan norm matriks diatas.

1.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang diutarakan di atas, dapat dirumuskan beberapa masalah yang akan dikaji dalam tugas akhir ini, diantaranya:

1. Bagaimana hubungan antara norm umum dan norm matriks?
2. Bagaimana mengkonstruksi ruang Banach dari

   $\mathcal{T}_n \coloneqq \{T : T \ matriks \ Toeplitz \ n \times n\}$?

1.3 Tujuan Penelitian

1. Mengetahui hubungan antara norm umum dan norm matriks.
2. Mengetahui konstruksi ruang Banach dari

   $\mathcal{T}_n \coloneqq \{T : T \; matriks \; Toeplitz \; n \times n\}$.

1.4 Manfaat Penelitian

Diharapkan tugas akhir ini akan memberikan sumbangan yang bermanfaat bagi perkembangan matematika, khususnya analisis fungsional dan aljabar operator. Lebih khusus lagi, tugas akhir ini memberikan deskripsi yang lebih konkrit tentang

- Sifat dan perilaku umum dari matriks Toeplitz,
- Struktur dari matrik-matriks Toeplitz,
- Kaitan antara norm umum pada analisis fungsional dengan matriks Toeplitz.