BAB III

NORM MATRIKS PADA HIMPUNAN DARI MATRIKS-MATRIKS TOEPLITZ

3.1 Matriks Toeplitz

Definisi 3.1 *Matriks Toeplitz adalah suatu matriks* $n \times n : T_n = \lfloor t_{k,j}; k, j = 0,1,\ldots,n-1 \rfloor$*, dengan nilai* $t_{k,j} = t_{k+1,j+1}$ *dan indeks yang digunakan setiap entrinya adalah* $t_{k,j} = t_{k-j}$*. Secara umum dituliskan dlaam bentuk*

$$T_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} & & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

Contoh:

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T_5 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & -2 & -1 & 2 & 3 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 2 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Salah satu contoh matriks Toeplitz adalah matriks Sirkulan. Matriks Sirkulan adalah matriks Toeplitz yang memiliki bentuk:

$$C_n = \begin{bmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_{-(n-1)} & t_0 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{-1} & & \cdots & t_0 \end{bmatrix}$$

dimana setiap baris adalah perubahan siklis dari baris di atasnya. Strukturnya bisa juga dituliskan bahwa entri (*k*,*j*) dari matriks sirkulan, $C_{k,j}$ diberikan oleh

$$C_{k,j} = c_{(j-k) \bmod n}.$$

Matriks Sirkulan ini digunakan sebagai pendekatan dan menjelaskan perilaku matriks Toeplitz. Selain itu operasi matriks akan lebih mudah ketika berbentuk matriks Sirkulan karena matriks Sirkulan memiliki lebih sedikit entri yang berbeda dari matriks Toeplitz secara umum. Berikut adalah contoh matriks Sirkulan

$$C_5 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.2 Norm Matriks

Misalkan $M_n(\mathbb{C})$ adalah ruang vektor dari matriks-matriks berukuran $n \times n$ atas lapangan $\mathbb{C}$. Berikut ini didefinisikan norm matriks pada $M_n(\mathbb{C})$.

Definisi 3.2 *Sebuah fungsi* $|||\cdot|||: M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ *adalah sebuah norm matriks jika untuk setiap A, B* $\in M_n(\mathbb{C})$, *memenuhi aksioma berikut:*

1) $|||A||| \geq 0$, (nonnegatif)
2) $|||A||| = 0$ jika dan hanya jika $A = 0$, (positif)
3) $|||cA||| = |c|\ |||A|||$, untuk setiap $c \in \mathbb{C}$, (homogen)
4) $|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||$, (ketaksamaan segitiga)

5) $|||AB||| \le |||A|||\ |||B|||$. (submultiplikatif)

Dari definisi tentang norm matriks di atas, dapat dilihat bagaimana hubungan norm matriks dan norm umum. Melihat dari sifat yang harus dipenuhinya, norm matriks memiliki syarat tambahan, yaitu submultiplikatif. Pada norm umum, sifat ini belum tentu dipenuhi, karena operasi perkalian tidak dikenal pada ruang vektor umum. Jadi norm matriks lebih khusus.

Kemudian akan dibahas bagaimana mengkonstruksi norm matriks dari norm umum di ruang $\ell^1(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{N})$ dan $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

3.3 Jenis-Jenis Norm Matriks

3.3.1 Norm $|||\cdot|||_1, |||\cdot|||_2$ dan $|||\cdot|||_\infty$

a) Norm $|||\cdot|||_1$

Pada bagian ini akan ditampilkan jenis-jenis norm matriks pada ruang $\ell^1(\mathbb{N})$, $\ell^2(\mathbb{N})$ dan $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Untuk bagian pertama adalah norm $|||\cdot|||_1$ yang didefinisikan dengan $|||A|||_2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|, \forall A \in M_n(\mathbb{C})$, sebagaimana dijelaskan pada Lemma dibawah ini

Lemma 3.3.1.1 *Jika* $|||A|||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|$ *untuk setiap* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, *maka* $|||A|||_1$ *sebuah norm matriks di* $M_n(\mathbb{C})$.

Bukti:

1. Ambil sebarang $A \in M_n(\mathbb{C})$. Perhatikan bahwa

$$|||A|||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = |a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}| + \ldots + |a_{nn}|, \; a \in \mathbb{C}.$$

Karena $|a_{ij}| \geq 0, \; \forall i, j = 1, 2, \ldots, n$ diperoleh $|||A|||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| \geq 0,$

maka sifat 1) terpenuhi.

2. Akan dibuktikan jika $|||A|||_1 = 0$ maka $A = 0$.

   Misalkan $A \in M_n(\mathbb{C})$ M_n dengan $|||A|||_1 = 0$.

   Perhatikan bahwa:

$$|||A|||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = 0,$$

   karena $|a_{ij}| \geq 0, \; \forall i, j$ maka $|a_{ij}| = 0$. Akibatnya $a_{ij} = 0$,

   jadi $A = 0$.

   Selanjutnya akan dibuktikan jika $A = 0$ maka $|||A|||_1 = 0$.

   Misalkan $A = 0$, artinya $a_{ij} = 0, \; \forall i, j$.

   Dengan demikian:

$$|||A|||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = \sum_{i,j=1}^{n} |0| = 0,$$

   maka sifat 2) terpenuhi.

3. Ambil sebarang $A \in M_n(\mathbb{C})$, $c \in \mathbb{C}$, karena

$$|||cA|||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |ca_{ij}|$$

$$= |ca_{11}| + |ca_{12}| + |ca_{13}| + \cdots + |ca_{nn}|$$

$$= |c||a_{11}| + |c||a_{12}| + |c||a_{13}| + \cdots + |c||a_{nn}|$$

$$= |c|(|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{nn}|)$$

$$= |c| \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| = |c|\ |||A|||_1,$$

maka sifat 3) terpenuhi.

4. Karena untuk sebarang $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ berlaku:

$$|||A+B|||_1 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \le \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}| = |||A|||_1 + |||B|||_1,$$

maka sifat 4) terpenuhi.

5. Perhatikan bahwa untuk $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ berlaku:

$$|||AB|||_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}b_{kj}|$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ik}b_{mj}| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{mj}|\right)$$

$$= |||A|||_1|||B|||_1,$$

maka sifat 5) terpenuhi. □

Norm pada definisi di atas disebut juga *Entrywise norm.*

b) Norm $|||\cdot|||_2$

Norm berikutnya adalah norm $|||\cdot|||_2$ yang didefinisikan dengan

$|||A|||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}, \forall A \in M_n(\mathbb{C})$, sebagaimana dijelaskan pada Lemma dibawah ini.

Lemma 3.3.1.2 *Jika* $|||A|||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2}$ *untuk semua* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, *maka* $|||\cdot|||_2$ *sebuah norm matriks di* $M_n(\mathbb{C})$.

Bukti.

1. Ambil sebarang $A \in M_n(\mathbb{C})$, perhatikan bahwa

$$|||A|||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(|a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + |a_{13}|^2 + \ldots + |a_{nn}|^2\right)^{1/2}, a \in \mathbb{C}.$$

Karena $|a_{ij}|^2 \geq 0, \ \forall i,j = 1,2,\ldots,n$ maka $|||A|||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} \geq 0$,

maka sifat 1) terpenuhi.

2. Akan dibuktikan jika $|||A|||_2 = 0$ maka $A = 0$

Misalkan $A \in M_n(\mathbb{C})$ dengan $|||A|||_2 = 0$. Perhatikan bahwa:

$$|||A|||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{1/2} = 0$$

$$|||A|||_2^2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right) = 0.$$

Karena $\left|a_{ij}\right| \geq 0, \forall i, j$ maka $|a_{ij}| = 0$ akibatnya $a_{ij} = 0$.

Jadi $A = 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan jika $A = 0$ maka $|||A|||_2 = 0$.

Misalkan $A = 0$ artinya $a_{ij} = 0$.

Dengan demikian

$$|||A|||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |0|^2\right)^{1/2} = 0,$$

maka sifat 2) terpenuhi.

2. Ambil sebarang $A \in M_n(\mathbb{C})$, $c \in \mathbb{C}$, karena

$$|||cA|||_2 = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|ca_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$= (|ca_{11}|^2 + |ca_{12}|^2 + |ca_{13}|^2 + \cdots + |ca_{nn}|^2)^{1/2}$$

$$= (|c|^2|a_{11}|^2 + |c|^2|a_{12}|^2 + |c|^2|a_{13}|^2 + \cdots + |c|^2|a_{nn}|^2)^{1/2}$$

$$= (c^2(a_{11})^2 + c^2(a_{12})^2 + c^2(a_{13})^2 + \cdots + c^2(a_{nn})^2)^{1/2}$$

$$= (c^2)^{1/2}({a_{11}}^2 + {a_{12}}^2 + {a_{13}}^2 + \cdots + {a_{nn}}^2)^{1/2}$$

$$= |c| \left(\sum_{i,j=1}^{n} \left|a_{ij}\right|^2\right)^{1/2}$$

$$= |c| \; |||A|||_2,$$

maka sifat 3) terpenuhi.

3. Karena untuk sebarang $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ berlaku

$$|||A+B|||_2^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}+b_{ij}|^2$$

$$=|a_{11}+b_{11}|^2 + |a_{12}+b_{12}|^2 + \ldots + |a_{nn}+b_{nn}|^2$$

$$\leq (|a_{11}|+|b_{11}|)^2 + (|a_{12}|+|b_{12}|)^2 + \ldots + (|a_{nn}|+|b_{nn}|)^2$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 + 2\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}||b_{ij}| + \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2 + 2\left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i,j=1}^{n} |b_{ij}|^2$$

$$= |||A|||^2 + 2|||A|||\,|||B||| + |||B|||^2$$

$$= (|||A||| + |||B|||)^2.$$

Dengan mengambil akar-akar kuadratnya maka akan didapatkan

$$|||A+B||| \leq |||A||| + |||B|||,$$

maka sifat 4) terpenuhi.

4. Perhatikan bahwa untuk $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ berlaku

$$|||AB|||_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ij}b_{kj}\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{m=1}^{n}|b_{mj}|^2\right)$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|^2\right)\left(\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|b_{mj}|^2\right)$$

$$= |||A|||_2^2\ |||B|||_2^2,$$

maka sifat 5) terpenuhi □

Norm $\ell^2(\mathbb{N})$ ini biasa disebut sebagai norm *Frobenius*, norm *Schur*, atau norm *Hilbert-Schmidt.*

c) Norm $|||\cdot|||_\infty$

Norm berikutnya adalah norm $|||\cdot|||_\infty$ yang didefinisikan dengan $|||A|||_\infty \coloneqq \max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|, \forall A \in M_n(\mathbb{C})$, sebagaimana dijelaskan pada Lemma dibawah ini.

Lemma 3.3.1.3 *Jika* $|||A|||_\infty \coloneqq \max\limits_{1\le i,\, j\ge n}|a_{ij}|$ *untuk semua* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$, *maka* $|||\cdot|||_\infty$ *sebuah norm matriks di* $M_n(\mathbb{C})$.

Bukti.

1. Ambil sebarang $A \in M_n(\mathbb{C})$. Perhatikan bahwa

$$|||A|||_\infty = \max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|.$$

Karena $|a_{ij}| \ge 0, \forall i, j = 1,\ldots,n$ maka

$$|||A|||_\infty = \max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}| \ge 0,$$

maka sifat 1) terpenuhi.

2. Akan dibuktikan jika $|||A|||_\infty = 0$ maka $A = 0$.

Misalkan $A \in M_n$ dengan $|||A|||_\infty = 0$.

Perhatikan bahwa

$$|||A|||_\infty = \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \ge 0.$$

Karena $|a_{ij}| \ge 0, \forall i,j$ maka $\max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| \ge 0$.

Sehingga $|a_{ij}| = 0$ akibatnya $a_{ij} = 0$.

Jadi $A = 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan jika $A = 0$ maka $|||A|||_\infty = 0$.

Misalkan $A = 0$ artinya $a_{ij} = 0$, dengan demikian

$$|||A|||_\infty = \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| = \max_{1\le i,j\le n} |0| = 0.$$

maka sifat 2) terpenuhi.

3. Ambil sebarang $A \in M_n(\mathbb{C})$, $c \in \mathbb{C}$, karena

$$|||cA|||_\infty = \max_{1\le i,j\le n} |ca_{ij}| = |c| \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| = |c||a_{ij}| = |c|\ |||A|||_\infty,$$

maka sifat 3) terpenuhi.

4. Karena untuk sebarang $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ berlaku

$$|||A+B|||_\infty = \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}+b_{ij}| \le \max_{1\le i,j\le n} |a_{ij}| + \max_{1\le i,j\le n} |b_{ij}|$$

$$= |||A|||_\infty + |||B|||_\infty,$$

maka sifat 4) terpenuhi.

Untuk membuktikan norm $\|\cdot\|_\infty$ memenuhi sifat perkalian (submultiplikatif), dibutuhkan Lemma berikut ini.

Lemma 3.3.1.4 *Jika* $|||\, \boldsymbol{A} \,||| \coloneqq n\, |||A|||_\infty$ *untuk setiap* $A \in M_n(\mathbb{C})$, *maka* $|||\cdot|||$ *sebuah norm matriks di* $M_n(\mathbb{C})$.

Bukti.

Karena untuk sebarang $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, berlaku

$$|||\, AB \,||| = n \max_{1\le i,\, j\le n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right|$$

$$= n \max_{1\le i,\, j\le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| |b_{kj}|$$

$$\le n \max_{1\le i,j\le n} \sum_{k=1}^{n} |||A|||_\infty\, |||B|||_\infty \,,\, karena\ |a_{ik}| \le |||A|||_\infty$$

$$= n \max_{1\le i,j\le n} \big(n(|||A|||_\infty\, |||B|||_\infty)\big)$$

$$= n\big(n(|||A|||_\infty\, |||B|||_\infty)\big)$$

$$= (n|||A|||_\infty)(n|||B|||_\infty)$$

$$= |||A|||.|||B|||\,,$$

maka sifat 5) terpenuhi.

Norm pada definisi di atas disebut juga norm maksimum (*maximum norm).*

3.3.2 Norm Matriks yang Dibangun oleh Norm Vektor

Definisi 3.3.2.1 *Misalkan* $\|\cdot\|$ *adalah norm vector di* $\mathbb{C}^n$, *yaitu* $\|\cdot\|: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, *didefinisikan* $|||\, A \,||| \equiv \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|$ *untuk setiap* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *dan* $x \in \mathbb{C}^n$.

Digunakan kata *maksimum* pada definisi di atas (tidak menggunakan *supremum*) karena untuk setiap $\|A\|$ adalah fungsi kontinu pada bola unit $B_{\|\bullet\|} \equiv B_{\|\bullet\|}(1;0) = \{y \in V : \|y\| \le 1\}$ adalah himpunan yang padat, dengan demikian maksimumnya dicapai. Untuk norm matriks pada definisi di atas, akan dibuktikan bahwa $|||\, A \,||| = \max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = \max\limits_{\|x\| \le 1} \|Ax\| = \max\limits_{x \ne 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max\limits_{\|x\|_\alpha} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$, dimana $\|\cdot\|_\infty$ adalah norm vektor.

Bukti:

Diketahui

$$|||A||| \equiv \max_{\|x\|=1} \|A(x)\| = \max\{\|A(x)\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\}.$$

a) Akan dibuktikan

$$|||A||| = \max\{\|A(x)\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\} = \max\left\{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} : x \ne 0, x \in \mathbb{C}^n\right\}..$$

Perhatikan

$$\max\left\{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} : x \ne 0, x \in \mathbb{C}^n\right\} = \max\left\{\frac{1}{\|x\|}\|A(x)\| : x \ne 0, x \in \mathbb{C}^n\right\}$$

$$= \max\left\{\left\|\frac{1}{\|x\|} A(x)\right\| : x \ne 0, x \in \mathbb{C}^n\right\}$$

$$= \max\left\{\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| : \left(\frac{x}{\|x\|}\right) = 1, x \in \mathbb{C}^n\right\}.$$

Misalkan$\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = y \in \mathbb{C}^n$, maka

$$\max\left\{\left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| : \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\right\} = \max\{\|A(y)\| : \|y\| = 1, y \in \mathbb{C}^n\}.$$

Karena *y* hanya variabel boneka maka didapatkan:

$$|||A||| = \max\{\|A(x)\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\} = \max\left\{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n\right\}..$$

b) Akan dibuktikan

$$|||A||| = \max\{\|A(x)\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\} = \max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Harus dibuktikan:

$$|||A||| = \max\{\|A(x)\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\} \leq \max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Dan

$$|||A||| = \max\{\|A(x)\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\} \geq \max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\}.$$

- akan ditunjukkan

$$|||A||| \leq \max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Perhatikan :

$$\|Ax\| \leq \frac{\|Ax\|}{\|x\|}; \|x\| \leq 1, x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n,$$

Artinya

$$\max\left\{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n\right\} \geq \max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\}..$$

Berdasarkan a)

$$|\|A\|| = \max\{\|A(x)\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\} = \max\left\{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0, x \in \mathbb{C}^n\right\}.$$

Didapatkan

$$|\|A\|| \geq \max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Akan ditunjukkan

$$|\|A\|| \geq \max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Diketahui

$$|\|A\|| = \max\{\|A(x)\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\},$$

Didapatkan

$$\|A(x)\| \leq |\|A\||\|x\|; \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n.$$

Artinya

$$\max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\} \leq \max\{|\|A\||\|x\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\}$$

$$\max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\} \leq |\|A\|| \max\{\|x\| : \|x\| = 1, x \in \mathbb{C}^n\}$$

$$\max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\} \leq |\|A\||$$

Sehingga didapatkan

$$|\|A\|| \geq \max\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1, x \in \mathbb{C}^n\}.$$

Teorema 3.3.2.2 *Fungsi* $|||\cdot|||$ *yang didefinisikan seperti pada Definisi 3.3.2.1, adalah norm matriks pada* $M_n(\mathbb{C})$*, lebih lanjut* $\|Ax\| \leq ||| A ||| \, \|x\|$ *untuk semua* $A \in M_n(\mathbb{C})$ *dan semua* $x \in \mathbb{C}^n$ *dan norm identitas I:* $||| I ||| = 1$.

Bukti.

1. Misalkan $A \in M_n(\mathbb{C})$, karena $|||A|||$ adalah maksimum dari bilangan positif, maka $|||A||| \geq 0$.

   Jadi $|||A||| \geq 0$,

   maka sifat 1) terpenuhi.

2. Akan dibuktikan, jika $||| A ||| = 0$ maka $A = 0$.

   Misalkan $A \in M_n(\mathbb{C})$ dengan $||| A ||| = 0$.

   Artinya $\|Ax\| = 0, \forall\, x$ dengan $\|x\| = 1$, hal ini berakibat $A = 0$.

   Jadi $A = 0$.

   Selanjutnya akan dibuktikan, jika $A = 0$ maka $||| A ||| = 0$.

   Misalkan $A = 0$ artinya $a_{ij} = 0$, dengan demikian

   $||| A ||| \equiv \max_{\|x\|=1} \|Ax\| \equiv \max_{\|x\|=1} \|0\| \equiv 0$.

   Jadi $|||A||| = 0$,

   maka sifat 2) terpenuhi.

3. Ambil sebarang $A \in M_n(\mathbb{C})$, $c \in \mathbb{C}$, karena

$$\|cA\| \equiv \max_{\|x\|=1}\|cAx\| = \max_{\|x\|=1}|c|\|Ax\| = |c|\max_{\|x\|=1}\|Ax\| = |c|\,|||\,A\,|||\,,$$

maka sifat 3) terpenuhi.

4. Karena untuk sebarang $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ berlaku

$$|||\,A+B\,||| = \max_{\|x\|=1}\|(A+B)x\|$$

$$= \max_{\|x\|=1}\|Ax + Bx\|$$

$$\leq \max_{\|x\|=1}\left(\|Ax\| + \|Bx\|\right)$$

$$\leq \max_{\|x\|=1}\|Ax\| + \max_{\|x\|=1}\|Bx\|$$

$$= |||\,A\,||| + |||\,B\,|||\,,$$

maka sifat 4) terpenuhi.

5. Ambil sebarang $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Perhatikan bahwa

$$|||\,AB\,||| = \max_{x\neq 0}\frac{\|ABx\|}{\|x\|}$$

$$= \max_{x\neq 0}\frac{\|ABx\|}{\|Bx\|}\frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$\leq \max_{y\neq 0}\frac{\|Ay\|}{\|y\|}\max_{x\neq 0}\frac{\|Bx\|}{\|x\|}$$

$$= |||\,A\,|||\,.\,|||\,B\,|||\,,$$

maka sifat 5) terpenuhi. □

Norm matriks $|||\cdot|||$ yang didefinisikan pada Definisi 3.3.2.1 di atas adalah norm matriks yang diinduksi oleh norm vektor $\|\cdot\|$. Norm matriks ini sering disebut norm operator atau norm batas atas terkecil (*least upper bound*) yang bersesuaian dengan norm vektor $\|\cdot\|$. ([1]: 294)

Norm operator adalah suatu norm matriks sebagai konsekuensi dari semua sifat umum norm vektor. Oleh karena itu, satu jalan untuk membuktikan bahwa suatu fungsi tertentu pada $M_n(\mathbb{C})$ adalah suatu norm matriks dengan menunjukkan bahwa ia diinduksi oleh beberapa norm vektor. Selanjutnya akan dipakai cara ini ketika membicarakan norm matriks utama yang disebut norm s*pectral*. ([1]: 294)

Ketidaksamaan pada argumen Teorema 3.3.2.2 menyatakan bahwa norm vektor $\|\cdot\|$ adalah sesuai dengan norm matriks yang diinduksi $|||\cdot|||$, dan teorema ini menunjukkan bahwa berkaitan dengan sebarang norm vektor pada $\mathbb{C}^n$ terdapat norm matriks yang sesuai di $M_n(\mathbb{C})$. Teorema ini juga memberikan syarat perlu untuk $|||\ I\ ||| = 1$, untuk suatu norm matriks $|||\cdot|||$ yang akan diinduksi oleh beberapa norm vektor. Sayangnya syarat perlu ini bukan merupakan syarat cukup. ([1]: 294)

Selanjutnya akan diberikan beberapa contoh penting dari norm matriks yang di induksi oleh norm $\ell^p(\mathbb{N})$ yang sudah biasa digunakan tetapi, bisa juga dihitung secara langsung tanpa merujuk Definisi 3.3.2.1. Dalam kasus ini, akan diambil $A = \lfloor a_{ij} \rfloor \in M_n(\mathbb{C})$. ([1]: 294)

Teorema 3.3.2.3 *Norm matriks jumlah kolom maksimum* $|||\cdot|||_1$ *ini didefinisikan* $M_n(\mathbb{C})$ *melalui* $||| A |||_1 \equiv \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$. *Norm matriks* $|||\cdot|||_1$ *ini diinduksi oleh vektor kolom* $\ell^2(\mathbb{N})$, *oleh karena itu menjadi norm matriks.*

Bukti

Ambil $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$ dan vektor-vektor kolom dari A

adalah

$a^1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$, $a^2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$,..., $a^n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix}$, sehingga dapat dituliskan

$A = [a^1 a^2 \dots a^n]_n$, $a^i \in \mathbb{C}^n$,

Maka $|||A|||_1 \equiv \max_{1 \le i \le n} \|a^i\|_1$, jika $x = [x_i]$,

maka $\|Ax\|_1 = \|x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n\|_1$

$\le \sum_{i=1}^{n} \|x_i a^i\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|a^i\|_1$

$\le \sum_{i=1}^{n} |x_i| (\max_{1 \le k \le n} \|a^k\|_1) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|A\|_1$

$= \|x\|_1 |||A|||_1,$

maka sifat satu terpenuhi.

Dengan demikian $\max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1 \leq ||| A |||$. Selanjutnya dipilih $x = e_k$ (unit vektor basis ke k), kemudian untuk sebarang k = 1,2,…,n, maka

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geq \|1a^k\|_1 = \|a^k\|_1,$$

Jadi,

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \geq \max_{1\leq k\leq n} \|a^k\|_1 = |||A|||_1.$$

Sehingga sudah dibuktikan bahwa norm matriks yang diinduksi oleh norm vektor $\ell^2(\mathbb{N})$ merupakan batas atas dan batas bawah pada $||| A |||_1$.

Akan dibuktikan bahwa $|||\cdot|||_1$ merupakan norm matriks.

1. Untuk sebarang $A \in M_n(\mathbb{C})$, berlaku

   $||| A |||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$, jelaslah bahwa $|a_i| \geq 0, \forall i = 1,2,...n$

   Akibatnya $||| A |||_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \geq 0$.

   Jadi $||| A |||_1 \geq 0$,

   maka sifat 1) terpenuhi.

2. Akan dibuktikan, jika $|||A|||_1 = 0$ maka $A = 0$.

   Misalkan $A \in M_n(\mathbb{C})$ dengan $||| A |||_1 = 0$.

Perhatikan bahwa: $|||A|||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = 0$

Karena $|a_{ij}| \ge 0$, maka $|a_{ij}| = 0$. Akibatnya $a_{ij} = 0$.

Jadi $A = 0$.

Akan dibuktikan, jika $A = 0$ maka $|||A|||_1 = 0$.

Misalkan $A = 0$ artinya $a_{ij} = 0, \forall i, j.$, dengan demikian

$|||A|||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |0| = 0$.

Jadi $|||A|||_1 = 0$,

maka sifat 2) terpenuhi.

3. Ambil sebarang $A \in M_n(\mathbb{C})$, $c \in \mathbb{C}$, karena

$|||cA|||_1 \equiv \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |ca_{ij}| = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |c||a_{ij}| = \max_{1\le j\le n} |c| \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = |c| \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| = |c|\, |||A|||_1$

maka sifat 3) terpenuhi.

4. Karena untuk sebarang $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ berlaku

$|||A+B|||_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \le \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| + \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{n} |b_{ij}| = |||A|||_1 + |||B|||_1$,

maka sifat 4) terpenuhi.

5. Ambil sebarang $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Perhatikan bahwa

$$||| AB |||_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} b_{ij} \right|$$

$$= \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} \left| a_{ij} \right| \left| b_{ij} \right|$$

$$= |||A|||.|||B||| ,$$

maka sifat ke 5) terpenuhi.