BAB III

TEOREMA KARAKTERISASI DISTRIBUSI POISSON

Sebelum penulis mengembangkan teorema karakterisasi poisson dengan mengasumsikan kedua peubah acak tersebut berdistribusi poisson untuk melihat kaitan antara peluang A dan B seri terhadap banyaknya jumlah skor yang diperoleh masing-masing tim. Penulis terlebih dahulu akan menjabarkan teorema karakterisasi distribusi *Poisson*

3.1 Teorema Karakterisasi Distribusi Poisson

Teorema 3.1.1 (Tanaka ; Integral vol.6 no.1, april 2001)

1. Jika $N_A(\lambda)$ suatu peubah acak berdistribusi *poisson* dengan rata-rata $\lambda \geq 0$ dan Y_B peubah acak bernilai bilangan bulat non-negatif yang saling bebas dengan $X_A(\lambda)$, maka akan berlaku :

$$\frac{d}{d\lambda} P[N_A(\lambda) > M_B] = P[N_A(\lambda) = M_B] \tag{3-1}$$

2. Sebaliknya misalkan $N_A(\lambda)$ merupakan suatu peubah acak bernilai bilangan bulat non-negatif yang memiliki rata-rata $\lambda \geq 0$ dengan $p_n(\lambda)=P[N_A(\lambda) =n]$ yang dapat diturunkan terhadap λ dan Y_B suatu peubah acak bernilai bilangan bulat non-negatif yang saling bebas dengan $N_A(\lambda)$. Jika (3-1) dipenuhi untuk semua peubah acak Y_B maka $N_A(\lambda)$ berdistribusi *Poisson*.

bukti 1 :

Mis. $A=\{(a_1,c_1),(a_2,c_2),(a_3,c_3),\ldots,(a_i,c_i)\}$ dan $B=\{(b_1,d_1),(b_2,d_2),(b_3,d_3),\ldots,(b_i,d_i)\}$ adalah himpunan skor hasil pertandingan tim A dan tim B melawan tim-tim lain yang tak berhingga banyaknya. Jika a_i dan b_i adalah skor tim A dan tim B, sedangkan c_i dan d_i adalah skor tim-tim lain, maka tim A dan tim B dikatakan memenangkan pertandingan apabila $(a_i > c_i)$ dan $(b_i > d_i)$. Apabila $N_A(\lambda)$ dan M_B adalah suatu peubah acak diskrit yang menunjukkan banyaknya gol dari tiap pertandingan yang dimenangkan oleh tim A dan tim B dengan nilai $n_1, n_2, ..., n_i$ dan $m_1, m_2, ..., m_i$ maka untuk setiap $n_i = 0,1,2,...$ mempunyai nilai peluang sebesar $P\left(N_A(\lambda) = n_i\right)$ dan untuk setiap $m_i = 0,1,2,...$ mempunyai nilai peluang sebesar $P\left(M_B = m_i\right)$, jadi distribusi peluang $N_A(\lambda)$ untuk setiap $n_i = 0,1,2,...$ adalah $\left(\left(n=0, P\left(N_A(\lambda)=0\right)\right), \left(n=1, P\left(N_A(\lambda)=1\right)\right), ..., \left(n=x, P\left(N_A(\lambda)=x\right)\right), ..., \left(n=\infty, P\left(N_A(\lambda)=\infty\right)\right)\right)$, sedangkan distribusi peluang M_B untuk setiap $m_i = 1,2,...$ adalah $\left(\left(m=0, P\left(M_B=0\right)\right), \left(m=1, P\left(M_B=1\right)\right), ..., \left(n=y, P\left(M_B=y\right)\right), ..., \left(m=\infty, P\left(M_B=\infty\right)\right)\right)$

Diketahui bahwa $N_A(\lambda)$ berdistribusi *Poisson* dengan $p_n(\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ dan M_B peubah acak bernilai bilangan bulat non-negatif q_m. Karena $N_A(\lambda)$ dan M_B saling bebas, maka fungsi peluang gabungan $N_A(\lambda)$ dan M_B adalah

$$
\begin{aligned}
P\left(M_B, N_A(\lambda)\right) &= q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \quad ; \mathrm{m} = 0,1,2,... \text{ dan } \mathrm{n} = 0,1,2,... \\
&= 0 \quad ; \mathrm{n}, m \text{ lainnya}
\end{aligned}
$$

Misalkan $P\left(M_B = y, N_A(\lambda) = x\right)$, apabila $x = y$, maka

$$P\left(M_B = N_A(\lambda)\right) = P\left(M_B \geq y, N_A(\lambda) \geq x\right)$$

Jadi, ruas kanan dari (3-1) adalah

$$P\left(M_B = N_A(\lambda)\right) = P\left(M_B \geq 0, N_A(\lambda) \geq 0\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P\left(M_B = N_A(\lambda)\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} + ...\right)$$

$$P\left(M_B = N_A(\lambda)\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(q_m\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} + \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} + ...\right)\right)$$

$$\boxed{P\left(M_B = N_A(\lambda)\right) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^m}{m!}}$$

Jika $x > y$ ekivalen dengan $x = y+1$, maka

$$P\left(N_A(\lambda) > M_B\right) = P\left(M_B \geq y, N_A(\lambda) \geq y+1\right) = \sum_{m=y}^{\infty} \sum_{n=y+1}^{\infty} q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

$$P\left(N_A(\lambda) > M_B\right) = P\left(M_B \geq y, N_A(\lambda) \geq y+1\right) = \sum_{m=y=0}^{\infty} \sum_{n=y+1}^{\infty} q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$$

Akibatnya, ruas kiri dari (3-1) menjadi

$$\frac{d}{d\lambda} P\left(N_A(\lambda) > M_B\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\sum_{m=y=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)$$

$$\frac{d}{d\lambda} P\left(N_A(\lambda) > M_B\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{e^{-\lambda}.\lambda^n}{n!}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\lambda}.\lambda^n\right)\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(n.\lambda^{n-1}.e^{-\lambda} - \lambda^n.e^{-\lambda}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} \frac{1}{n!}.e^{-\lambda}.\lambda^n\left(\frac{n}{\lambda} - 1\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} e^{-\lambda}.\lambda^n\left(\frac{n}{\lambda n!} - \frac{1}{n!}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} e^{-\lambda}.\lambda^n\left(\frac{n.n! - \lambda.n!}{\lambda.n!.n!}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} e^{-\lambda}.\lambda^n\left(\frac{n-\lambda}{\lambda.n!}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} e^{-\lambda}.\lambda^n\left(\frac{n}{\lambda.n.(n-1)!} - \frac{\lambda}{\lambda.n!}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} e^{-\lambda}.\lambda^{n}\left(\frac{1}{\lambda.(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \left(\lim_{k\to\infty} \sum_{n=y+1}^{k} e^{-\lambda}\left(\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}-\frac{1}{n!}\right)\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \left(\underbrace{\lim_{k\to\infty} \sum_{n=y+1}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}}_{S_1} + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sum_{n=y+1}^{k}\left(-e^{-\lambda}\frac{1}{n!}\right)}_{S_2}\right)\right)$$

Karena $S_2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=y+1}^{k}\left(-e^{-\lambda}\frac{1}{n!}\right) = 0$ maka S_2 adalah barisan yang konvergen

Apabila $S_1 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=y+1}^{k} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=y+1}^{k} \frac{n}{\lambda}\underbrace{\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}}_{p_n}$, maka

$\lim_{n\to\infty} \sum_{n=y+1}^{k} np_n(\lambda)\frac{1}{\lambda} \neq 0$ berarti S_1 adalah barisan yang divergen.

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=y+1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{0}}{0!}+\frac{e^{-\lambda}\lambda^{1}}{1!}+\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2}}{2!}+\ldots\right)\right)$$

$$= \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_y \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{(y)!}\right)\right)$$

$$\boxed{= \sum_{m=0}^{\infty}\left(q_m \frac{e^{-\lambda}\lambda^{m}}{m!}\right)}$$

Karena ruas kanan dan ruas kiri identik maka (3-1) terbukti.

Bukti 2 :

Diasumsikan bahwa $N_A(\lambda)$ merupakan suatu peubah acak bernilai bilangan bulat non-negatif dengan rerata λ. Untuk membuktikan bahwa $N_A(\lambda)$ merupakan suatu peubah acak berdistribusi *Poisson* dengan rerata λ, dimulai dengan kenyataan bahwa,

$$P\left(N_A(\lambda) > M_B\right) = 1 - \left(P\left(N_A(\lambda) \le M_B\right)\right) \tag{3-3}$$

Jika $x < y$, maka $P\left(N_A(\lambda) \le M_B\right) = P\left(M_B \ge y, N_A(\lambda) \le y\right)$

Akibatnya, ruas kiri dari (3-1) menjadi

$$\frac{d}{d\lambda} P\left(N_A(\lambda) > M_B\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(1 - P\left(N_A(\lambda) \le M_B\right)\right)$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(1 - P\left(N_A(\lambda) \le M_B\right)\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(1 - \sum_{m=y=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{y} q_m p_n(\lambda)\right)$$

$$= \frac{d}{d\lambda}\left(1 - \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_y \sum_{n=0}^{m} p_x(\lambda)\right)\right)$$

$$= -\sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=0}^{m} \frac{d}{d\lambda}\left(p_x(\lambda)\right)\right)$$

$$= -\sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=0}^{y} p'_x(\lambda)\right)$$

$$= -\sum_{m=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=0}^{m} p'_n(\lambda)\right) \tag{3-4}$$

sedangkan ruas kanan dari (3-1) adalah :

$$= \sum_{m=0}^{\infty} q_m p_m(\lambda) \tag{3-5}$$

berdasarkan (3-4) dan (3-5) didapatkan :

$$-\sum_{m=0}^{\infty} q_m p_m = \sum_{m=y=0}^{\infty}\left(q_m \sum_{n=0}^{y} p'_n(\lambda)\right)$$

$$-q_0 p_0(\lambda) - q_1 p_1(\lambda) - \ldots - q_m p_m(\lambda) = q_0(p_0^{'}(\lambda)) + q_1(p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda)) + \ldots + q_m(p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda) + \ldots + p_m^{'}(\lambda))$$

diperoleh,

$$-q_0 p_0 = q_0(p'_0(\lambda))$$

$$-q_1 p_1 = q_1(p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda))$$

$$-q_m p_m = q_m(p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda) + \ldots + p_m^{'}(\lambda))$$

jadi,

$$\sum_{n=0}^{m} p_n^{'}(\lambda) = -p_n(\lambda) \tag{3-6}$$

jika m = 0 maka,

$$p_0^{'}(\lambda) = -p_0(\lambda) \tag{3-7}$$

Berdasarkan (3-6) dan (3-7) didapat :

Untuk $m = 1$

$$p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda) = -p_1(\lambda)$$

$$p_1^{'}(\lambda) = -p_1(\lambda) + p_0(\lambda)$$

Untuk $m = 2$

$$p_0^{'}(\lambda) + p_1^{'}(\lambda) + p_2^{'}(\lambda) = -p_1(\lambda)$$

$$-p_0(\lambda) - p_1(\lambda) + p_0(\lambda) + p_2^{'}(\lambda) = -p_2(\lambda)$$

$$p_2^{'}(\lambda) = -p_2(\lambda) + p_1(\lambda)$$

Sehingga untuk m sembarang diperoleh :

$$p_m^{'}(\lambda) = -p_m(\lambda) + p_{m-1}(\lambda) \quad \forall m = 1, 2, \ldots\ldots. \tag{3-8}$$

Bukti kebenaran persamaan (3-8) dapat ditunjukkan dengan menggunakan prinsip induksi matematika, yaitu :

Dari persamaan (3-8) untuk $m = 1$, diperoleh :

$$p'_1(\lambda) = -p_1(\lambda) + p_0(\lambda)$$

Jadi pernyataan (3-8) benar untuk $m = 1$

Misalkan pernyataan (3-8) benar untuk $m = k$

Maka $p'_k(\lambda) = -p_k(\lambda) + p_{k-1}(\lambda)$

Akan dibuktikan untuk $m = k+1$ berlaku : $p'_{k+1}(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda) + p_k(\lambda)$

Perhatikan : $p'_k(\lambda) = -p_k(\lambda) + p_{k-1}(\lambda)$

Karena $p'_0(\lambda) + p'_1(\lambda) + ... + p'_k(\lambda) = -p_k(\lambda)$, maka :

$$p'_k(\lambda) = \left[p'_0(\lambda) + p'_1(\lambda) + ... + p'_k(\lambda) \right] + p_{k-1}(\lambda)$$

Kemudian kedua ruas ditambahkan $p'_{k+1}(\lambda)$ diperoleh :

$$p'_k(\lambda) + p'_{k+1}(\lambda) = \left[p'_0(\lambda) + p'_1(\lambda) + ... + p'_k(\lambda) \right] + p_{k-1}(\lambda) + p'_{k+1}(\lambda)$$

$$p'_k(\lambda) + p'_{k+1}(\lambda) = \left[p'_0(\lambda) + p'_1(\lambda) + ... + p'_k(\lambda) + p'_{k+1}(\lambda) \right] + p_{k-1}(\lambda)$$

karena $p'_0(\lambda) + p'_1(\lambda) + ... + p'_k(\lambda) + p'_{k+1}(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda)$, maka :

$$p'_k(\lambda) + p'_{k+1}(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda) + p_{k-1}(\lambda)$$

$$p_{k+1}(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda) + \left[p_{k-1}(\lambda) - p'_k(\lambda) \right]$$

karena $p_{k-1}(\lambda) - p'_k(\lambda) = p_k(\lambda)$, maka :

$$p'_{k+1}(\lambda) = -p_{k+1}(\lambda) + p_k(\lambda)$$

jadi, terbukti bahwa $p'_m(\lambda) = -p_m(\lambda) + p_{m-1}(\lambda) \quad \forall m = 1, 2, 3, ...$

Bentuk (3-7) dan (3-8) merupakan persamaan diferensial linear.

Karena λ merupakan rerata dari $X_A(\lambda)$ maka, $E(m) = \mu = \sum_{m=0}^{\infty} mp_m = \lambda$

Sehingga pada $\lambda = 0$ diperoleh :

$$E(m) = \sum_{m=0}^{\infty} mp_m(0) = 0p_0(0) + 1p_1(0) + 2p_2(0) + \ldots = 0 \qquad (*)$$

dan

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(0) = p_0(0) + p_1(0) + p_2(0) + \ldots = 1 \qquad (**)$$

Sehingga solusi dari (*) dan (**) adalah :

$p_0(0) = 1$ dan $p_1(0) = p_2(0) = p_3(0) = \ldots = 0$ (3-9)

jadi, $p_0(0) = 1$; $p_m(0) = 0 \ \forall m = 1, 2, 3, \ldots$ (3-10)

Solusi umum dari (3-9) dan (3-10) adalah sebagai berikut :

$$p'_m(\lambda) = -p_m(\lambda) + p_{m-1}(\lambda)$$

$$p'_m(\lambda) + p_m(\lambda) = p_{m-1}(\lambda)$$

Apabila $p_m(\lambda)$, kita jumlahkan sebanyak m, maka persamaanya menjadi :

$$\sum_{m=1}^{\infty} p'_m(\lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} p_m(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} p_{m-1}(\lambda)$$

Berdasarkan (3-10) maka solusi umum persamaan diferensial adalah :

Untuk $I = \int d\lambda = \lambda$

$$p_m(\lambda) = e^{-\lambda} \int_0^{\infty} p_{m-1} e^{\lambda} d\lambda + ce^{-\lambda}$$

Sehingga solusi umum persamaan diferensial dari (3-11) adalah :

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\lambda) = e^{-\lambda}\int_0^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} p_{m-1}e^{\lambda}d\lambda + ce^{-\lambda}$$

Karena, p_{m-1} adalah suatu fungsi kepadatan peluang diskrit berarti $\sum_{m=1}^{\infty} p_{m-1} = 1$,maka

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\lambda) = e^{-\lambda}\int e^{\lambda}d\lambda + ce^{-\lambda} = e^{0} + ce^{-\lambda} = 1 + ce^{-\lambda}$$

Berdasarkan syarat awal (3-9) dimana $\lambda = 0$, maka :

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\lambda) = 1 + ce^{-\lambda}$$

$$\underbrace{p_0(0)}_{1} + \underbrace{p_1(0) + p_2(0) + p_3(0) + \ldots}_{0} = 1 + ce^{0}$$

Berarti $c = 0$, sehingga solusi khususnya menjadi $\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\lambda) = e^{-\lambda}e^{\lambda}$

karena $e^{-\lambda}e^{\lambda}$ adalah konstanta, maka :

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda}e^{\lambda}$$

Dengan menggunakan bentuk $e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$$

Berarti

$$p_m(\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}$$

Dimana bentuk $p_m(\lambda)$ di atas merupakan fungsi kepadatan peluang *Poisson*, karena persamaan (3-1) dipenuhi maka $p(\lambda)$ berdistribusi *Poisson*. Untuk mendapat nilai $P\left(X_A(\lambda) > Y_B\right)$, kedua ruas dari (3-1) diintegralkan terhadap λ dengan batas $\lambda = 0$, sehingga didapat :

$$P\left(X_A(\lambda) > Y_B\right) = \int_0^{\lambda} P\left(X_A(\lambda) = Y_B\right) d\lambda$$

Hubungan ini berguna apabila nilai integral dapat ditentukan dengan mudah.

3.2 Skor Berdistribusi Poisson

Apabila diasumsikan N_A dan M_B berdistribusi *Poisson* dengan rerata $\lambda \geq 0$ dan $\mu \geq 0$, maka :

$$P\left(N_A(\lambda) = M_B(\mu)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!}\frac{e^{-\mu}\mu^n}{n!}$$

$$= e^{-\lambda}e^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{4}{4}\left(\sqrt{\lambda\mu}\right)^2\right)^n}{(n!)^2}$$

$$= e^{-\lambda}e^{-\mu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}\left(2\sqrt{\lambda\mu}\right)^2\right)^n}{(n!)^2}$$, dengan menggunakan bentuk (2-13) maka,

$$P\left(N_A(\lambda) = M_B(\mu)\right) = e^{-\lambda}e^{-\mu}I_0\left(2\sqrt{\lambda\mu}\right) \tag{3-11}$$

Disini I_0 ialah fungsi Bessel yang dimodifikasi order nol. Berdasarkan persamaan (3-11) maka $P\left(N_A(\lambda) > M_B(\mu)\right) = \int_0^{\lambda} P\left(N_A(\lambda) = M_B(\mu)\right) d\lambda$ dapat dimodifikasi menjadi

$$P\left(N_A(\lambda) > M_B(\mu)\right) = \int_0^{\lambda} e^{-\lambda}e^{-\mu}I_0\left(2\sqrt{\lambda\mu}\right) d\lambda \tag{3-12}$$

Berarti, jika N_A dan M_B berdistribusi *Poisson* dengan rata-rata λ dan μ, maka persamaan (3-11) adalah peluang bahwa A dan B seri, sedangkan persamaan (3-12) adalah peluang bahwa A menang

Perhitungan nilai peluang pada persamaan (3-12) menggunakan

Apabila pertandingan antara tim A dan tim B seimbang dengan nilai λ = μ maka persamaan (3-1) menjadi

$$P(\text{A dan B seri}) = P(N_A(\lambda) = M_B(\mu)) = e^{-2\lambda} I_0(2\lambda) \qquad \text{(3-13)}$$

Fungsi ini dapat digambarkan grafiknya dengan menggunakan bantuan program maple 10.0, dimana grafiknya monoton turun dari 1 untuk λ = 0 dan menuju 0 untuk λ menuju +∞. Untuk λ besar, fungsi ini konvergen secara asimtotik ke $\frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}}$

Ilustrasi gambar tersebut menunjukkan bahwa peluang seri lebih mungkin terjadi antara lawan dengan skor rendah daripada antara lawan dengan skor tinggi.

3.3 Statistik penaksir

Sebelum kita menghitung peluang $P(\text{A dan B seri})$ dan $P(\text{A menang})$, terlebih dahulu kita menentukan nilai $\hat{\lambda}$ dan $\hat{\mu}$ karena untuk menghitung peluang $P(\text{A dan B seri})$ dan $P(\text{A menang})$ melalui persamaan (3-11) dan (3-12) berarti menaksir besarnya nilai suatu peluang.

Statistik penaksir dari λ dan μ adalah :

$$L(\lambda,\mu) = \prod_{i=1}^{N} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n_i}}{n_i!} \frac{e^{-\mu}\mu^{m_i}}{m_i!}$$

$$L(\lambda,\mu) = \underbrace{\left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n_1}}{n_i!} \frac{e^{-\mu}\mu^{m_i}}{m_i!}\right) \cdot \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n_2}}{n_i!} \frac{e^{-\mu}\mu^{m_i}}{m_i!}\right) \cdots \left(\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n_i}}{n_i!} \frac{e^{-\mu}\mu^{m_i}}{m_i!}\right)}_{N \text{ kali}}$$

$$L(\lambda,\mu)=\left(e^{-N\lambda}\lambda^{\sum_{i=1}^{N}n_i}\right)\left(e^{-N\mu}\mu^{\sum_{i=1}^{N}n_i}\right)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i!m_i!}$$

$$L(\lambda,\mu)=\left(e^{-N\lambda}\lambda^{s_1}\right)\left(e^{-N\mu}\mu^{s_2}\right)\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{n_i!m_i!}$$

Apabila persamaan di atas diambil nilai ln-nya

$$\ln L(\lambda,\mu)=-N\lambda+s_1\ln\lambda-N\mu+s_2\ln\mu-\sum_{i=1}^{N}\ln n_i-\sum_{i=1}^{N}\ln m_i$$

$$\frac{\partial\ln L(\lambda,\mu)}{\partial\lambda}=-N+s_1\frac{1}{\lambda}=0\text{, maka }\hat{\lambda}=\frac{s_1}{N}$$

$$\frac{\partial\ln L(\lambda,\mu)}{\partial\mu}=-N+s_2\frac{1}{\mu}=0\text{, maka }\hat{\mu}=\frac{s_2}{N}$$

S_i adalah jumlah skor dari tiap pertandingan yang dimenangkan oleh masing-masing tim. Sedangkan, N adalah banyaknya pertandingan yang diikuti oleh masing-masing tim.