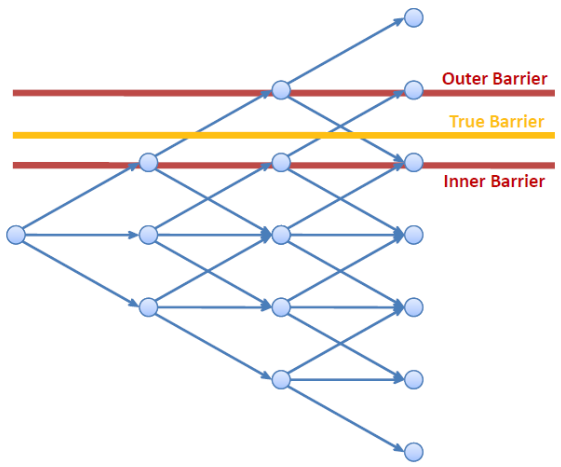
BAB III

MODEL TRINOMIAL KAMRAD-RITCHKEN

3.1 Model Trinomial Kamrad-Ritchken

Meskipun model trinomial biasa memiliki keakuratan dan kecepatan yang lebih baik dibandingkan model binomial, namun model trinomial biasa kurang cocok untuk digunakan dalam penentuan harga opsi *barrier*. Hal ini dikarenakan, ketika *barrier* tidak berada tepat pada baris dari titik-titik kemungkinan pergerakan harga saham, model trinomial akan mengasumsikan barrier tersebut berada pada baris dari titik-titik tepat sebelum *barrier* asli yang dinamakan *inner barrier* atau berada pada baris dari titik-titik tepat setelah *barrier* asli yang dinamakan *outer barrier*. Gambar 3.1 menunjukkan letak ketiga *barrier* tersebut:



Gambar 3.1

Garis *Barrier* pada Model Trinomial

Dengan demikian, secara otomatis model trinomial akan menganggap bahwa *outer barrier* ataupun *inner barrier* ini sebagai *barrier* yang sebenarnya. hal ini mengakibatkan harga opsi yang diperoleh memiliki *error* yang cukup besar. Oleh karena itu, untuk menentukan harga opsi *barrier* akan lebih cocok bila menggunakan model trinomial Kamrad dan Ritchken yang dikembangkan pada tahun 1991. Pada model trinomial ini akan dicari nilai parameter *stretch* terbaik yang membuat *barrier* tepat berada pada baris dari titik-titik kemungkinan harga saham, sehingga harga opsi yang diperoleh akan lebih baik. Parameter *stretch* merupakan sebuah parameter yang menggambarkan kerenggangan pohon pada model trinomial. Parameter *stretch* dinotasikan dengan λ.

3.1.1 Model Harga Saham Kontinu untuk Model Trinomial Kamrad-Ritchken

Pada model trinomial Kamrad-Ritcken, model harga saham yang diperoleh dari pohon trinomial diharapkan akan mendekati model harga saham kontinu berikut ini:

$$S_{i+1} = S_i \ e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z} \qquad Z\sim N(0,1) \tag{3.1}$$

karena model harga saham kontinu yang diperoleh pada persamaan (2.19) berbentuk:

$$S_{i+1} = S_i \ e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}Z} \qquad Z\sim N(0,1)$$

maka harus ditunjukan terlebih dahulu bahwa nilai μ mendekati nilai r. Hal tersebut dapat dibuktikan dengan menyamakan ekspektasi antara kedua parameter tersebut.

$$\mathbb{E}(\mu\Delta t) = \mathbb{E}\left(\frac{S_{i+1} - S_i}{S_i}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ \mu\Delta t = \frac{S_i \ e^{r\Delta t} - S_i}{S_i}$$

$$\Leftrightarrow \ \mu\Delta t = e^{r\Delta t} - 1.$$

Berdasarkan deret Maclaurin, karena $e^x \approx 1 + x$ maka

$$\mu\Delta t \approx 1 + r\Delta t - 1 = r\Delta t,$$

$$\mu \approx r. \text{(terbukti)} \tag{3.2}$$

Apabila kedua ruas dari persamaan (3.1) dibagi dengan S_i , kemudian diambil nilai ln-nya, diperoleh:

$$\ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z,$$

dan dengan memisalkan $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z = \xi$, diperoleh

$$\xi \sim N\left(\left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \sigma^2\Delta t\right). \tag{3.3}$$

3.1.2 Model Harga Saham Diskrit Trinomial Kamrad-Ritchken

Menurut Kwok (2008: 324), Kamrad-Ritcken (1991) mengusulkan untuk mendekati model harga saham kontinu tersebut dengan model diskrit yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\xi^a = \begin{cases} v \,, & \text{dengan peluang } \ p_u \\ 0 \,, & \text{dengan peluang } \ p_m \\ -v \,, & \text{dengan peluang } \ p_d \end{cases}$$

dengan $v = \lambda\,\sigma\sqrt{\Delta t}$ dan $\lambda \geq 1$, dimana $u = e^v,\ m = 1,$ dan $d = e^{-v}$.

Ekspektasi dan varians dari model diskrit di atas adalah

$$\mathbb{E}[\xi^a] \quad = v.p_u + 0.p_m + \ -v.p_d = v(p_u - p_d), \tag{3.4}$$

$$\text{var}[\xi^a] = \mathbb{E}\left[\xi^{a\,2}\right] - (\mathbb{E}[\xi^a])^2$$

$$= (v^2 . p_u + 0. p_m + (-v)^2 . p_d) - [v(p_u - p_d)]^2$$

$$\text{var}[\xi^a] = v^2 (p_u + p_d) - v^2 (p_u - p_d)^2. \tag{3.5}$$

Selanjutnya untuk mendapatkan nilai $p_u, p_{m,}$ dan p_d, akan disamakan nilai ekspektasi dan varians dari model harga saham kontinu yang telah diperoleh pada persamaan (3.3) dengan nilai ekspektasi dan varians dari model trinomial Kamrad-Ritchken yang diperoleh pada persamaan (3.4) dan (3.5), sehingga menghasilkan

$$v(p_u - p_d) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t, \text{ dan} \tag{3.6}$$

$$v^2 (p_u + p_d) - v^2 \left(p_u - p_d\right)^2 = \sigma^2 \Delta t \tag{3.7}$$

Berdasarkan persamaan (3.6), diperoleh

$$v^2 \left(p_u - p_d\right)^2 = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)^2 \Delta t^2 = O\left(\Delta t^2\right),$$

karena pendekatannya yang diinginkan hanya sampai $O(\Delta t)$, maka $v^2 \left(p_u - p_d\right)^2$ dapat diabaikan, sehingga diperoleh

$$\text{var}[\xi^a] = v^2 (p_u + p_d) = \sigma^2 \Delta t. \tag{3.8}$$

dari persamaan (3.6) dan persamaan (3.8) diperoleh

$$p_u - p_d = \left(r - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t / v \tag{3.9}$$

$$p_u + p_d = \sigma^2 \Delta t / v^2 \tag{3.10}$$

penjumlahan kedua persamaan di atas menghasilkan

$$2p_u = \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t}{v} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{v^2}$$

$$p_u = \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t}{2\lambda\,\sigma\sqrt{\Delta t}} + \frac{\sigma^2 \Delta t}{2\lambda^2 \sigma^2 \Delta t}$$

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\,\sigma}. \tag{3.11}$$

Berdasarkan persamaan (3.9), diperoleh:

$$p_d = p_u - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t / v$$

$$p_d = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\,\sigma} - \frac{2\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t}{2\lambda\,\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

$$p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\,\sigma}. \tag{3.12}$$

Karena $p_u + p_d + p_m = 1$, maka dari persamaan (3.11) dan persamaan (3.12) diperoleh:

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

$$p_m = 1 - \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\,\sigma} - \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\,\sigma}$$

$$p_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2}. \tag{3.13}$$

Selanjutnya, untuk menentukan nilai λ, harus ditentukan nilai η terlebih dahulu. η menyatakan banyaknya langkah dari harga saham awal S_0 sampai ke *barrier* B. Untuk menentukan nilai η digunakan rumus *barrier*.

i) Rumus untuk *barrier-up* adalah

$$B = S_0 . u^\eta$$

$$B = S_0 \left(e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)^\eta \tag{3.14}$$

kemudian membagi kedua ruas dengan S_0 dan mengambil nilai ln-nya, diperoleh:

$$\ln\left(\frac{B}{S_0}\right) = \eta\ (\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})$$

karena nilai λ saat model trinomial dalam keadaan standar adalah 1, maka dimisalkan $\lambda = 1$, sehingga diperoleh:

$$\eta = \frac{\ln\left({}^{B}/_{S_0}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}}. \tag{3.15}$$

ii) Rumus untuk *barrier-down*, adalah

$$B\ = S_0 . d^{\eta}$$

$$B = \ S_0\left(e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)^{\eta} \tag{3.16}$$

dengan mengikuti prosedur yang sama seperti pada poin (i) di atas, diperoleh:

$$\eta = \frac{\ln\left({}^{S_0}/_{B}\right)}{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{3.17}$$

Karena η menyatakan banyaknya langkah dari S_0 ke B, maka η harus merupakan bilangan bulat. Oleh karena itu, η dibulatkan menjadi:

$$\eta_0 = \lfloor\eta\rfloor \tag{3.18}$$

untuk menghilangkan perbedaan antara η_0 dan η, ditambahkan λ sebagai faktor koreksi, sehingga diperoleh:

$$\eta = \lambda\,\eta_0. \tag{3.19}$$

Berdasarkan persamaan (3.19), diperoleh

$$\lambda = \frac{\eta}{\eta_0} \tag{3.20}$$

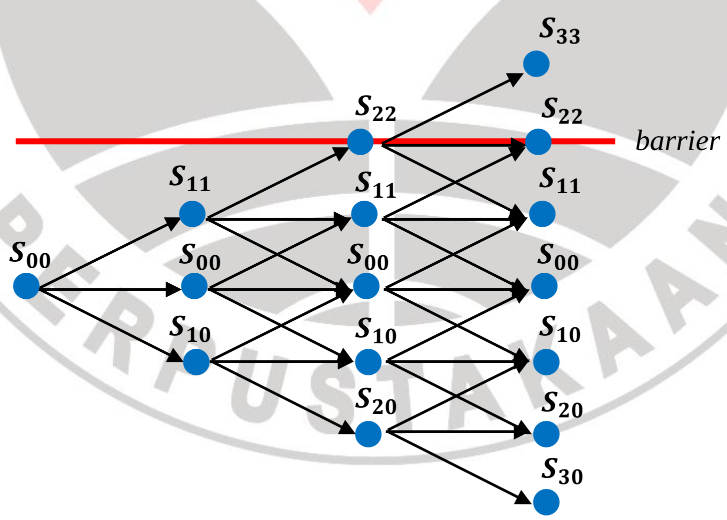
Setelah nilai λ diperoleh, maka nilai u, d, dan probabilitas-probabilitasnya yaitu $p_u, p_d,$ dan p_m dapat ditentukan.

3.2 Perhitungan Prediksi Harga Saham

Dalam menentukan nilai *payoff*, terlebih dahulu memperhitungkan nilai-nilai kemungkinan harga saham di setiap t, untuk $0 < t \leq T$. Untuk menghitung nilai-nilai kemungkinan harga saham tersebut, digunakan rumus berikut:

$$S_{ji} = S_0 u^j d^{i-j} \;, i = 0, 1, \dots, M \text{ dan } j = 1, 2, \dots, i \tag{3.21}$$

dengan i menyatakan interval waktu dan j menyatakan indeks kenaikan harga saham. Setelah semua kemungkinan harga saham ditentukan, akan diperoleh hasil seperti pada gambar berikut ini:



Gambar 3.2

Model Harga Saham Menggunakan Model Trinomial Kamrad-Ritcken

Gambar 3.2 merupakan model harga saham pada opsi *barrier-up* yang dibangun dengan menggunakan model trinomial Kamrad-Ritchken dengan tiga partisi. Sebagai contoh, pada Gambar 3.2 terlihat bahwa *barrier* terletak tepat pada baris S_{22}, artinya banyaknya langkah naik dari harga saham awal hingga ke *barrier* adalah dua $(\eta = 2)$. Parameter kenaikan dan parameter penurunan pada model trinomial Kamrad-Ritchken dirumuskan sebagai berikut:

$$u = e^{\lambda\,\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad \text{dan} \quad d = e^{-\lambda\,\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

dengan masing-masing peluang dari harga saham naik dan harga saham turun, adalah:

$$p_u = \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\,\sigma} \quad \text{dan} \quad p_d = \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\,\sigma}$$

serta peluang harga saham tetap adalah:

$$p_m = 1 - \frac{1}{\lambda^2}.$$

3.3 Aturan Penentuan Nilai *Payoff* Opsi *Barrier* Eropa

Setelah seluruh prediksi harga saham diperoleh, maka langkah selanjutnya adalah penentuan nilai *payoff*. Nilai *payoff* atau yang juga dikenal sebagai nilai intrinsik merupakan nilai yang menyatakan besarnya keuntungan yang didapatkan dari sebuah transaksi. Untuk opsi *call* Eropa, apabila harga saham pada saat T lebih besar dari nilai *strike price* $(S(T) > K)$, h*older* akan meng-*exercise* opsinya agar mendapatkan keuntungan sebesar $V = S(T) - K$. Sedangkan jika $S(T) < K$, *holder* lebih memilih tidak meng-*exercise* opsinya atau dengan kata lain nilai *payoff* sama dengan nol $(V = 0)$. Sehingga untuk opsi *call* Eropa, nilai *payoff* untuk seluruh kemungkinan harga saham dirumuskan sebagai berikut:

$$V_{ij} = C_{ij} = \max(S_{ij} - K, 0) \quad (3.22)$$

dengan $i = 0,1, \dots, M$ dan $j = 1,2, \dots, i$. Untuk opsi *put* Eropa, opsi tersebut akan menguntungkan jika harga saham pada saat T lebih kecil dari nilai *strike price* $(S(T) < K)$. Sehingga pada kondisi tersebut *holder* akan meng-*exercise* opsinya dan mendapatkan keuntungan sebesar $K - S(T)$. Sebaliknya jika nilai $S(T) > K$, *holder* tidak akan meng-*exercise* opsinya sehingga nilai *payoff*-nya sama dengan nol. Oleh karena itu, nilai *payoff* di seluruh kemungkinan harga saham pada opsi *put* Eropa, dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$V_{ij} = P_{ij} = \max(K - S_{ij}, 0) \quad (3.23)$$

dengan $i = 0,1, \dots, M$ dan $j = 1,2, \dots, i$. Pada opsi *barrier*, nilai *payoff* bergantung pada pergerakan saham terhadap *barrier*. Setiap jenis *barrier* mempunyai aturan yang berbeda dalam penentuan nilai *payoff*. Pertama, perhatikan cara penentuan nilai *payoff* untuk keempat jenis *barrier* pada opsi *call* Eropa berikut ini.

- Opsi *call down-and-out* memiliki nilai *payoff* sama dengan $\max(S_{ij} - K, 0)$, jika $S_{ij} > B$. Namun bila harga saham turun hingga nilainya kurang atau sama dengan *barrier*, maka nilai *payoff* sama dengan nol.
- Opsi *call down-and-in* memiliki nilai *payoff* sama dengan nol selama $S_{ij} > B$. Namun bila harga saham turun hingga nilainya di bawah atau sama dengan *barrier*, maka fungsi nilai *payoff* sama dengan $\max(S_{ij} - K, 0)$.
- Opsi *call up-and-out* memiliki nilai *payoff* sama dengan $\max(S_{ij} - K, 0)$, jika $S_{ij} < B$. Namun bila harga saham naik hingga nilainya melebihi atau sama dengan *barrier*, maka nilai *payoff* sama dengan nol.

- Opsi *call up-and-in* memiliki nilai *payoff* sama dengan nol selama $S_{ij} < B$. Namun bila harga saham naik hingga nilainya lebih besar atau sama dengan *barrier*, maka fungsi nilai *payoff* sama dengan $\max(S_{ij} - K, 0)$.

Untuk opsi *put* Eropa, penentuan nilai *payoff* pada keempat jenis barrier memiliki aturan yang sama dengan opsi *call* Eropa, namun pada *payoff* yang tidak bernilai nol, fungsi *payoff*-nya diganti dengan $\max(K - S_{ij}, 0)$.

3.4 Penentuan Harga Opsi *Barrier* Eropa

Berdasarkan seluruh informasi yang telah diperoleh, harga opsi dapat ditentukan dengan cara *backward* (mundur) dimulai dari periode ke-$(M - 1)$ hingga periode ke-0 dengan menggunakan rumus:

$$f_{ij} = e^{-r\Delta t}\left(p_u f_{i+1,j+1} + p_m f_{i+1,j} + p_u f_{i+1,j-1}\right) \tag{3.24}$$

dimana $f_{i+1,j+1}$, $f_{i+1,j}$, dan $f_{i+1,j-1}$ merupakan nilai opsi pada titik naik, tetap dan turun di periode berikutnya. Sedangkan untuk nilai opsi pada periode ke-M, nilainya sama dengan nilai *payoff* pada periode ke-M $(f_{M,j} = V_{M,j})$. Persamaan (3.24) menyatakan bahwa nilai opsi pada suatu titik dapat ditentukan dengan cara mengambil rata-rata dari tiga kemungkinan nilai opsi (naik, tetap dan turun) pada periode berikutnya, kemudian di-*discount* satu langkah (dikalikan dengan $e^{-r\Delta t}$). Sehingga dengan proses tersebut dapat diperoleh seluruh nilai opsi hingga nilai opsi saat $t = 0$ yaitu f_{00}. Nilai inilah yang akan digunakan sebagai harga opsi.

3.5 Algoritma Penentuan Harga Opsi *Barrier* Eropa

Dalam menentukan harga opsi *barrier* Eropa, diperlukan beberapa input yaitu $S_0, K, B, T, M, \sigma, r$. Selanjutnya, langkah-langkah penentuan harga opsi *barrier* Eropa dengan menggunakan model trinomial Kamrad-Ritchken dapat dilakukan dengan cara berikut ini:

1. Menentukan $\Delta t, \eta, \eta_0$, dan λ.
2. Setelah λ diperoleh, menentukan u, d, p_u, p_m, dan p_d.
3. Menentukan harga saham S_{ij} hingga diperoleh $S_{M,j}$.
4. Menentukan V_{ij} hingga diperoleh $V_{M,j}$.
5. Definisikan $V_{M,j} = f_{M,j}$
6. Menetapkan $M = M - 1$, dan menentukan nilai opsi dimulai dengan $f_{(M-1),j}$
7. Ulangi langkah 6 hingga diperoleh f_{00}.