

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Proses pembelajaran matematika di perguruan tinggi membutuhkan kemampuan kognitif tingkat tinggi, seperti kemampuan analisis, sintesis, dan evaluasi, tidak hanya sekedar ingatan pengetahuan faktual ataupun aplikasi sederhana dari berbagai formula atau prinsip. Mahasiswa diharapkan mampu untuk bernalar dengan baik dan mengekspresikan hasil penalarannya secara tertulis, sistematis dan ketat (*rigorous*). Kemampuan ini dapat diperoleh melalui kegiatan pembuktian.

Karena pentingnya kemampuan pembuktian matematik dalam pembelajaran matematika maka *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) (2000) telah menekankan adanya pembuktian dalam matematika sekolah, yang juga mencerminkan pergeseran ke arah pemecahan masalah dan berpikir kritis. Tapi untuk mengkonstruksi bukti yang lebih rumit diberikan pada perkuliahan di perguruan tinggi. Kurikulum matematika harus mencakup banyak dan beragam pengalaman yang memperkuat dan memperluas keterampilan penalaran logis siswa sehingga semua siswa dapat: (1) mengenal penalaran dan pembuktian sebagai aspek-aspek fundamental matematika, (2) membuat konjektur dan memeriksa kebenaran dari konjektur itu, (3) mengembangkan dan mengevaluasi argumen dan pembuktian matematik, dan (4) memilih dan menggunakan bermacam-macam jenis penalaran dan metode pembuktian. Hal ini sesuai dengan yang disarankan oleh Hanna (Findel, 2001), yaitu bahwa

pemahaman dalam matematika hendaknya dilakukan melalui pembuktian matematik.

Di Indonesia, siswa juga dikehendaki agar mempunyai kemampuan dalam melakukan pembuktian. Misalnya, dalam Kurikulum Berbasis Kompetensi (Depdiknas, 2002) secara eksplisit dinyatakan agar siswa mempunyai kompetensi matematika dalam bentuk keterampilan menyusun bukti, yaitu siswa SD dan SMP menyusun bukti secara induktif, sedangkan siswa SMA menyusun bukti secara induktif dan deduktif. Walaupun belum dituntut untuk dapat melakukan pembuktian secara formal, tapi mereka sudah dituntut untuk memiliki keterampilan dasar dalam melakukan pembuktian matematik.

Dalam matematika, pembuktian adalah serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran suatu pernyataan. Hal ini dinyatakan oleh Hanna dan Barbeau (VanSpronsen, 2008) pembuktian adalah penerapan sejumlah berhingga langkah-langkah logis dari apa yang diketahui (aksioma, prinsip-prinsip atau hasil yang telah dibuktikan sebelumnya) dan menerapkan prinsip-prinsip logika, untuk menciptakan argumen deduktif yang valid guna mencapai suatu kesimpulan menggunakan aturan inferensi yang dapat diterima. Argumen-argumen ini dapat berasal dari premis pernyataan itu sendiri, teorema-teorema lainnya, definisi, dan dapat juga berasal dari postulat dimana sistem matematika tersebut berasal. Yang dimaksud logis di sini, adalah semua langkah pada setiap argumen harus dijustifikasi oleh langkah sebelumnya. Jadi kebenaran semua premis pada setiap deduksi sudah dibuktikan atau diberikan sebagai asumsi.

Pembuktian memegang peranan yang sangat penting dalam matematika karena pembuktian merupakan bagian yang mutlak dan mendasar dalam matematika dan bagian yang tidak terpisahkan dari matematika (Dickerson, 2008). Karena merupakan bagian yang esensial dalam melakukan *doing*, komunikasi, dan *recording* matematika. Peran pembuktian dinyatakan oleh Knuth (2002) yaitu: 1) untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan itu benar, 2) untuk menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar, 3) untuk mengkomunikasikan pengetahuan matematika, 4) untuk menemukan atau menciptakan matematika baru, atau 5) mensistematisasikan pernyataan menjadi sistem aksiomatis. Sementara Hanna dan Jahnke (Nichols, 2008) lebih menekankan bahwa mengkomunikasikan pemahaman matematik adalah peran bukti yang paling signifikan dalam hal pendidikan matematika. Selain dari itu pembuktian memainkan peranan yang sangat penting dalam menemukan pengetahuan matematika baru. Menurut De Villiers (VanSpronsen, 2008), pembuktian bukan hanya sebagai sarana untuk memverifikasi hasil yang sudah ditemukan, tetapi juga merupakan sarana untuk mengeksplorasi, menganalisis, dan menemukan matematika yang baru.

Untuk itu mahasiswa matematika harus memiliki kemampuan melakukan pembuktian matematik. Dalam pembuktian matematik terdapat dua kemampuan yaitu kemampuan membaca bukti dan mengkonstruksi bukti. Maka berargumentasi secara matematik dan melakukan pembuktian haruslah menjadi bagian yang esensial bagi mahasiswa yang belajar matematika. Karena itu pengkajian tentang pengajaran dan pembelajaran pembuktian adalah komponen kunci dalam peningkatan pembelajaran matematika secara menyeluruh. Ada beberapa alasan

mengapa perlu diberikan pengajaran pembuktian yaitu: 1) bukti adalah bagian yang integral dalam matematika, 2) untuk verifikasi dan penemuan fakta, 3) untuk pengembangan kemampuan berpikir logis dan kritis siswa, dan 4) mempercepat dan meningkatkan pemahaman matematik siswa (Dickersen, 2008).

Salah satu mata kuliah yang mendukung hal tersebut adalah Analisis Real. Mata kuliah Analisis Real diberikan pada Program Studi Matematika dan Pendidikan Matematika di hampir semua perguruan tinggi di Indonesia. Mata kuliah Analisis Real bertujuan untuk mendidik peserta kuliah agar: a) memiliki pengetahuan dasar analisis matematika, khususnya tentang bilangan, barisan, fungsi, limit, dan turunan, b) mampu bernalar secara logis dan mengekspresikan hasil penalarannya secara tertulis, sistematis dan *rigorous* (Gunawan, 2009). Melalui perkuliahan Analisis Real, mahasiswa berlatih untuk memverifikasi bahwa suatu pernyataan itu benar, menjelaskan mengapa suatu pernyataan itu benar, mengkomunikasikan pengetahuan matematika, dan menuliskannya dalam bahasa yang logis dan sistematis. Kemampuan tersebut dapat ditingkatkan melalui kegiatan pembuktian.

Kegiatan pembuktian banyak dilakukan dalam mata kuliah Analisis Real yang sarat dengan definisi, lemma, dan teorema. Agar mahasiswa dapat memahami Analisis Real dengan baik maka mahasiswa dituntut untuk dapat memahami setiap lemma dan teorema yang dipelajari. Salah satu syarat agar hal tersebut tercapai adalah mahasiswa harus mempunyai kemampuan dalam membuktikan lemma dan teorema yang dipelajari dan beberapa permasalahan yang terkait dengan penerapan definisi, lemma, dan teorema. Dengan demikian,

peningkatan pemahaman mahasiswa dalam Analisis Real dapat dilakukan melalui peningkatan kemampuan mahasiswa dalam pembuktian.

Namun dalam kenyataan ditemui bahwa banyak mahasiswa mengalami kesulitan dalam pembuktian. Berdasarkan pengalaman mengajar mata kuliah Analisis Real di Jurusan Matematika FMIPA UNP Padang, peneliti juga menemukan hal yang sama. Gibson (Nichols, 2008) menemukan bahwa mahasiswa biasanya mengalami kesulitan dalam beberapa hal yaitu: 1) menilai kebenaran dari sebuah pernyataan, 2) memahami informasi, 3) menemukan ide, dan 4) menuliskan ide. Moore (VanSpronsen, 2008) telah melakukan identifikasi terhadap kelemahan dan kesulitan mahasiswa dalam pembuktian matematika, yang dikelompokkan ke dalam tujuh jenis kesulitan, yaitu sebagai berikut:

1. Mahasiswa tidak dapat menyatakan definisi dengan bahasanya sendiri.
2. Intuisi pemahaman terhadap suatu konsep yang dimiliki mahasiswa sedikit.
3. *Concept images* untuk mengerjakan pembuktian tidak cukup.
4. Mahasiswa tidak dapat dan tidak berkeinginan membuat contoh sendiri.
5. Mahasiswa tidak mengetahui bagaimana menggunakan definisi untuk memperoleh struktur pembuktian yang menyeluruh.
6. Mahasiswa tidak dapat memahami dan menggunakan bahasa dan notasi matematik.
7. Mahasiswa tidak mengetahui bagaimana memulai pembuktian.

Agar dapat membuat pembuktian matematik dengan baik, mahasiswa dituntut memiliki pengetahuan-pengetahuan prasyarat, misalnya logika matematika dan metode pembuktian dalam matematika. Dengan dimilikinya pengetahuan

prasyarat tidak menjamin bahwa mahasiswa dapat mengembangkan dan mengkomunikasikan suatu bukti. Untuk dapat mengembangkan dan mengkomunikasikan suatu pembuktian matematika dengan baik, mahasiswa dituntut untuk memiliki kreativitas, intuisi, dan pengalaman. Memiliki intuisi berarti memiliki kemampuan untuk membuat konjektur yang merupakan bagian yang sangat penting dalam proses pembuktian matematik. Hanya dengan intuisi dapat memutuskan apa yang harus dibuktikan (Bloch, 2000). Sedangkan memiliki kreativitas berarti memiliki kemampuan untuk menyatakan persoalan dalam berbagai model yang operasional. Kreativitas, intuisi, dan pengalaman dapat dikembangkan dan disediakan melalui pembelajaran.

Dari uraian masalah yang telah dikemukakan di atas, maka perlu dipikirkan suatu pendekatan pembelajaran Analisis Real yang dapat meningkatkan kemampuan pembuktian matematik. Pembelajaran matematika yang diberikan harus dapat menjadikan mahasiswa memiliki kompetensi dasar dalam matematik, yaitu: pemahaman, pemecahan masalah, penalaran, koneksi matematik, dan komunikasi matematik. Kemampuan komunikasi matematik misalnya muncul dalam bentuk: (1) membuat konjektur, menyusun argumen, merumuskan definisi dan generalisasi, (2) membaca dengan pemahaman suatu presentasi matematika tertulis, dan (3) mendengarkan, berdiskusi, dan menulis tentang matematik. Kemampuan penalaran matematik misalnya muncul dalam bentuk: (1) menarik kesimpulan secara logis, (2) menyusun dan menguji konjektur, menyusun pembuktian langsung, tak langsung, dan menggunakan induksi matematik, (3) merumuskan lawan contoh (*counter examples*), dan (4) menyusun argumen yang

valid. Kemampuan koneksi matematik misalnya muncul dalam bentuk: memahami representasi ekuivalen konsep yang sama (Sumarmo, 2010).

Salah satu pendekatan yang memperhatikan konstruksi-konstruksi mental yang dilakukan mahasiswa adalah pendekatan APOS (*Action-Process-Object-Schema*). Teori APOS mengasumsikan bahwa pengetahuan matematika yang dimiliki oleh seseorang merupakan hasil interaksi dengan orang lain dan hasil konstruksi mental orang tersebut dalam memahami ide matematik. Istilah konstruksi yang dimaksudkan di sini mirip dengan istilah akomodasi dan asimilasi dari Piaget (Asiala, *et al.*, 1997).

Aksi (*action*) adalah suatu transformasi objek mental untuk memperoleh objek mental lainnya. Transformasi dilakukan dengan melakukan aksi terhadap petunjuk eksternal, yang memberikan rincian mengenai langkah apa yang harus diambil. Seseorang dikatakan mengalami suatu aksi apabila seseorang tersebut memfokuskan proses mentalnya pada upaya untuk memahami suatu konsep yang diberikan. Seseorang yang memiliki pemahaman yang lebih baik mungkin dapat melakukan aksi lebih baik.

Ketika suatu *action* diulang dan individu melakukan refleksi terhadap aksi yang telah dilakukan, maka *action* diinteriorisasi menjadi *process*, yaitu konstruksi internal yang dibuat dengan melakukan *action* yang sama. Individu yang sudah mengkonstruksi *process* konsep dapat menguraikan atau bahkan membalikkan langkah dari transformasi tanpa benar-benar melakukannya. Berbeda dengan *action*, *process* dirasakan oleh individu sebagai hal yang internal dan di bawah kontrol individu sendiri.

Ketika individu melakukan refleksi pada operasi yang diterapkan pada *process* tertentu, menjadi sadar terhadap *process* sebagai suatu totalitas, menyadari bahwa transformasi (baik *action* maupun *process*) dapat dilakukan, dan benar-benar dapat mengkonstruksi transformasi itu, maka individu tersebut memaknai *process* sebagai *object*. Dalam kasus ini dikatakan bahwa *process* telah dirangkum (enkapsulasi) menjadi sebuah *object* kognitif. Seseorang dikatakan telah memiliki konsep *object* dari suatu konsep matematik apabila dia telah mampu memperlakukan konsep tersebut sebagai sebuah objek kognitif yang mencakup kemampuan melakukan aksi atas objek tersebut serta memberikan alasan atau penjelasan tentang sifat-sifatnya. Kemudian individu juga telah mampu mengurai kembali (de-enkapsulasi) suatu objek menjadi proses sebagaimana asalnya pada saat sifat objek tersebut akan digunakan.

Skema (*schema*) merupakan koleksi yang koheren dari *action*, *process*, *object*, dan *schema* lainnya, yang terhubung secara padu dan diorganisasi secara terstruktur dalam pikiran individu. *Schema* ini dapat diandalkan dalam menghadapi persoalan dalam bidang matematika. Perbedaan antara *schema* dengan konstruksi mental lainnya adalah seperti perbedaan dalam bidang biologi antara organ dengan sel. Keduanya adalah *object*, tetapi organ (*schema*) memberikan keperluan agar sel berfungsi sebagaimana mestinya. *Schema* dari seorang individu adalah keseluruhan pengetahuan yang ia hubungkan secara sadar maupun tidak sadar dengan konsep matematika tertentu.

Namun dalam pelaksanaan teori APOS terdapat beberapa kendala. Berdasarkan penelitian Nurlaelah (2009) dan Arnawa (2006) ditemukan bahwa

terdapat beberapa kendala dalam mengimplementasikan teori APOS, khususnya dalam aktivitas di laboratorium. Kendala tersebut terjadi karena mahasiswa tidak dapat mengkonstruksi pengetahuan secara optimal melalui aktivitas komputer. Kendala tersebut terutama terjadi ketika mahasiswa menyusun instruksi ISETL untuk suatu konsep. Misalnya terjadi sedikit kesalahan dalam pengetikan instruksi ISETL menyebabkan program yang disusun tidak jalan dan mahasiswa tidak dapat membuat kesimpulan dari konsep yang termuat dalam program itu. Akibatnya pada fase diskusi kelas, mahasiswa lebih tertarik untuk mendiskusikan penyusunan program komputernya dibandingkan dengan mendiskusikan konsep yang termuat dalam konsep tersebut. Kendala lainnya adalah ketidaksiapan *software* dan *hardware* pada saat diperlukan, sehingga secara keseluruhan menghambat pelaksanaan pembelajaran yang sudah direncanakan.

Selain itu, komputer (ISETL) juga sulit digunakan untuk meningkatkan kemampuan pembuktian matematik. Dalam pembuktian matematik, mahasiswa harus memahami definisi dan teorema dengan baik. Definisi dan teorema ini merupakan bagian dari premis pada pernyataan matematik yang akan dibuktikan. Untuk dapat membuktikan pernyataan tersebut mahasiswa harus dapat menentukan keterkaitan logis antara definisi dan teorema tersebut. Agar dapat melakukan hal ini mahasiswa harus memiliki intuisi dan kreativitas serta pengalaman terhadap keterkaitan antar konsep sehingga diperoleh kesimpulan. Hal ini agak sulit dilakukan dengan menggunakan pemrograman ISETL.

Berdasarkan hal di atas maka teori APOS sulit dilaksanakan untuk meningkatkan kemampuan pembuktian pada mata kuliah Analisis Real. Untuk itu

pada penelitian ini diadakan suatu pendekatan seperti pendekatan teori APOS. Konstruksi mental dari pendekatan ini tetap mengikuti seperti konstruksi mental APOS tapi dalam pelaksanaannya tidak menggunakan komputer. Kegiatan pada aktivitas kegiatan laboratorium pada APOS diganti dengan mengerjakan lembaran kerja terstruktur. Lembaran kerja terstruktur ini akan memandu mahasiswa dalam memahami suatu konsep yang akan dipelajari. Siklus pembelajaran dalam pendekatan ini meliputi: (1) aktivitas dalam mengerjakan lembaran kerja terstruktur, (2) diskusi kelas, dan (3) latihan. Untuk selanjutnya pendekatan ini dinamakan pendekatan M-APOS.

Dengan demikian, pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS memberi peluang kepada mahasiswa untuk berkreaitivitas, memperoleh intuisi, dan berkolaborasi sehingga memperoleh pengalaman dalam bermatematika. Dari sini dapat dilihat bahwa, pendekatan ini cukup menjanjikan jika digunakan dalam meningkatkan kemampuan pembuktian matematik mahasiswa pada mata kuliah Analisis Real.

Mata kuliah Analisis Real diikuti oleh mahasiswa calon matematikawan dan calon guru. Calon matematikawan berada pada Program Studi Matematika dan calon guru berada pada Program Studi Pendidikan Matematika. Peranan utama pembuktian bagi calon matematikawan adalah untuk menemukan atau menciptakan matematika baru dan mensistematiskan pernyataan menjadi suatu sistem aksiomatis. Sementara itu bagi mahasiswa calon guru, peranan penting pembuktian adalah untuk mengkomunikasikan matematika. Untuk itu baik

mahasiswa calon matematikawan maupun calon guru harus memiliki kemampuan melakukan pembuktian matematik secara baik.

Pada kedua program studi, mahasiswa terbagi ke dalam tiga level kemampuan awal yaitu tinggi, sedang, dan rendah. Kemampuan awal diperkirakan akan sangat mempengaruhi hasil belajar yang diperoleh oleh mahasiswa. Mahasiswa level tinggi diperkirakan akan memperoleh hasil akhir yang tinggi pula dibandingkan dengan kemampuan awal sedang dan rendah. Demikian juga untuk mahasiswa dengan level kemampuan awal sedang akan memperoleh hasil akhir yang lebih baik dari level kemampuan awal rendah.

Faktor lain yang juga mempengaruhi hasil belajar adalah kemandirian belajar khususnya kemandirian belajar matematik. Kemandirian belajar matematik didefinisikan sebagai kecendrungan diri dalam belajar yang meliputi: perancangan, pengaturan, pemantauan, dan pandangan terhadap kemampuan diri dalam belajar matematik (Sumarmo, 2004). Individu yang memiliki kemandirian belajar yang tinggi cenderung belajar lebih baik. Mereka mampu memantau, mengatur dan mengevaluasi proses belajarnya secara efektif (Hargins: dalam Sumarmo, 2004). Hal ini sejalan dengan yang dikatakan oleh Darr dan Fisher (Ratnaningsih, 2007) bahwa kemandirian belajar mempunyai korelasi yang tinggi dengan keberhasilan siswa.

Namun dari kenyataan ditemui bahwa mahasiswa atau siswa belum mempunyai kemandirian belajar yang baik. Mereka masih sangat bergantung kepada dosen atau guru, sehingga kurang punya inisiatif dalam belajar. Dari hasil penelitian Ratnaningsih (2007) dan Qohar (2010) diperoleh bahwa secara rata-rata

kemandirian belajar matematik siswa tergolong sedang. Tapi untuk siswa level sedang dan rendah kemandirian belajar mereka masih rendah.

Dari uraian di atas perlu dilakukan penelitian tentang penggunaan pendekatan M-APOS dalam pembelajaran Analisis Real terutama untuk mengungkap apakah pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS memberikan kontribusi yang signifikan terhadap peningkatan kemampuan pembuktian matematik dan kemandirian belajar matematik mahasiswa dibandingkan dengan pembelajaran secara konvensional. Analisis hasil penelitian akan ditinjau berdasarkan program studi dan kemampuan awal mahasiswa.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah di atas, maka rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Apakah capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional dalam Analisis Real, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal?
2. Apakah capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional dalam Analisis Real, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal?

3. Apakah terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dengan program studi dan kemampuan awal mahasiswa dalam pencapaian pembuktian dan kemandirian belajar matematik?
4. Apakah terdapat asosiasi antara (a) kemampuan membaca bukti dengan kemampuan mengkonstruksi bukti, (b) kemampuan membaca bukti dengan kemandirian belajar matematik, dan (c) kemampuan mengkonstruksi bukti dengan kemandirian belajar matematik?

C. Tujuan Penelitian

Berdasarkan permasalahan yang disebutkan pada bagian rumusan masalah, maka tujuan dari penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Untuk menyelidiki apakah capaian dan peningkatan kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional dalam Analisis Real, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal?
2. Untuk menyelidiki apakah capaian dan peningkatan kemandirian belajar matematik mahasiswa yang memperoleh pembelajaran berdasarkan pendekatan M-APOS lebih baik dibandingkan dengan mahasiswa yang memperoleh pembelajaran secara konvensional dalam Analisis Real, ditinjau dari: (a) keseluruhan mahasiswa, (b) program studi, dan (c) kelompok kemampuan awal.

3. Untuk menyelidiki apakah terdapat interaksi antara pendekatan pembelajaran dengan program studi dan kemampuan awal mahasiswa dalam pencapaian pembuktian dan kemandirian belajar matematik.
4. Untuk menyelidiki apakah terdapat asosiasi antara (a) kemampuan membaca bukti dengan kemampuan mengkonstruksi bukti, (b) kemampuan membaca bukti dengan kemandirian belajar matematik, dan (c) kemampuan mengkonstruksi bukti dengan kemandirian belajar matematik.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi berbagai pihak, yaitu:

1. Bagi mahasiswa, merupakan suatu pengalaman baru karena pendekatan pembelajaran ini menuntut mahasiswa mengkonstruksi sendiri pengetahuannya, sehingga pengalaman dan pengetahuan yang didapatnya bisa lebih bermakna dan bisa diterapkan untuk proses belajar yang akan dilaksanakan pada saat yang akan datang.
2. Bagi dosen, merupakan suatu pilihan pendekatan dalam proses pembelajaran sehingga proses belajar berlangsung lebih baik.
3. Bagi peneliti, dapat memperluas wawasan tentang pemilihan pendekatan pembelajaran matematika.

E. Definisi Operasional

Berikut didefinisikan istilah-istilah penting dalam penelitian ini.

1. Pembelajaran pendekatan M-APOS adalah pembelajaran mengikuti konstruksi mental APOS (*Action-Process-Object-Schema*) di mana mahasiswa belajar

dalam kelompok kecil dan menggunakan siklus pembelajaran: aktivitas mengerjakan lembaran kerja terstruktur (A), diskusi kelas (D), dan latihan (L).

2. Kemampuan pembuktian matematik terdiri atas kemampuan membaca bukti dan kemampuan mengkonstruksi bukti.
3. Kemampuan membaca bukti adalah kemampuan menemukan kebenaran dan/atau kesalahan dari suatu pembuktian serta kemampuan memberikan alasan setiap langkah pembuktian.
4. Kemampuan mengkonstruksi bukti adalah kemampuan menyusun suatu bukti pernyataan matematik berdasarkan definisi, prinsip, dan teorema, serta dapat menuliskannya dalam bentuk pembuktian lengkap (pembuktian langsung atau tak langsung). Kemampuan ini meliputi: kemampuan mengidentifikasi premis beserta implikasinya dan kondisi yang mendukung; kemampuan mengorganisasikan dan memanipulasi fakta untuk menunjukkan kebenaran suatu pernyataan; kemampuan membuat koneksi antara fakta dengan unsur dari konklusi yang hendak dibuktikan.
5. Kemandirian belajar matematik adalah kecendrungan diri dalam belajar yang meliputi: Inisiatif belajar; Mendiagnosa kebutuhan belajar; Menetapkan tujuan belajar; Memonitor, mengatur dan mengontrol belajar; Mengatur dan mengontrol kognisi, motivasi, dan perilaku; Mencari dan memanfaatkan sumber belajar yang relevan; Memilih dan menerapkan strategi belajar; Mengevaluasi proses dan hasil belajar; *Self-Efficacy* (Konsep diri).
6. Kemampuan awal adalah kemampuan menguasai materi prasyarat mata kuliah Analisis Real.