BAB III

MODEL REGRESI PROBIT BIVARIAT

3.1 Model Regresi Probit Bivariat

Regresi probit bivariat adalah suatu analisis regresi yang digunakan untuk menggambarkan hubungan antara dua buah variabel respon dengan satu atau lebih variabel prediktor, dengan variabel respon Y berupa data kualitatif biner, sedangkan variabel prediktor dapat berupa data kuantitatif, data kualitatif, atau gabungan keduanya yang disimbolkan dengan X. Pada model regresi probit bivariat, variabel galatnya ε diasumsikan saling bebas, berdistribusi identik dan mengikuti distribusi normal bivariat dengan korelasi ρ. Karena model regresi probit bivariat adalah pengembangan dari model probit (lihat model pada bab II), maka terdapat dua buah persamaan yang merupakan bentuk umum dari model regresi probit bivariat, yaitu:

- $$\mathbf{y}_{\mathbf{i1}}^{*} = \boldsymbol{\beta}_1{'}\mathbf{x}_{\mathbf{i1}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i1}} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.1}$$

dengan:

$$y_{i1} = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad y_{i1}^{*} > 0 \\ 0 & \text{jika} \quad \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

- $$\mathbf{y}_{\mathbf{i2}}^{*} = \boldsymbol{\beta}_2{'}\mathbf{x}_{\mathbf{i2}} + \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{i2}} \quad , \; i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

dengan:

$$y_{i2} = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad y_{i2}^{*} > 0 \\ 0 & \text{jika} \quad \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

Dimana y_{i1}^* dan y_{i2}^* adalah variabel laten yang tidak teramati untuk persamaan satu dan dua yang berukuran $n \times 1$. $\mathbf{x_{i1}}'$ dan $\mathbf{x_{i2}}'$ adalah vektor variabel prediktor dari kedua persamaan. β_1 dan β_2 adalah vektor dari variabel prediktor yang berukuran $P \times 1$ dan selanjutnya akan ditaksir dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum. Adapun, asumsi-asumsi yang perlu diperhatikan untuk dua persamaan pada model regresi bivariat adalah:

1. $E(\varepsilon_{i1}) = E(\varepsilon_{i2}) = 0$
2. $Var(\varepsilon_{i1}) = Var(\varepsilon_{i2}) = 1$
3. $Cov(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}) = E\left[\left(\varepsilon_{i1} - E(\varepsilon_{i1})\right)\left(\varepsilon_{i2} - E(\varepsilon_{i2})\right)\right]$

$$= E(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2})$$
$$= \rho$$

(Greene, 2003: 710)

3.2 Penaksiran Kemungkinan Maksimum

Metode yang digunakan untuk menaksir parameter yang tidak diketahui pada regresi probit bivariat adalah metode kemungkinan maksimum. Misalkan dilakukan n percobaan yang saling bebas, dengan y_{ij} adalah variabel respon dari observasi ke-i $(i = 1, 2, ..., n)$ untuk $j = 1, 2$ berdistribusi normal bivariat. Fungsi distribusi normal bivariat dari y_{ij} adalah:

$$P\left(Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2\right) = \int_{-\infty}^{y_2}\int_{-\infty}^{y_1} \phi_2\left(u_1, u_2, \rho\right) du_1 du_2$$
$$= \Phi_2\left(y_1, y_2, \rho\right) \tag{3.3}$$

dengan fungsi kepadatan peluangnya adalah:

$$\phi_2\left(y_1, y_2, \rho\right) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(y_1^2 + y_2^2 - 2\rho y_1 y_2\right) \Big/ \left(1-\rho^2\right)\right\}}{2\pi\left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{3.4}$$

Dengan menggunakan permisalan $q_{i1} = 2y_{i1} - 1$ dan $q_{i2} = 2y_{i2} - 1$, maka

$$q_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika} \quad y_{ij} = 1 \\ -1 & \text{jika} \quad y_{ij} = 0 \end{cases} \quad \text{, untuk } j = 1, 2$$

Kemudian misalkan $z_{ij} = \beta_j' x_{ij}$ dan $w_{ij} = q_{ij} z_{ij}$, untuk $j = 1, 2$ serta $\rho_i^* = q_{i1} q_{i2} \rho$. Untuk memperoleh fungsi log kemungkinannya, maka akan diuraikan satu persatu keempat fungsi peluang dari nilai y_{i1} dan y_{i2}, yaitu:

- Untuk $y_{i1} = 0$ dan $y_{i2} = 0$, maka $q_{i1} = -1$ dan $q_{i2} = -1$, maka diperoleh:

$$P\left(Y_1 = 0, Y_2 = 0\right) = P\left(y_{i1}^* \le 0, y_{i2}^* \le 0\right)$$
$$= P\left(\beta_1' \mathbf{x}_{i1} + \varepsilon_{i1} \le 0, \beta_2' \mathbf{x}_{i2} + \varepsilon_{i2} \le 0\right)$$
$$= P\left(\varepsilon_{i1} \le -\beta_1' \mathbf{x}_{i1}, \varepsilon_{i2} \le -\beta_2' \mathbf{x}_{i2}\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{-\beta_2' \mathbf{x}_{i2}} \int_{-\infty}^{-\beta_1' \mathbf{x}_{i1}} \phi\left(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \rho\right) d\varepsilon_{i1} d\varepsilon_{i2}$$

$$= \Phi_2\left(-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, \beta_2'\mathbf{x}_{i2}, \rho\right)$$
$$= \Phi_2\left(q_{i1}z_{i1}, q_{i2}z_{i2}, q_{i1}q_{i2}\rho\right)$$
$$= \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)$$

- Untuk $y_{i1} = 0$ dan $y_{i2} = 1$, maka $q_{i1} = -1$ dan $q_{i2} = 1$, maka diperoleh:

$$P(Y_1 = 0, Y_2 = 1) = P\left(y_{i1}^* \le 0, y_{i2}^* > 0\right)$$
$$= P\left(\beta_1'\mathbf{x}_{i1} + \varepsilon_{i1} \le 0, \beta_2'\mathbf{x}_{i2} + \varepsilon_{i2} > 0\right)$$
$$= P\left(\varepsilon_{i1} \le -\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, \varepsilon_{i2} > -\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)$$
$$= \int_{-\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}^{\infty} \int_{-\infty}^{-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \phi(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \rho) d\varepsilon_{i1} d\varepsilon_{i2}$$
$$= - \int_{\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}^{-\infty} \int_{-\infty}^{-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \phi(\varepsilon_{i1}, -w_{i2}, \rho)\, d\varepsilon_{i1} dw_{i2} \qquad \left(\text{misalkan } w_{i2} = -\varepsilon_{i2}\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{\beta_2'\mathbf{x}_{i2}} \int_{-\infty}^{-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \phi(\varepsilon_{i1}, -w_{i2}, \rho)\, d\varepsilon_{i1} dw_{i2}$$
$$= \int_{-\infty}^{\beta_2'\mathbf{x}_{i2}} \int_{-\infty}^{-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \frac{\exp\left\{-\dfrac{\left(\varepsilon_{i1}^2 + w_{i1}^2 - 2\rho\varepsilon_{i1}(-w_{i2})\right)}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\}}{2\pi\left(1-\rho^2\right)} d\varepsilon_{i1} dw_{i2}$$
$$= \int_{-\infty}^{\beta_2'\mathbf{x}_{i2}} \int_{-\infty}^{-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \phi_2(\varepsilon_{i1}, w_{i2}, -\rho)\, d\varepsilon_{i1} dw_{i2}$$
$$= \Phi_2\left(-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, \beta_2'\mathbf{x}_{i2}, -\rho\right)$$
$$= \Phi_2\left(q_{i1}z_{i1}, q_{i2}z_{i2}, q_{i1}q_{i2}\rho\right)$$
$$= \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)$$

- Untuk $y_{i1}=1$ dan $y_{i2}=0$, maka $q_{i1}=1$ dan $q_{i2}=-1$, maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
P(Y_1=1,Y_2=0) &= P\left(y_{i1}^*>0,\, y_{i2}^*\le 0\right)\\
&= P\left(\beta_1'\mathbf{x}_{i1}+\varepsilon_{i1}>0,\, \beta_2'\mathbf{x}_{i2}+\varepsilon_{i2}\le 0\right)\\
&= P\left(\varepsilon_{i1}>-\beta_1'\mathbf{x}_{i1},\, \varepsilon_{i2}\le -\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)\\
&= \int_{-\infty}^{-\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\int_{-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}}^{\infty} \phi(\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\rho)\, d\varepsilon_{i1}d\varepsilon_{i2} \qquad (\text{misalkan } w_{i1}=-\varepsilon_{i1})\\
&= \int_{-\infty}^{-\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\int_{\beta_1'\mathbf{x}_{i1}}^{-\infty} \phi(-w_{i1},\varepsilon_{i2},\rho)\, dw_{i1}d\varepsilon_{i2}\\
&= \int_{-\infty}^{-\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\int_{-\infty}^{\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \phi(-w_{i1},\varepsilon_{i2},\rho)\, dw_{i1}d\varepsilon_{i2}\\
&= \int_{-\infty}^{-\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\int_{-\infty}^{\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \frac{\exp\left\{-\dfrac{\left(\varepsilon_{i2}^2+w_{i1}^2-2\rho\varepsilon_{i2}(w_{i1})\right)}{2(1-\rho^2)}\right\}}{2\pi(1-\rho^2)}\, d\varepsilon_{i1}dw_{i2}\\
&= \int_{-\infty}^{-\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\int_{-\infty}^{\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \phi_2(w_{i1},\varepsilon_{i2},-\rho)\, dw_{i1}d\varepsilon_{i2}\\
&= \Phi_2\left(\beta_1'\mathbf{x}_{i1},-\beta_2'\mathbf{x}_{i2},-\rho\right)\\
&= \Phi_2\left(q_{i1}z_{i1},q_{i2}z_{i2},q_{i1}q_{i2}\rho\right)\\
&= \Phi_2\left(w_{i1},w_{i2},\rho_i^*\right)
\end{aligned}
$$

- Untuk $y_{i1}=1$ dan $y_{i2}=1$, maka $q_{i1}=1$ dan $q_{i2}=1$, maka diperoleh:

$$
\begin{aligned}
P(Y_1=1,Y_2=1) &= P\left(y_{i1}^*>0,\, y_{i2}^*>0\right)\\
&= P\left(\beta_1'\mathbf{x}_{i1}+\varepsilon_{i1}>0,\, \beta_2'\mathbf{x}_{i2}+\varepsilon_{i2}>0\right)\\
&= P\left(\varepsilon_{i1}>-\beta_1'\mathbf{x}_{i1},\, \varepsilon_{i2}>-\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)
\end{aligned}
$$

$$= \int_{-\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}^{\infty} \int_{-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}}^{\infty} \phi\left(\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \rho\right) d\varepsilon_{i1} d\varepsilon_{i2}$$

$\left(\text{misalkan } w_{i1} = -\varepsilon_{i1} \text{ dan } w_{i1} = -\varepsilon_{i1}\right)$

$$= \int_{\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}^{-\infty} \int_{\beta_1'\mathbf{x}_{i1}}^{-\infty} \phi\left(-w_{i1}, -w_{i2}, \rho\right)\left(-dw_{i1}\right)\left(-dw_{i2}\right)$$

$$= \int_{\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}^{-\infty} \int_{\beta_1'\mathbf{x}_{i1}}^{-\infty} \phi\left(w_{i1}, -w_{i2}, \rho\right) dw_{i1} dw_{i2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\beta_2'\mathbf{x}_{i2}} \int_{-\infty}^{-\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \phi_2\left(\varepsilon_{i1}, w_{i2}, -\rho\right) d\varepsilon_{i1} dw_{i2}$$

$$= \int_{-\infty}^{\beta_2'\mathbf{x}_{i2}} \int_{-\infty}^{\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \phi_2\left(\varepsilon_{i1}, w_{i2}, \rho\right) dw_{i1} dw_{i2}$$

$$= \Phi_2\left(\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, \beta_2'\mathbf{x}_{i2}, \rho\right)$$

$$= \Phi_2\left(q_{i1} z_{i1}, q_{i2} z_{i2}, q_{i1} q_{i2} \rho\right)$$

$$= \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)$$

Dari persamaan yang telah diuraikan di atas, dapat disimpulkan bahwa fungsi kemungkinannya adalah:

$$P\left(Y_1 = y_{i1}, Y_2 = y_{i2}\right) = \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right) \tag{3.5}$$

Karena observasi saling bebas maka fungsi kemungkinannya didapat sebagai hasil perkalian dari masing-masing fungsi peluangnya, yaitu:

$$P\left(Y_1 = y_{i1}, Y_2 = y_{i2}\right) = \prod_{i=1}^{n} \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right) \tag{3.6}$$

Selanjutnya dengan memberikan ln pada persamaan (3.6), maka diperoleh fungsi log kemungkinannya sebagai berikut:

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n} \ln \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right) \tag{3.7}$$

Dari fungsi log kemungkinan pada persamaan (3.7) akan diperoleh turunan pertama $\ln L$ terhadap β_j, untuk $j = 1, 2$ dan ρ sebagai berikut:

- $$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \sum_{i=1}^{n} \ln\ \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)} \left[\frac{\partial \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_1}\right]$$

$$= \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)} \left[\frac{\partial \Phi_2\left(q_{i1}\beta_1' \mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2' \mathbf{x}_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_1}\right]$$

Untuk mempermudah perhitungan, maka akan dihitung untuk $\dfrac{\partial \Phi_2\left(q_{i1}\beta_1' \mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2' \mathbf{x}_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_1}$, yaitu:

$$\frac{\partial \Phi_2\left(q_{i1}\beta_1' \mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2' \mathbf{x}_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_1} = \frac{\partial}{\partial \beta_1} \int_{-\infty}^{q_{i2}\beta_2' \mathbf{x}_{i2}} \int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1' \mathbf{x}_{i1}} \frac{\exp\left\{\dfrac{-\left(u^2 + v^2 - 2\rho_i^* uv\right)}{2\left(1 - \rho_i^{*2}\right)}\right\}}{2\pi\left(\sqrt{1 - \rho_i^{*2}}\right)} du\ dv$$

$$= \int_{-\infty}^{q_{i2}\beta_2' \mathbf{x}_{i2}} \left[\frac{\partial}{\partial \beta_1} \int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1' \mathbf{x}_{i1}} \frac{\exp\left\{\dfrac{-\left(u^2 + v^2 - 2\rho_i^* uv\right)}{2\left(1 - \rho_i^{*2}\right)}\right\}}{2\pi\left(\sqrt{1 - \rho_i^{*2}}\right)} du\right] dv$$

$$= \int_{-\infty}^{q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}} \frac{\exp\left\{\dfrac{-\left(\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)^2+\left(q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)^2-2\rho_i^{*}q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)} q_{i1}x_{i1}\;dv$$

$$= \frac{q_{i1}x_{i1}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)}\exp\left\{\frac{-\left(q_{i1}^2\beta_1'^2\mathbf{x}_{i1}^{\,2}\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}\int_{-\infty}^{q_{i2}\mathbf{x}_{i2}'\beta_2}\exp\left\{\frac{-\left(v^2-2\rho_i^{*}q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}v\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}dv$$

$$= \frac{q_{i1}x_{i1}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)}\exp\left\{\frac{-\left(q_{i1}^2\beta_1'^2\mathbf{x}_{i1}^{\,2}\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}\int_{-\infty}^{q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\exp\left\{\frac{-\left(\left(v-\rho_i^{*}q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)^2-\left(\rho_i^{*}q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)^2\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}dv$$

$$= \frac{q_{i1}x_{i1}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)}\exp\left\{\frac{-\left(q_{i1}^2\beta_1'^2\mathbf{x}_{i1}^{\,2}\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}\exp\left\{\frac{\left(\rho_i^{*2}q_{i1}^2\beta_1'^2\mathbf{x}_{i1}^{\,2}\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}\int_{-\infty}^{q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\exp\left\{\frac{-\left(v-\rho_i^{*}q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)^2}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}dv$$

$$= \frac{q_{i1}x_{i1}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)}\exp\left\{\frac{-\left(q_{i1}^2\beta_1'^2\mathbf{x}_{i1}^{\,2}\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}\int_{-\infty}^{q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\exp\left\{\frac{-\left(v-\rho_i^{*}q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)^2}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}dv$$

$$= q_{i1}x_{i1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-\left(q_{i1}^2\beta_1'^2\mathbf{x}_{i1}^{\,2}\right)}{2}\right\}\int_{-\infty}^{q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\exp\left\{\frac{-\left(v-\rho_i^{*}q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)^2}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}dv$$

dengan:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-\left(q_{i1}^2\mathbf{x}_{i1}'^2\beta_1^2\right)}{2}\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{\frac{-\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)^2}{2}\right\}=\phi\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)=\phi\left(w_{i1}\right) \text{ dan}$$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\frac{1}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)}\exp\left\{\frac{-\left(v-\rho_i^* q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)^2}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}dv &= \Phi\left[\frac{q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}-\rho_i^* q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}}{\sqrt{1-\rho_i^{*2}}}\right]\\ &= \Phi\left[\frac{w_{i2}-\rho_i^* w_{i1}}{\sqrt{1-\rho_i^{*2}}}\right]\\ &= g_{i1}\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial\Phi_2\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1},q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2},\rho_i^*\right)}{\partial\beta_1}=q_{i1}x_{i1}g_{i1}$$

Jadi,

- $$\frac{\partial \ln L}{\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1},w_{i2},\rho_i^*\right)}\left[\frac{\partial\Phi_2\left(w_{i1},w_{i2},\rho_i^*\right)}{\partial\beta_1}\right]$$

$$=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1},w_{i2},\rho_i^*\right)}\left[\frac{\partial\Phi_2\left(q_{i1}\mathbf{x}_{i1}'\beta_1,q_{i2}\mathbf{x}_{i2}'\beta_2,\rho_i^*\right)}{\partial\beta_1}\right]$$

$$=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1},w_{i2},\rho_i^*\right)}q_{i1}x_{i1}g_{i1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_{i1}g_{i1}}{\Phi_2\left(w_{i1},w_{i2},\rho_i^*\right)}x_{i1}$$

- $$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2} = \frac{\partial}{\partial \beta_2}\sum_{i=1}^{n} \ln \ \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)}\left[\frac{\partial \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_2}\right]$$
$$= \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)}\left[\frac{\partial \Phi_2\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_2}\right]$$

Untuk mempermudah perhitungan, maka akan dihitung untuk $\dfrac{\partial \Phi_2\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_2}$, yaitu:

$$\frac{\partial \Phi_2\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_2} = \frac{\partial}{\partial \beta_2}\int_{-\infty}^{q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}\int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \frac{\exp\left\{\dfrac{-\left(u^2+v^2-2\rho_i^* uv\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)} du\ dv$$

$$= \int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \frac{\exp\left\{\dfrac{-\left(\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}\right)^2+\left(q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)^2-2\rho_i^* q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)} q_{i2}x_{i2}\ du$$

$$= \frac{q_{i2}x_{i2}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)}\exp\left\{\frac{-\left(q_{i2}^2\beta_2'^2 X_{i2}{}^2\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}\int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \exp\left\{\frac{-\left(u^2-2\rho_i^* q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}u\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}du$$

$$= \frac{q_{i2}x_{i2}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)}\exp\left\{\frac{-\left(q_{i2}^2\beta_2'^2 \mathbf{x}_{i2}{}^2\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}\int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \exp\left\{\frac{-\left(u-2\rho_i^* q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)^2-\left(2\rho_i^* q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)^2}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\}du$$

$$= \frac{q_{i2}x_{i2}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)} \exp\left\{\frac{-\left(q_{i2}^2\beta_2'^2\mathbf{x}_{i2}{}^2\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\} \exp\left\{\frac{-\left(\rho_i^{*2}q_{i2}^2\beta_2'^2\mathbf{x}_{i2}{}^2\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\} \int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \exp\left\{\frac{-\left(u-2\rho_i^* q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)^2}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\} du$$

$$= \frac{q_{i2}x_{i2}}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)} \exp\left\{\frac{-\left(q_{i2}^2\beta_2'^2\mathbf{x}_{i2}{}^2\right)}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\} \int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \exp\left\{\frac{-\left(u-2\rho_i^* q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)^2}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\} du$$

$$= q_{i2}x_{i2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-\left(q_{i2}^2\beta_2'^2\mathbf{x}_{i2}{}^2\right)}{2}\right\} \int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}} \exp\left\{\frac{-\left(u-2\rho_i^* q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)^2}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\} du$$

dengan:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-\left(q_{i2}^2\beta_2'^2\mathbf{x}_{i2}{}^2\right)}{2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{\frac{-\left(q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)^2}{2}\right\} = \phi\left(q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right) = \phi\left(w_{i2}\right) \text{ dan}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{q_{i1}\beta_1' x_{i1}} \frac{1}{2\pi\left(\sqrt{1-\rho_i^{*2}}\right)} \exp\left\{\frac{-\left(u-\rho_i^* q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}\right)^2}{2\left(1-\rho_i^{*2}\right)}\right\} du &= \Phi\left[\frac{q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1} - \rho_i^* q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}}{\sqrt{1-\rho_i^{*2}}}\right] \\
&= \Phi\left[\frac{w_{i1} - \rho_i^* w_{i2}}{\sqrt{1-\rho_i^{*2}}}\right] \\
&= g_{i2}
\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh:

$$\frac{\partial \Phi_2\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_2} = q_{i2}\mathbf{x}_{i2}g_{i2}$$

Jadi,

- $$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)} \left[\frac{\partial \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_2}\right]$$

$$= \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)} \left[\frac{\partial \Phi_2\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}, \rho_i^*\right)}{\partial \beta_2} \right]$$

$$= \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)} q_{i2} x_{i2} g_{i2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i2} g_{i2}}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)} x_{i2}$$

- $$\frac{\partial \ln L}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \sum_{i=1}^{n} \ln \Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \Phi_2\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}, q_{i1}q_{i2}\rho\right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi_2\left(w_{i1}, w_{i2}, \rho_i^*\right)} \phi_2\left(q_{i1}\beta_1'\mathbf{x}_{i1}, q_{i2}\beta_2'\mathbf{x}_{i2}, q_{i1}q_{i2}\rho\right)\left(q_{i1}q_{i2}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Phi_2} \phi_2 q_{i1} q_{i2}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{q_{i1} q_{i2} \phi_2}{\Phi_2}$$

Untuk penaksir kemungkinan maksimum pada model regresi bivariat ini dapat diperoleh dengan cara menyusun secara bersamaan ketiga turunannya $\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_1}, \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_2}, \text{ dan } \frac{\partial \ln L}{\partial \rho} \right)$ sama dengan nol, dimana dalam proses perhitungannya digunakan bantuan iterasi, yaitu metode Newton Raphson (lihat bab sebelumnya). Metode Newton-Raphson ini merupakan sebuah metode untuk memecahkan persamaan tak linier. Solusi yang ditawarkan yaitu dengan menentukan lokasi dimana sebuah fungsi dimaksimumkan. Dikarenakan untuk perhitungan turunan kedua pada model regresi probit bivariat ini sangat kompleks, maka metode Newton Raphson diperoleh dengan menggunakan alat bantu *software*. Dalam tugas akhir ini menggunakan *software* STATA versi 10.

3.3 Pengujian Hipotesis Model

Setelah mengetahui bentuk model regresi probit bivariat dan melakukan penaksiran parameter-parameter yang ada pada model, maka langkah selanjutnya adalah melakukan evaluasi dan interpretasi dalam model regresi probit bivariat dengan pengujian hipotesis. Pengujian hipotesis digunakan terhadap model regresi probit bivariat, karena ingin mengetahui apakah semua variabel yang dimasukkan kedalam model mempunyai pengaruh yang signifikan, baik secara simultan maupun secara parsial. Dalam hal ini pengujian yang digunakan adalah uji perbandingan kemungkinan dan uji Wald. Pada model regresi probit bivariat akan dilakukan uji Lagrange Multipier untuk mengetahui apakah korelasi antara galat masing-masing variabel responnya signifikan atau tidak secara statistik.

3.3.1 Uji Lagrange Multipier

Pada model regresi probit bivariat terdapat dua persamaan model regresi probit dengan masing-masing galat yang diasumsikan berdistribusi normal bivariat, sehingga perlu dilakukan pengujian untuk mengetahui apakah kedua galat pada masing-masing variabel responnya secara signifikan saling berkorelasi atau tidak. Jika korelasi antara kedua galat tersebut signifikan, maka hubungan antara variabel prediktor dan variabel respon ditunjukkan oleh hasil model probit bivariatnya. Akan tetapi jika tidak signifikan, maka hubungan variabel prediktor dengan variabel responnya ditunjukkan oleh hasil kedua model probitnya masing-masing. Dalam hal ini, pengujian ini disebut dengan uji Lagrange Multipier (LM). Adapun langkah-langkah pengujian untuk mengetahui ada tidaknya korelasi antara galat masing-masing model dengan menggunakan uji Lagrange Multipier adalah:

1. Perumusan Hipotesis

   $H_0 : \rho = 0$

   $H_1 : \rho \neq 0$

2. Besaran yang diperlukan

   Menghitung $g = \sum_{i=1}^{n} q_{i1} q_{i2} \frac{\phi(w_{i1})\phi(w_{i2})}{\Phi(w_{i1})\Phi(w_{i2})}$ dan $h = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[\phi(w_{i1})\phi(w_{i2})\right]^2}{\Phi(w_{i1})\Phi(-w_{i1})\Phi(w_{i2})\Phi(-w_{i2})}$

   dengan bantuan program STATA versi 10.

3. Statistik Uji

   $LM = \frac{g^2}{h}$

4. Kriteria Pengujian

   Dengan mengambil taraf signifikansi α, maka H_0 ditolak jika *p-value* $< \alpha$.

5. Kesimpulan

   Penafsiran H_0 ditolak memberi arti bahwa korelasi antara galat masing-masing model adalah tidak sama dengan nol atau dengan kata lain bahwa kedua model persamaan secara signifikan saling berkorelasi satu sama lain.

3.3.2 Uji Perbandingan Kemungkinan

Uji hipotesis bagi koefisien regresi secara simultan dilakukan dengan maksud untuk mengetahui apakah variabel-variabel prediktor yang digunakan dalam model secara bersama-sama mempunyai pengaruh terhadap variabel yang ingin dijelaskan atau tidak. Pada model regresi probit bivariat digunakan uji perbandingan kemungkinan untuk menguji parameter secara simultan.

Langkah-langkah yang perlu dilakukan dalam pengujian signifikansi parameter secara simultan dengan menggunakan uji perbandingan kemungkinan sebagai berikut:

1. Perumusan Hipotesis

   $H_0 : \beta_{j1} = ... = \beta_{jp} = 0$, untuk $j = 1, 2$

   H_1 : sekurang-kurangnya terdapat satu $\beta_{jk} \neq 0$, untuk $j = 1, 2$, $k = 1, ..., p$

2. Besaran yang diperlukan

   Menghitung $-2\log\left(\frac{\text{likelihood tanpa variabel prediktor}}{\text{likelihood dengan variabel prediktor}}\right)$ dengan bantuan *software* STATA versi 10.

3. Statistik Uji

   $$\chi^2_{hitung} = -2\log\left(\frac{\text{likelihood tanpa variabel prediktor}}{\text{likelihood dengan variabel prediktor}}\right)$$

4. Kriteria Pengujian

   Dengan mengambil taraf signifikansi α, maka H_0 ditolak jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{(1-\alpha);p}$.

5. Kesimpulan

   Penafsiran dari H_0 diterima atau ditolak.

3.3.3 Uji Wald

Uji Wald digunakan untuk menguji signifikansi masing-masing parameter. Statistik uji Wald dihitung dengan membagi parameter yang ditaksir oleh galat baku dari parameter yang ditaksir tersebut, yaitu:

$$Z_{jk} = \frac{\hat{\beta}_{jk}}{SE\left(\hat{\beta}_{jk}\right)} \qquad j = 1,2$$

dimana $\hat{\beta}_{jk}$ adalah penaksir β_{jk} dan $SE\left(\hat{\beta}_{jk}\right)$ adalah penaksir galat baku β_{jk}. Adapun langkah-langkah pengujian signifikansi parameter regresi secara parsial dalam uji Wald sebagai berikut:

1. Perumusan Hipotesis

   $H_0 : \beta_{jk} = 0$, untuk $k = 0,1,\dots, p$

   $H_1 : \beta_{jk} \neq 0$, untuk $k = 0,1,\dots, p$

2. Besaran yang diperlukan

   Hitung $\hat{\beta}_{jk}$ dan $SE\left(\hat{\beta}_{jk}\right)$

3. Statistik Uji,

   $$Z_{jk} = \frac{\hat{\beta}_{jk}}{SE\left(\hat{\beta}_{jk}\right)}$$

4. Kriteria Pengujian

Dengan mengambil taraf signifikansi α, maka H_0 diterima, jika $-z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)} < z_{jk} < z_{\frac{1}{2}(1-\alpha)}$.

6. Kesimpulan

Penafsiran H_0 ditolak atau diterima.