BAB 3

RING ARMENDARIZ

3.1 Ring Terreduksi

Suatu ring R disebut ring terreduksi jika tidak mempunyai elemen nilpoten tak nol. Secara ekuivalen, suatu ring dikatakan terreduksi jika tidak mempunyai elemen dengan kuadrat nol, yaitu jika $x^2 = 0$ maka $x = 0$. Dari sifat tersebut, diperoleh bahwa jika $ab = 0$, maka $ba = 0$ (diketahui $ab = 0$, maka $(ba)^2 = baba = b.0.a = 0$ berakibat $ba = 0$).

Contoh ring terreduksi adalah ring bilangan bulat Z dan ring kuosien $Z^{/n}{}_{Z}$ dimana n adalah bilangan bulat square free. Secara umum, setiap domain merupakan ring terreduksi.

Pada tahun 1973 Efraim P. Armendariz membuktikan suatu lema yang berhubungan dengan ring terreduksi, yaitu sebagai berikut.

Lema 3.1.1 Misalkan R adalah ring terreduksi dan $f(x), g(x) \in R[x]$, dengan $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $g(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$. Maka $f(x)g(x) = 0$ jika dan hanya jika $a_ib_j = 0$ untuk setiap $0 \le i \le n$, $0 \le j \le m$.

Mulvi Ludiana, 2012

Ring Armendariz

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu

Bukti.

$\Rightarrow$ Diketahui f(x)g(x) = 0, maka

$$0 = f(x)g(x)$$
$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + a_nb_mx^{n+m}$$
$$\Leftrightarrow \quad 0 = a_0b_0$$
$$0 = a_0b_1 + a_1b_0$$
$$\ldots$$
$$0 = a_nb_m.$$

Karena R terreduksi, maka $a_0b_0 = 0$ jika dan hanya jika $b_0a_0 = 0$. Jadi, dengan mengalikan $0 = a_0b_1 + a_1b_0$ dengan b_0 dari kiri diperoleh

$$0 = b_0a_0b_1 + b_0a_1b_0$$
$$0 = 0.b_1 + b_0a_1b_0$$
$$0 = 0 + b_0a_1b_0$$
$$0 = b_0a_1b_0.$$

Mengalikan $0 = b_0a_1b_0$ dengan a_1 dari kiri diperoleh

$$0 = a_1b_0a_1b_0$$
$$0 = (a_1b_0)^2$$

Karena R terreduksi, maka $(a_1b_0)^2 = 0$ mengakibatkan $a_1b_0 = 0$.

Dengan cara yang sama, diperoleh $a_ib_0 = 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Jadi, persamaan direduksi menjadi

$$0 = a_0 b_1$$

$$0 = a_1 b_1 + a_0 b_2$$

$$0 = a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n.$$

Kembali menggunakan fakta bahwa $a_0b_1= 0$ mengakibatkan $b_1a_0= 0$. Dari $0 = a_1b_1+ a_0b_2$ diperoleh $a_1b_1= 0$ dan dengan cara yang sama diperoleh $a_ib_1= 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$. Pengulangan proses akan menghasilkan $a_ib_j= 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$, $1 \leq i \leq m$. Jadi, pernyataan terbukti.

$\Leftarrow$ Diketahui $a_ib_j= 0$ untuk setiap $1 \leq i \leq n$, $1 \leq i \leq m$. Maka

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (a_0+ a_1x + ... + a_nx^n)(b_0+ b_1x + ... + b_mx^m) \\ &= a_0b_0+ ... + (a_0b_k+ a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0)x^k+ ... + a_nb_mx^{n+m} \\ &= 0 + ... + (0 + 0 + ... + 0)x^k+ ... + 0x^{n+m} \\ &= 0 + ... + 0x^k+ ... + 0x^{n+m} \end{aligned}$$

■

Diperoleh $f(x)g(x) = 0$. Jadi, pernyataan terbukti.

Berdasarkan lema di atas, M. B. Rege dan Sima Chhawchharia membuat definisi ring Armendariz sebagai berikut.

Definisi 3.1.2 Suatu ring R dikatakan mempunyai sifat Armendariz (atau suatu ring Armendariz) jika polinomial $f(x) = a_0+ a_1x + ... + a_nx^n$, $g(x) = b_0+ b_1x + ... + b_mx^m \in R[x]$ dan $f(x)g(x) = 0$, diperoleh $a_ib_j= 0$ untuk setiap i, j .

Ring yang dimaksud adalah ring asosiatif dengan elemen kesatuan. Jadi, setiap ring terreduksi merupakan ring Armendariz. Akibatnya, ring bilangan bulat Z dan ring kuosien $Z^{/n}{}_{Z}$ dengan n bilangan bulat square free pun menjadi contoh ring Armendariz.

3.2 Konstruksi Ring Armendariz

Untuk mengonstruksi contoh ring Armedariz dan ring non-Armendariz, Rege dan Sima menggunakan prinsip idealisasi dari M. Nagata sebagai berikut.

1. Misalkan R ring komutatif dan M adalah R-modul. Dinotasikan dengan R(+)M , R-modul $R \oplus M$ memberikan struktur ring dimana perkalian di-definisikan dengan

$$(a, m)(b, n) = (ab, an + bm).$$

Akan dibuktikan R(+)M adalah suatu ring.

 Operasi terdefinisi dengan baik.

Misalkan (a_1, m_1), (a_2, m_2), (b_1, n_1), (b_2, n_2) $\in$ R(+)M dimana $(a_1, m_1) = (a_2, m_2)$, $(b_1, n_1) = (b_2, n_2)$ yang berarti $a_1 = a_2$, $m_1 = m_2$, $b_1 = b_2$, $n_1 = n_2$.

$$\begin{aligned}(a_1, m_1) + (b_1, n_1) &= (a_1 + b_1, m_1 + n_1)\\ &= (a_2 + b_2, m_2 + n_2)\\ &= (a_2, m_2) + (b_2, n_2)\\ (a_1, m_1)(b_1, n_1) &= (a_1b_1, a_1n_1 + b_1m_1)\\ &= (a_2b_2, a_2n_2 + b_2m_2)\\ &= (a_2, m_2)(b_2, n_2).\end{aligned}$$

 (R(+)M, +) adalah grup komutatif.

Penjumlahan bersifat asosiatif. Misalkan $(a_1, m_1), (a_2, m_2), (a_3, m_3) \in R(+)M$, maka

$$
\begin{aligned}
(a_1, m_1) + \{(a_2, m_2) + (a_3, m_3)\} &= (a_1, m_1) + (a_2 + a_3, m_2 + m_3) \\
&= (a_1 + \{a_2 + a_3\}, m_1 + \{m_2 + m_3\}) \\
&= (a_1 + a_2 + a_3, m_1 + m_2 + m_3) \\
&= (\{a_1 + a_2\} + a_3, \{m_1 + m_2\} + m_3) \\
&= (a_1 + a_2, m_1 + m_2) + (a_3, m_3) \\
&= \{(a_1, m_1) + (a_2, m_2)\} + (a_3, m_3).
\end{aligned}
$$

Keberadaan elemen nol. Karena untuk setiap $(a, m) \in R(+)M$ berlaku

$$
\begin{aligned}
(a, m) + (0_R, 0_M) &= (a + 0_R, m + 0_M) \\
&= (a, m) \\
&= (0_R + a, 0_M + m) \\
&= (0_R, 0_M) + (a, m),
\end{aligned}
$$

dimana $0_R \in R$ adalah elemen nol di R dan 0_Madalah elemen nol di M, maka $(0_R, 0_M)$ adalah elemen nol di R(+)M .

Keberadaan elemen negatif. Karena untuk setiap $(a, m) \in R(+)M$ berlaku

$$
\begin{aligned}
(a, m) + (-a, -m) &= (a + (-a), m + (-m)) \\
&= (0_R, 0_M)
\end{aligned}
$$

$= (-a + a, -m + m)$

$= (-a, -m) + (a, m),$

dimana $-a \in R$ adalah elemen negatif dari a di R dan $-m$ elemen negatif dari m di M , maka $(-a, -m)$ adalah elemen negatif dari (a, m) di R(+)M .

- (R(+)M, ·) adalah semigrup, yaitu perkalian bersifat asosiatif. Misalkan (a_1, m_1), (a_2, m_2), $(a_3, m_3) \in R(+)M$, maka

$$
\begin{aligned}
(a_1, m_1)\{(a_2, m_2)(a_3, m_3)\} &= (a_1, m_1)(a_2a_3,\ a_2m_3 + a_3m_2) \\
&= (a_1\{a_2a_3\},\ a_1\{a_2m_3 + a_3m_2\} + \{a_2a_3\}m_1) \\
&= (a_1a_2a_3,\ a_1a_2m_3 + a_1a_3m_2 + a_2a_3m_1) \\
&= (a_1a_2a_3,\ a_1a_2m_3 + a_3a_1m_2 + a_3a_2m_1) \\
&= (\{a_1a_2\}a_3,\ \{a_1a_2\}m_3 + a_3\{a_1m_2 + a_2m_1\}) \\
&= (a_1a_2,\ a_1m_2 + a_2m_1) + (a_3, m_3) \\
&= \{(a_1, m_1)(a_2, m_2)\}(a_3, m_3).
\end{aligned}
$$

- Distributif perkalian terhadap penjumlahan.

  Misalkan (a_1, m_1), (a_2, m_2), $(a_3, m_3) \in R(+)M$, maka

$$
\begin{aligned}
(a_1, m_1)\{(a_2, m_2) + (a_3, m_3)\} &= (a_1, m_1)(a_2 + a_3,\ m_2 + m_3) \\
&= (a_1\{a_2 + a_3\},\ a_1\{m_2 + m_3\} + \{a_2 + a_3\}m_1) \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3,\ a_1m_2 + a_1m_3 + a_2m_1 + a_3m_1) \\
&= (a_1a_2 + a_1a_3,\ \{a_1m_2 + a_2m_1\} + \{a_1m_3 + a_3m_1\}) \\
&= (a_1a_2,\ a_1m_2 + a_2m_1) + (a_1a_3,\ a_1m_3 + a_3m_1) \\
&= \{(a_1, m_1)(a_2, m_2)\} + \{(a_1, m_1)(a_3, m_3)\}.
\end{aligned}
$$

Dengan cara yang serupa, diperoleh

$$\{(a_1, m_1) + (a_2, m_2)\}(a_3, m_3) = \{(a_1, m_1)(a_3, m_3)\} + \{(a_2, m_2)(a_3, m_3)\}.$$

Berdasarkan empat poin di atas, maka telah dibuktikan bahwa R(+)M adalah suatu ring. Jika M bukan nol, ring tidak terreduksi karena M dapat diidentifikasi dengan ideal $0 \oplus M$ dimana kuadratnya adalah nol.

2. Misalkan R ring dan A ideal dari R. Ring kuosien $\bar{R} = R/A$ mempunyai struktur alami pada R-bimodul kiri dan kanan. Dinotasikan $\bar{a} = a + A \in \bar{R}$ untuk setiap $a \in R$. Definisikan operasi perkalian pada $R \oplus (R/A)$ sebagai berikut.

$$(r, \bar{a})(r', \bar{a}') = (rr', \overline{ra' + ar'}).$$

Notasi yang digunakan adalah R(+)R/A dengan sifat yang mirip dengan R(+)M . Akan dibuktikan R(+)R/A adalah suatu ring.

- Operasi terdefinisi dengan baik.

Misalkan $(r_1, \bar{a}_1)$, $(r_2, \bar{a}_2)$, $(s_1, \bar{b}_1)$, $(s_2, \bar{b}_2) \in R(+)R/A$ dimana $(r_1, \bar{a}_1) = (r_2, \bar{a}_2)$, $(s_1, \bar{b}_1) = (s_2, \bar{b}_2)$ yang berarti $r_1 = r_2$, $s_1 = s_2$ dan $\bar{a}_1 = \bar{a}_2$, $\bar{b}_1 = \bar{b}_2$ sehingga $a_1 - a_2 \in A$ dan $b_1 - b_2 \in A$. Selanjutnya, diperoleh $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) = a_1 + b_1 - (a_2 + b_2) \in A$. Itu artinya $\overline{a_1 + b_1} = \overline{a_2 + b_2}$ sehingga

$$\begin{aligned}(r_1, \bar{a}_1) + (s_1, \bar{b}_1) &= (r_1 + s_1, \overline{a_1 + b_1}) \\ &= (r_2 + s_2, \overline{a_2 + b_2}) \\ &= (r_2, \bar{a}_2) + (s_2, \bar{b}_2)\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}r_1(b_1 - b_2) + (a_1 - a_2)s_1 &= r_1b_1 - r_1b_2 + a_1s_1 - a_2s_1 \\ &= r_1b_1 - r_2b_2 + a_1s_1 - a_2s_2\end{aligned}$$

$= (r_1b_1 + a_1s_1) - (r_2b_2 + a_2s_2) \in A.$

Mulvi Ludiana, 2012

Ring Armendariz

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu

Artinya, $r_1b_1 + a_1s_1 = r_2b_2 + a_2s_2$ sehingga

$$
\begin{aligned}
(r_1, \underline{a}_1)(s_1, b_1) &= (r_1s_1, \overline{r_1b_1 + a_1s_1}) \\
&= (r_2s_2, \overline{r_2b_2 + a_2s_2}) \\
&= (r_2, \underline{a}_2)(s_2, b_2)
\end{aligned}
$$

- (R(+)M, +) adalah grup komutatif.

Penjumlahan bersifat asosiatif. Misalkan $(r_1, \underline{a}_1)$, $(r_2, \underline{a}_2)$, $(r_3, \underline{a}_3) \in R(+)R/A$, maka

$$
\begin{aligned}
(r_1, \underline{a}_1) + \{(r_2, \underline{a}_2) + (r_3, \underline{a}_3)\} &= (r_1, \underline{a}_1) + (r_2 + r_3, \underline{a}_2 + \underline{a}_3) \\
&= (r_1 + \{r_2 + r_3\}), \underline{(a_1 + \{a_2} + \underline{a}_3\})} \\
&= (r_1 + r_2 + r_3), \underline{(a_1} + \underline{a}_2 + \underline{a}_3) \\
&= (\{r_1 + r_2\} + r_3), \underline{(\{a_1} + \underline{a}_2\} + \underline{a}_3) \\
&= (r_1 + r_2, \underline{\{a_1} + \underline{a}_2\}) + (a_3, \underline{a}_3) \\
&= \{(a_1, \underline{a}_1) + (a_2, \underline{a}_2)\} + (a_3, \underline{a}_3)
\end{aligned}
$$

Keberadaan elemen nol. Karena untuk setiap $(r, \bar{a}) \in R(+)R/A$ berlaku

$$
\begin{aligned}
(r, \bar{a}) + (0, \bar{0}) &= (r + 0, \bar{a} + \bar{0}) \\
&= (0 + r, \bar{0} + \bar{a}) \\
&= (0, \bar{0}) + (r, \bar{a})
\end{aligned}
$$

dimana $0 \in R$ adalah elemen nol di R dan $\bar{0}$ adalah elemen nol di R/A, maka $(0,\bar{0})$ adalah elemen nol di $R(+)R/A$.

Keberadaan elemen negatif. Karena untuk setiap $(r, \bar{a}) \in R(+)R/A$ berlaku

$$\begin{aligned}(r, \bar{a}) + (-r, \overline{-a}) &= (r + (-r), \overline{a + (-a)}) \\ &= (0, \bar{0}) \\ &= (-r + r, \overline{-a + a}) \\ &= (-r, \overline{-a}) + (r, \bar{a})\end{aligned}$$

dimana $-r \in R$ adalah elemen negatif dari r di R dan $\overline{-a}$ elemen negatif dari $\bar{a}$ di R/A, maka $(-r, \overline{-a})$ adalah elemen negatif dari $(r, \bar{a})$ di $R(+)R/A$.

- $(R(+)M, \cdot)$ adalah semigrup, yaitu perkalian bersifat asosiatif.

Misalkan $(r_1, \underline{a}_1), (r_2, \underline{a}_2), (r_3, \underline{a}_3), \in R(+)R/A$, maka

$$\begin{aligned}(r_1, \underline{a}_1)\{(r_2, \underline{a}_2)(r_3, \underline{a}_3)\} &= (r_1, \underline{a}_1)(r_2r_3, \overline{r_2a_3 + r_3a_2}) \\ &= (r_1\{r_2r_3\}, \overline{r_1(r_2a_3 + r_3a_2) + \{r_2r_3\}a_1}) \\ &= (r_1r_2r_3, \overline{r_1r_2a_3 + r_1r_3a_2 + r_2r_3a_1}) \\ &= (r_1r_2r_3, \overline{r_1r_2a_3 + r_3r_1a_2 + r_3r_2a_1}) \\ &= (\{r_1r_2\}r_3, \overline{\{r_1r_2\}a_3 + r_3\{r_1a_2 + r_2a_1\}}) \\ &= (r_1r_2, \overline{\{r_1a_2 + r_2a_1\}})(r_3, \underline{a}_3) \\ &= \{(r_1, \underline{a}_1)(r_2, \underline{a}_2)\}(r_3, \underline{a}_3).\end{aligned}$$

- Distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Misalkan $(a_1, m_1), (a_2, m_2), (a_3, m_3) \in R(+)M$, maka

$$\begin{aligned}(r_1, \underline{a}_1)\{(r_2, \underline{a}_2) + (r_3, \underline{a}_3)\} &= (r_1, \underline{a}_1)(r_2 + r_3,\ a_2 + a_3)\\ &= (r_1\{r_2 + r_3\},\ r_1\{a_2 + a_3\} + \{r_2 + r_3\}a_1)\\ &= (r_1r_2 + r_1r_3,\ r_1a_2 + r_1a_3 + r_2a_1 + r_3a_1)\\ &= (r_1r_2 + r_1r_3,\ \{r_1a_2 + r_2a_1\} + \{r_1a_3 + r_3a_1\})\end{aligned}$$

$= (r_1r_2, r_1a_2 + r_2a_1) + (r_1r_3, r_1a_3 + r_3a_1)$

$= \{(r_1, \underline{a}_1)(r_2, \underline{a}_2)\} + \{(r_1, \underline{a}_1)(r_3, \underline{a}_3)\}.$

Dengan cara yang serupa, diperoleh

$$\{(r_1, \underline{a}_1) + (r_2, \underline{a}_2)\}(r_3, \underline{a}_3) = \{(r_1, \underline{a}_1)(r_3, \underline{a}_3)\} + \{(r_2, \underline{a}_2)(r_3, \underline{a}_3)\}.$$

Berdasarkan empat poin di atas, maka telah dibuktikan bahwa R(+)R/A adalah suatu ring.

Berikut adalah contoh ring tak terreduksi yang merupakan Armedariz.

Proposisi 3.2.1 Untuk setiap bilangan bulat n, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ adalah suatu ring Armendariz, dimana bukan merupakan ring tereduksi ketika n adalah bilangan bulat yang bukan square free.

Bukti. Misalkan $n = p^m$, dimana p adalah bilangan prima. $\overline{f(x)}$, $\overline{g(x)}$ berturut-turut menotasikan koset dari $f(x), g(x) (\mathrm{mod}\ p^m\mathbb{Z}[x])$. Misalkan $\overline{f(x)}\,\overline{g(x)} = 0$, artinya $p^m | f(x)g(x)$. Karena p adalah bilangan prima, maka $f(x) = p^r \overline{f}(x)$ dan $g(x) = p^s \overline{g}(x)$ untuk suatu $\overline{f}$ dan $\overline{g}$ yang memenuhi kondisi bahwa faktor persekutuan terbesar dari koefisien-koefisien $\overline{f}$ (juga $\overline{g}$) tidak dapat dibagi p. Jelas bahwa $r + s \leq m$. Itu berarti bahwa $\overline{a_i}\,\overline{b_j} = 0$ untuk setiap i, j, yang menunjukkan bahwa $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ adalah adalah ring Armendariz.

Misalkan n adalah suatu bilangan asli. Maka $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_i^{e_i}$ dimana p_k adalah suatu bilangan prima. Berdasarkan teorema sisa China, diperoleh

$$Z/nZ \cong Z/p_1^{e_1}Z \oplus Z/p_2^{e_2}Z \oplus \dots \oplus Z/p_i^{e_i}Z.$$

Diketahui $Z/p_k^{e_k}Z$ Armendariz untuk setiap k. Akibatnya, $Z/p_1^{e_1}Z \oplus Z/p_2^{e_2}Z \oplus \dots \oplus Z/p_i^{e_i}Z$ Armendariz, yaitu jika $f(x), g(x) \in \{Z/p_1^{e_1}Z \oplus Z/p_2^{e_2}Z \oplus \dots \oplus Z/p_i^{e_i}Z\}[x]$, memenuhi $f(x)g(x) = 0$, maka $a_{r_p} b_{s_p} = 0$ untuk setiap $1 \leq p \leq i$,

$0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq m$. Selanjutnya akan dibuktikan $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ Armendariz.

Konstruksi

$$\varphi : \mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p_2^{e_2}\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$$

$$(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_i) \rightarrow \bar{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ambil

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} (\underline{a}_{p1}, \ldots, \underline{a}_{pi})x^p,\ g(x) = \sum_{q=0}^{m} (b_{q1}, \ldots, b_{qi})x^q \in \{\mathbb{Z}/p_1^{e_1}\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z}\}[x].$$

Misalkan $\varphi(f(x))\varphi(g(x)) = \varphi(f(x)g(x)) = 0$

$$0 = \varphi\left(\sum_{p=0}^{n} (\underline{a}_{p1}, \underline{a}_{p2}, \ldots, \underline{a}_{pi})x^p\right) \left(\sum_{q=0}^{m} (\overline{b_{q1}}, \overline{b_{q2}}, \ldots, \overline{b_{qi}})x^q\right)$$

$$0 = \varphi\left(\sum_{p=0}^{n} (\underline{a}_{p1}, \underline{a}_{p2}, \ldots, \underline{a}_{pi})x^p\right) \left(\sum_{q=0}^{m} (\overline{b_{q1}}, \overline{b_{q2}}, \ldots, \overline{b_{qi}})x^q\right)$$

$$0 = \varphi\left(\sum_{q=0}^{n+m} \sum_{p=0}^{q} (\underline{a}_{p1}, \underline{a}_{p2}, \ldots, \underline{a}_{pi})(b_{q1}, b_{q2}, \ldots, b_{qi})x^q\right)$$

$$0 = \underline{a}_0\overline{b_0} + (\underline{a}_0\overline{b_1} + \underline{a}_1\overline{b_0})x + \ldots + \underline{a}_n\overline{b_m}x^{n+m}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \underline{a}_0\overline{b_0}$$

$$0 = \underline{a}_0\overline{b_1} + \underline{a}_1\overline{b_0}$$

$$\ldots$$

$$0 = \underline{a}_n\overline{b_m}$$

Telah diketahui bahwa $\underline{a}_{rp}\overline{b_{sp}} = 0$, untuk setiap $1 \leq p \leq i$, $0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq m$.

Maka

$$\underline{a}_0\overline{b_0} = \bar{0},$$

$$\underline{a}_0 b_1 + \underline{a}_1 b_0 = \bar{0},$$

$$\underline{a}_0 b_1 = (\underline{a}_{01} + \ldots + \underline{a}_{0i})(b_{11} + \ldots + b_{1i})$$

$= \underline{a}_{0_1}b_{1_1} + \ldots + \underline{a}_{0_1}b_{1_i} + \underline{a}_{0_i}b_{1_1} + \ldots + \underline{a}_{0_i}b_{1_i}$

$= \bar{0} + \ldots + \bar{0} + \bar{0} + \ldots + \bar{0}$

$= \bar{0}$

...

$\underline{a}_n b_m = \bar{0}$

Diperoleh $\underline{a}_p b_q = 0$, untuk setiap $0 \le p \le n$, $0 \le q \le m$. Jadi, Z/nZ Armendariz.

Teorema berikut merupakan generalisasi dari Proposisi 3.2.1.

Teorema 3.2.2 Jika R adalah domain ideal utama (PID) komutatif dan A adalah ideal dari R, ~~maka R/A ad~~alah Armendariz.

Bukti. Ambil $f(x), g(x) \in R/A[x]$. Karena R PID, maka terdapat $d \in A$ sehingga $A = (d) = dR$. Misalkan $d = p^m$, dimana p adalah prima. Asumsikan $f(x)g(x) = \bar{0}$, artinya $f(x)g(x) \in A = dR = p^m$ atau $p^m | f(x)g(x)$. Karena p prima, maka $f(x) = p^r f(x)$ dan $g(x) = p^s g(x)$ untuk suatu f dan g yang memenuhi kondisi faktor persekutuan terbesar dari koefisien-koefisien f (juga g) tidak dapat dibagi p. Jelas bahwa $r + s \le m$ yang berarti $\underline{a}_i b_j = 0$ untuk setiap i, j yang menunjukkan bahwa R/A adalah ring Armendariz.

Misalkan $d \in A$. Karena R adalah PID, maka R adalah UFD sehingga $d = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \ldots p_k^{e_k}$ dimana p_k adalah elemen prima. Berdasarkan teorema sisa Cina, diperoleh

$$R/A = R/dR \cong R/p_1^{e_1}R \oplus R/p_2^{e_2}R \oplus \ldots \oplus R/p_i^{e_i}R.$$

Diketahui $R/p_k^{e_k}R$ Armendariz untuk setiap k. Maka $R/p_1^{e_1}R \oplus R/p_2^{e_2}R \oplus \ldots \oplus R/p_i^{e_i}R$ Armendariz, yaitu jika f(x), g(x) $\in \{R/p_1^{e_1}R \oplus R/p_2^{e_2}R \oplus \ldots \oplus R/p_i^{e_i}R\}[x]$, memenuhi f(x)g(x) = 0, maka $\underline{a}_{rp}b_{sp} = 0$, untuk setiap $1 \leq p \leq i$, $0 \leq r \leq n$, $0 \leq s \leq m$. Selanjutnya akan dibuktikan R/A = R/dR Armendariz.

Konstruksi

$$\varphi : R/p_1^{e_1}R \oplus R/p_2^{e_2}R \oplus \dots \oplus R/p_i^{e_i}R \to R/dR$$

$$(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_i) \to \bar{a} = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Ambil

$$f(x) = \sum_{p=0}^{n} (\underline{a}_{p1}, \dots, \underline{a}_{pi})x^p,\ g(x) = \sum_{q=0}^{m} (\bar{b}_{q1}, \dots, \bar{b}_{qi})x^q \in \{R/p_1^{e_1}R \oplus \dots \oplus R/p_i^{e_i}R\}[x].$$

Misalkan $\varphi(f(x))\varphi(g(x)) = \varphi(f(x)g(x)) = 0$

$$0 = \varphi\left(\sum_{p=0}^{n}(\underline{a}_{p1}, \underline{a}_{p2}, \dots, \underline{a}_{pi})x^p\right)\varphi\left(\sum_{q=0}^{m}(\bar{b}_{q1}, \bar{b}_{q2}, \dots, \bar{b}_{qi})x^q\right)$$

$$0 = \varphi\left(\sum_{q=0}^{n+m}\sum_{p=0}^{q}(\underline{a}_{p1}, \underline{a}_{p2}, \dots, \underline{a}_{pi})(\bar{b}_{q1}, \bar{b}_{q2}, \dots, \bar{b}_{qi})x^q\right)$$

$$0 = \sum_{q=0}^{n+m}\sum_{p=0}^{q} \underline{a}_p \bar{b}_{q-p} x^q$$

$$0 = \underline{a}_0\bar{b}_0 + (\underline{a}_0\bar{b}_1 + \underline{a}_1\bar{b}_0)x + \dots + \underline{a}_n\bar{b}_m x^{n+m}$$

$$\Leftrightarrow\ 0 = \underline{a}_0\bar{b}_0$$

$$0 = \underline{a}_0\bar{b}_1 + \underline{a}_1\bar{b}_0$$

$$\dots$$

$$0 = \underline{a}_n\bar{b}_m$$

Telah diketahui bahwa $\underline{a}_{rp}b_{sp} = 0$, untuk setiap $1 \le p \le i$, $0 \le r \le n$, $0 \le s \le m$.

Maka

$$\underline{a}_0\bar{b}_0 = \bar{0},$$

$$\underline{a}_0\bar{b}_1 + \underline{a}_1\bar{b}_0 = \bar{0},$$

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

$$\underline{a}_0 b_1 = (\underline{a}_{01} + \ldots + \underline{a}_{0i})(b_{11} + \ldots + b_{1i})$$

$$= \underline{a}_{01} b_{11} + \ldots + \underline{a}_{01} b_{1i} + \underline{a}_{0i} b_{11} + \ldots + \underline{a}_{0i} b_{1i}$$

= ‾ + ... + ‾ + ‾ + ... + ‾

= ‾0

...

$\underline{a}_n b_m = \overline{0}$

Diperoleh $\underline{a}_p b_q = 0$, untuk setiap $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq m$. Jadi, R/dR Armendariz.

Teorema-teorema selanjutnya memanfaatkan prinsip idealisasi untuk konstruksi ring Armendariz.

Teorema 3.2.3 Misalkan R domain dan A ideal dari R. Misalkan R/A Armendariz. Maka R(+)R/A adalah Armendariz.

Bukti. Ambil f (x), g(x) ∈ {R(+)R/A}[x], dimana

-54f (x) = $\sum_{i=0}^{m}(a_i, \underline{u}_i)x$ j = (n

g(x) = $\sum_{j=0}^{n}(b_j, \underline{v}_j)x$ $_{j=0}$ b_j, $_{j=0}$ $\underline{v}_j$) = $(g_0(x), g_1(x))$.

Jika f (x)g(x) = 0, maka

$(f_0(x), f_1(x))(g_0(x), g_1(x)) = (f_0(x)g_0(x), f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)) = (0, \overline{0}) = 0.$

Artinya,

rhatikan 3.1.

m

P

e

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \qquad (3.1)$$

$$f_0(x)g_0(x) = 0 \qquad (3.2)$$

$$f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0} b_j = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + a_mb_nx^{n+m} = 0$$

$\Rightarrow a_0 b_0 = 0$

Karena R domain, maka R[x] pun domain. Jadi, ketika $f_0(x)g_0(x) = 0$, haruslah $f(x) = 0$ atau $g(x) = 0$.

- Kasus I

  Misalkan $f_0(x) = 0$. Maka persamaan 3.2 menjadi $\overline{f_1(x)g_0(x)} = 0$ atas R/A. Karena R/A Armendariz, maka $\overline{u_i b_j} = 0$ untuk setiap i, j. Karena $f_0(x) = 0$, maka $a_i = 0$ untuk setiap i. Jadi,

  $$(a_i, \underline{u}_i)(b_j, \underline{v}_j) = (a_i b_j, \overline{a_i v_j + u_i b_j}) = (0, \bar{0}) = 0$$

  untuk setiap i, j .

- Kasus II

  Misalkan $g_0(x) = 0$. Maka persamaan 3.2 menjadi $\overline{f_0(x)g_1(x)} = 0$ atas R/A. Karena R/A Armendariz, maka $\underline{a_i v_j} = 0$ untuk setiap i, j . Karena $g_0(x) = 0$, maka $b_j = 0$ untuk setiap j. Jadi,

  $$(a_i, \underline{u}_i)(b_j, \underline{v}_j) = (a_i b_j, \overline{a_i v_j + u_i b_j}) = (0, \bar{0}) = 0$$

  untuk setiap i, j . ■

Jadi, R(+)R/A Armendariz.

Sebagai kasus khusus dari teorema di atas, diperoleh akibat berikut.

Akibat 3.2.4 $Z^{(+)}{}_{Z}{}^{/n}{}_{Z}$adalah ring Armendariz untuk setiap bilangan bulat n.

■

Bukti. Karena Z adalah suatu domain dan $Z^{/n}{}_{Z}$adalah ring Armendariz berdasarkan Proposisi 3.2.1, maka $Z^{(+)}{}_{Z}{}^{/n}{}_{Z}$adalah ring Armendariz berdasarkan Teorema 3.2.3.

Dari Teorema 3.2.3, diperoleh bahwa jika R adalah domain maka R(+)R (dengan memilih {0} sebagai ideal dari R) adalah Armendariz. Hasil ini dapat diperluas untuk ring terreduksi, dengan sifat yang akan digunakan adalah sebagai berikut.

1. Jika R terreduksi dan a, b ∈ R, maka ab = 0 jika dan hanya jika ba = 0.
2. Ring terreduksi adalah adalah ring Armendariz.
3. Jika R terreduksi, maka R[x] juga terreduksi.

Proposisi 3.2.5 Misalkan R adalah ring terreduksi. Maka ring R(+)R adalah Armendariz.

Bukti. Ambil f (x), g(x) ∈ {R(+)R}[x], dimana

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m} (a_i, u_i)x^i = \sum_{i=0}^{m} a_i, \sum_{i=0}^{m} u_i = (f_0(x), f_1(x)),$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} (b_j, v_j)x^j = \sum_{j=0}^{n} b_j, \sum_{j=0}^{n} v_j = (g_0(x), g_1(x))$$

dan memenuhi f(x)g(x) = 0.

$$f(x)g(x) = 0$$

$$(f_0(x), f_1(x))(g_0(x), g_1(x)) = 0$$

$$(f_0(x)g_0(x), f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)) = 0.$$

$f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x) = 0.$

Maka diperoleh

$$f_0(x)g_0(x) = 0$$

(3.3)

(3.4)

Karena R terreduksi, maka dari 3.3 diperoleh

$$g_0(x)f_0(x) = 0. \quad (3.5)$$

Mulvi Ludiana, 2012

Ring Armendariz

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu

Selanjutnya, persamaan 3.4 dikalikan dengan $g_0(x)$ dari kiri sehingga diperoleh $g_0(x)f_0(x)g_1(x) + g_0(x)f_1(x)g_0(x) = 0$. Dengan menggunakan 3.5, diperoleh $g_0(x)f_1(x)g_0(x) = 0$. Mengalikan dengan $f_1(x)$ dari kiri diperoleh

$$f_1(x)g_0(x)f_1(x)g_0(x) = (f_1(x)g_0(x))^2 = 0.$$

Karena R[x] terreduksi, maka

$$f_1(x)g_0(x) = 0. \tag{3.6}$$

Substitusi persamaan 3.6 ke persamaan 3.4, diperoleh

$$f_0(x)g_1(x) = 0. \tag{3.7}$$

Karena R terreduksi, maka dari persamaan 3.3, 3.6 dan 3.7 diperoleh $a_ib_j = 0$, $a_iv_j = 0$, $u_ib_j = 0$ untuk setiap i, j . Berarti $(a_i, u_i)(b_j, v_j) = (a_ib_j, a_iv_j+u_ib_j) = 0$ untuk setiap i, j. Jadi, R(+)R adalah ring Armendariz.

Proposisi berikut merupakan generalisasi dari Proposisi 3.2.5.

Proposisi 3.2.6 Misalkan R ring tereduksi dan A ideal dari R sedemikian sehingga R/A terreduksi. Maka R(+)R/A adalah Armendariz.

Bukti. Ambil f (x), g(x) ∈ {R(+)R/A}[x], dimana

$$f(x) = \sum_{i=0}^{m}(a_i, \underline{u_i})x^i = (\sum^{m} \quad ^{m}$$

$$\sum_{i=0} a_i, \quad \sum_{i=0} \underline{u}_i) = (f_0(x), f_1(x)),$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^{n} (b_j, \underline{v}_j)x^j = \left(\sum_{j=0}^{n} b_j, \quad \sum_{j=0}^{n} \underline{v}_j\right) = (g_0(x), g_1(x))$$

dan memenuhi $f(x)g(x) = 0$.

$$\overline{f(x)g(x)} = 0$$

$$\overline{(f_0(x), f_1(x))(g_0(x), g_1(x))} = 0$$

$$\overline{(f_0(x)g_0(x), f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x))} = 0.$$

Maka diperoleh

$$\overline{f_0(x)g_0(x)} = 0 \tag{3.8}$$

$$\overline{f_0(x)g_1(x) + f_1(x)g_0(x)} = 0. \tag{3.9}$$

Karena R terreduksi, maka dari 3.8 diperoleh

$$g_0(x)f_0(x) = 0. \tag{3.10}$$

Selanjutnya, persamaan 3.9 dikalikan dengan $g_0(x)$ dari kiri sehingga diperoleh $\overline{g_0(x)f_0(x)g_1(x) + g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = 0$. Dengan menggunakan 3.10, diperoleh $\overline{g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = 0$. Mengalikan dengan $f_1(x)$ dari kiri diperoleh

$$\overline{f_1(x)g_0(x)f_1(x)g_0(x)} = \overline{(f_1(x)g_0(x))^2} = 0.$$

Karena R/A[x] terreduksi, maka

$$\overline{f_1(x)g_0(x)} = 0.$$

Substitusi persamaan 3.11 ke persamaan 3.9, diperoleh

$)g_1(x) = 0.$

(3.11)

(3.12)

Karena $\overline{R/A}$ terreduksi, yang berarti $\overline{R/A}$ Armendariz, maka dari persamaan 3.8, 3.11 dan 3.12 diperoleh $a_ib_j = 0$, $\overline{a_iv_j} = 0$, $u_ib_j = 0$ untuk setiap i, j. Berarti $(a_i, \underline{u_i})(b_j, \underline{v_j}) = (a_ib_j, \overline{a_iv_j + u_ib_j}) = (0, \bar{0}) = 0$ untuk setiap i, j. Jadi, R(+)R/A adalah ring Armendariz.

Kim dan Lee memberikan contoh ring Armendariz. Misalkan R terreduksi dan S subring dari matriks segitiga atas $T_3(R)$, yaitu

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, d \in R \right\}$$

Misalkan $f(x) = p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n$, $g(x) = q_0 + q_1x + \ldots + q_mx^m \in S[x]$, dimana

$$p_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix}, \quad q_j = \begin{pmatrix} e_j & f_j & g_j \\ 0 & e_j & h_j \\ 0 & 0 & e_j \end{pmatrix}$$

yang memenuhi $f(x)g(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= (p_0 + p_1x + \ldots + p_nx^n)(q_0 + q_1x + \ldots + q_mx^m) \\ &= p_0q_0 + (p_0q_1 + p_1q_0)x + \ldots + p_nq_mx^{n+m} \end{aligned}$$

Untuk setiap p_i, q_j diperoleh

$$p_iq_j = \begin{pmatrix} a_i & a_{i12} & a_{i13} \\ 0 & a_i & a_{i23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_j & b_{j12} & b_{j13} \\ 0 & b_j & b_{j23} \end{pmatrix}$$

$$0 \quad 0 \quad a_i \qquad 0 \quad 0 \quad b_j$$

$$= \begin{pmatrix} a_ib_j & a_ib_{j12}+a_{i12}b_j & a_ib_{j13}+a_{i1}2b_{j23}+a_{i13}b_j \\ 0 & a_ib_j & a_ib_{j23}+a_{i23}b_j \\ 0 & 0 & a_ib_j \end{pmatrix}.$$

Untuk memudahkan penulisan, bentuk matriks di atas akan dituliskan dalam bentuk $p_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$, $q_j = (e_j, f_j, g_j, h_j)$, dimana masing-masing secara berturut-turut mewakili entri diagonal utama, entri baris pertama kolom kedua, entri baris pertama kolom ketiga, serta entri baris kedua kolom ketiga. Jadi, untuk setiap i, j diperoleh

$$\begin{aligned} p_iq_j &= (a_i, b_i, c_i, d_i)(e_j, f_j, g_j, h_j) \\ &= (a_ie_j, a_if_j + b_ie_j, a_ig_j + b_ih_j + c_ie_j, a_ih_j + d_ie_j) \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= p_0q_0 + (p_0q_1 + p_1q_0)x + \ldots + p_nq_mx^{n+m} \\ 0 &= (a_0, b_0, c_0, d_0)(e_0, f_0, g_0, h_0) + [(a_0, b_0, c_0, d_0)(e_0, f_0, g_0, h_0) \\ &\quad +(a_0, b_0, c_0, d_0)(e_0, f_0, g_0, h_0)]x + \ldots + \\ &\quad (a_n, b_n, c_n, d_n)(e_m, f_m, g_m, h_m)x^{n+m} \\ 0 &= (a_0e_0, a_0f_0 + b_0e_0, a_0g_0 + b_0h_0 + c_0e_0, a_0h_0 + d_0e_0) \\ &\quad +[(a_0e_1, a_0f_1 + b_0e_1, a_0g_1 + b_0h_1 + c_0e_1, a_0h_1 + d_0e_1) \\ &\quad +(a_1e_0, a_1f_0 + b_1e_0, a_1g_0 + b_1h_0 + c_1e_0, a_1h_0 + d_1e_0)]x + \ldots + \\ &\quad (a_ne_m, a_nf_m + b_ne_m, a_ng_m + b_nh_m + c_ne_m, a_nh_m + d_ne_m)x^{n+m} \\ 0 &= (a_0e_0, a_0f_0 + b_0e_0, a_0g_0 + b_0h_0 + c_0e_0, a_0h_0 + d_0e_0) \end{aligned}$$

$+[(a_0e_1+ a_1e_0,\ a_0f_1+ b_0e_1+ a_1f_0+ b_1e_0,$

$a_0g_1+ b_0h_1+ c_0e_1+ a_1g_0+ b_1h_0+ c_1e_0,\ a_0h_1+ d_0e_1+ a_1h_0+ d_1e_0)]x$

$+ \ldots + (a_ne_m,\ a_nf_m+ b_ne_m,\ a_ng_m+ b_nh_m+ c_ne_m,\ a_nh_m+ d_ne_m)x^{n+m}$

$= \; (a_0e_0,\; a_0f_0 + b_0e_0,\; a_0g_0 + b_0h_0 + c_0e_0,\; a_0h_0 + d_0e_0)$

$+[(a_0e_1 + a_1e_0,\; a_0f_1 + a_1f_0 + b_0e_1 + b_1e_0,$

$a_0g_1 + a_1g_0 + b_0h_1 + b_1h_0 + c_0e_1 + c_1e_0,\; a_0h_1 + a_1h_0 + d_0e_1 + d_1e_0)]x$

$+ \dots + (a_ne_m,\; a_nf_m + b_ne_m,\; a_ng_m + b_nh_m + c_ne_m,\; a_nh_m + d_ne_m)x^{n+m}.$

Dari hasil di atas, diperoleh empat persamaan sebagai berikut.

1. $0 = a_0e_0 + [a_0e_1 + a_1e_0]\, x + \dots + a_ne_mx^{n+m}.$

2. $0 = [a_0f_0 + b_0e_0] + [a_0f_1 + a_1f_0 + b_0e_1 + b_1e_0]\, x + \dots + [a_nf_m + b_ne_m]\, x^{n+m}.$

3. $0 = [a_0g_0 + b_0h_0 + c_0e_0] + [a_0g_1 + a_1g_0 + b_0h_1 + b_1h_0 + c_0e_1 + c_1e_0]\, x + \dots + [a_ng_m + b_nh_m + c_ne_m]\, x^{n+m}$

4. $0 = [a_0h_0 + d_0e_0] + [a_0h_1 + a_1h_0 + d_0e_1 + d_1e_0]\, x + \dots + [a_nh_m + d_ne_m].$

Dari 1, diperoleh $0 = a_0e_0 + [a_0e_1 + a_1e_0]\, x + \dots + a_ne_mx^{n+m}$. Artinya, $a_0e_0 = 0$, $a_0e_1 + a_1e_0 = 0$, ..., $a_ne_m = 0$. Karena R terreduksi, maka $e_0a_0 = 0$. Selanjutnya, mengalikan $a_0e_1 + a_1e_0 = 0$ dengan e_0 dari sebelah kiri diperoleh

$$e_0a_0e_1 + e_1a_1e_0 = 0$$

$$0.e_1 + e_0a_1e_0 = 0$$

$$e_0a_1e_0 = 0$$

Selanjutnya, dengan mengalikan persamaan terakhir dengan a_1 diperoleh $a_1e_0a_1e_0 = (a_1e_0)^2 = 0$. Karena R terreduksi, maka diperoleh $a_1e_0 = 0$. Dengan cara yang sama, diperoleh $a_ie_0 = 0$, untuk setiap i.

Persamaan pun terreduksi menjadi $a_0e_1 = 0$, $a_0e_2 + a_1e_1 = 0$, ..., $a_0e_m +$ ... $+ a_{n-1}e_1 = 0$. Kembali menggunakan fakta bahwa $a_0e_1 = 0$ mengakibatkan

Mulvi Ludiana, 2012

Ring Armendariz

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu

$e_1a_0 = 0$. Mengalikan $a_0e_2 + a_1e_1 = 0$ dengan e_1 dari sebelah kiri diperoleh

$$e_1a_0e_2 + e_1a_1e_1 = 0$$
$$0.e_2 + e_1a_1e_1 = 0$$
$$e_1a_1e_1 = 0.$$

Selanjutnya, dengan mengalikan persamaan terakhir dengan a_1 diperoleh $a_1e_1a_1e_1 = (a_1e_1)^2 = 0$. Karena R terreduksi, maka diperoleh $a_1e_1 = 0$. Dengan cara yang sama diperoleh $a_ie_1 = 0$ untuk setiap i. Dengan pengulangan proses, diperoleh $a_ie_j = 0$ untuk setiap i, j.

Dari persamaan 2, diperoleh $0 = [a_0f_0 + b_0e_0] + [a_0f_1 + a_1f_0 + b_0e_1 + b_1e_0]\, x + \ldots + [a_nf_m + b_ne_m]\, x^{n+m}$. Artinya, $a_0f_0 + b_0e_0 = 0$, $a_0f_1 + a_1f_0 + b_0e_1 + b_1e_0 = 0$, ..., $a_nf_m + b_ne_m = 0$. Mengalikan $a_0f_0 + b_0e_0 = 0$ dengan e_0, diperoleh

$$e_0a_0f_0 + e_0b_0e_0 = 0$$
$$0.f_0 + e_0b_0e_0 = 0$$
$$e_0b_0e_0 = 0.$$

Selanjutnya, dengan mengalikan persamaan terakhir dengan b_0 diperoleh $b_0e_0b_0e_0 = (b_0e_0)^2 = 0$. Karena R terreduksi, maka diperoleh $b_0e_0 = 0$. Dengan cara yang sama, diperoleh $b_ie_0 = 0$ untuk setiap i.

Persamaan pun terreduksi menjadi $a_0f_0 = 0$, $a_0f_1 + a_1f_0 + b_0e_1 = 0$, ..., $a_nf_m = 0$. Dengan menggunakan hasil $a_ie_j = 0$, mengalikan persamaan $a_0f_1 + a_1f_0 + b_0e_1 = 0$ dengan e_1 menghasilkan $e_1b_0e_1 = 0$ sehingga $b_0e_1 = 0$. Dengan cara yang sama, diperoleh $b_i e_1 = 0$ untuk setiap i. Dengan pengulangan proses, diperoleh $b_i e_j = 0$ untuk setiap i, j .

Persamaan kembali terreduksi menjadi $a_0 f_0 = 0$, $a_0 f_1 + a_1 f_0 = 0$, ..., $a_n f_m = 0$. Karena R terreduksi, maka $a_0 f_0 = 0$ mengakibatkan $f_0 a_0$. Mengalikan $a_0 f_1 + a_1 f_0 = 0$ dengan f_0 menghasilkan $f_0 a_1 f_0 = 0$ sehingga diperoleh

$a_1f_0= 0$. Dengan cara yang sama, diperoleh $a_if_0= 0$ untuk setiap i. Dengan pengulangan proses, diperoleh $a_if_j= 0$ untuk setiap i, j.

Dari persamaan 4, diperoleh $0 = [a_0h_0+ d_0e_0]+[a_0h_1+ a_1h_0+ d_0e_1+ d_1e_0]\ x + ... + [a_nh_m+ d_ne_m]$. Artinya, $a_0h_0+ d_0e_0= 0$, $a_0h_1+ a_1h_0+ d_0e_1+ d_1e_0= 0$, ..., $a_nh_m+ d_ne_m= 0$. Dengan langkah yang serupa dengan persamaan 2, diperoleh $a_ih_j= 0$, $d_ie_j= 0$ untuk setiap i, j.

Dari persamaan 3, diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= [a_0g_0+ b_0h_0+ c_0e_0] + [a_0g_1+ a_1g_0+ b_0h_1+ b_1h_0+ c_0e_1+ c_1e_0]\ x \\ &\quad +... + [a_ng_m+ b_nh_m+ c_ne_m]\ x^{n+m} \end{aligned}$$

Artinya, $a_0g_0+ b_0h_0+ c_0e_0= 0$, $a_0g_1+ a_1g_0+ b_0h_1+ b_1h_0+ c_0e_1+ c_1e_0= 0$, $a_ng_m+ b_nh_m+ c_ne_m= 0$. Dengan menggunakan hasil $a_ie_j= 0$ dan $b_ie_j= 0$, mengalikan persamaan $a_0g_0+ b_0h_0+ c_0e_0= 0$ dengan e_0 menghasilkan $e_0c_0e_0= 0$ sehingga $c_0e_0= 0$. Dengan cara yang sama, diperoleh $c_ie_0= 0$ untuk setiap i. Dengan pengulangan proses, diperoleh $c_ie_j= 0$ untuk setiap i, j . Persamaan pun terreduksi. Dengan cara yang serupa, akan diperoleh $a_ig_j= 0$, $b_ih_j= 0$ untuk setiap i, j.

Jadi, S adalah ring Armendariz.

Berikut merupakan penjelasan rinci dari dua contoh ring Armendariz.

1. Himpunan bilangan bulat Z

   Ambil $f(x) = a_0+ a_1x + ... + a_nx^n$, $g(x) = b_0+ b_1x + ... + b_mx^m \in Z[x]$. Karena Z domain, diperoleh $Z[x]$ domain sehingga untuk $f(x)g(x) = 0$

haruslah $f(x) = 0$ atau $g(x) = 0$. Jadi, pada Z diperoleh $f(x)g(x) = 0$ jika $f(x) = 0$ atau $g(x) = 0$ dan jelas diperoleh $a_i b_j = 0$ untuk setiap i, j.

2. Himpunan ring kuosien Z_4

   Misalkan $f(x) = \underline{a}_0 + \underline{a}_1 x + ... + \underline{a}_n x^n$, $g(x) = b_0 + b_1 x + ... + \underline{a}_m x^m \in Z_4[x]$

dan memenuhi $f(x)g(x) = \bar{0}$.

$$\bar{0} = \overline{f(x)g(x)}$$
$$= \overline{a_0b_0} + \overline{a_0b_1 + a_1b_0}\,x + \ldots + \overline{a_nb_m}\,x^{n+m}.$$

Artinya,

$$\overline{a_0b_0} = \bar{0}, \qquad (3.13)$$

$$\overline{a_0b_1 + a_1b_0} = \bar{0} \qquad (3.14)$$

$$\overline{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0} = \bar{0} \qquad (3.15)$$

$$\ldots$$

$$\overline{a_nb_m} = \bar{0}. \qquad (3.16)$$

Persamaan 3.13 hanya bisa dipenuhi oleh $\underline{a}_0 = \bar{2}$ dan $b_0 = \bar{2}$ (untuk $\underline{a}_0$, $b_0 = \bar{0}$). Selanjutnya, substitusi nilai tersebut ke persamaan 3.14 sehingga

$$\bar{0} = \overline{a_0b_1 + a_1b_0}$$
$$= \overline{\bar{2}b_1 + \underline{a}_1\bar{2}}$$

Persamaan $(\overline{b_1 + \underline{a}_1})$ haruslah bernilai genap, dimana dapat dipenuhi oleh $\underline{a}_1 = 2k_{a_1} + 1$, $b_1 = 2k_{b_1} + 1$ (keduanya ganjil) atau $\underline{a}_1 = 2k_{a_1}$, $b_1 = 2k_{b_1}$

(keduanya genap).

Untuk kasus keduanya ganjil, substitusikan nilai $a_1 = 2k_{a_1} + 1$, $b_1 = 2k_{b_1} + 1$

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

ke persamaan 3.15 sehingga

$$\bar{0} = \overline{a_0}\,\overline{b_2} + \overline{a_1}\,\overline{b_1} + \overline{a_2}\,\overline{b_0}$$
$$= \bar{\ }_2\overline{b_2} + \overline{(2k_{a_1} + 1)(2k_{b_1} + 1)} + \overline{a_2}\,\bar{\ }_2$$

(3.17)

Sisi kanan persamaan selalu bernilai ganjil, sehingga tidak akan pernah diperoleh nilai $\bar{0}$. Artinya, untuk penyelesaian $\underline{a}_1$, b_1 bernilai ganjil tidak memenuhi, haruslah $\underline{a}_1$, b_1 bernilai genap.

Untuk proses selanjutnya, akan selalu terdapat dua pasangan pilihan untuk a_i, b_i, yaitu keduanya ganjil atau keduanya genap. Jika dipilih a_i, b_i ganjil, maka akan terdapat kontradiksi ketika ada perkalian a_ib_i, seperti pada persamaan 3.17 sehingga haruslah a_i, b_i genap, untuk setiap i, j. Jadi, diperoleh

$$a_ib_j = 2k_{a_i}2k_{b_j}$$
$$= 4k_{a_i}k_{b_j}$$

untuk setiap i, j.

3.3 Ring Non-Armendariz

Pada bagian ini akan disajikan beberapa contoh ring yang bukan Armendariz.

Perhatikan polinomial $f(x) = E_{12}x + E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$g(x) = E_{11}x - E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ atas ring $M_2(\mathbb{R})$. Maka

$$f(x)g(x) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

tetapi $E_{11}E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{11} = 0$.

Dari uraian di atas, diperoleh bahwa ring matriks berderajat dua atas bilangan real bukan merupakan ring Armendariz. Hasil di atas dapat diperluas untuk ring matriks berderajat lebih dari dua, sehingga bukan merupakan ring Armendariz. Lebih jauh, ring matriks atas sebarang ring bukan merupakan ring Armendariz. Jadi, suatu ring matriks berderajat ≥ 2 atas sebarang ring dengan elemen kesatuan bukanlah ring Armendariz.

Perhatikan polinomial $f(x) = (\bar{4}, \bar{0}) + (\bar{4}, \bar{1})x$ atas ring $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Kuadrat dari polinomial ini adalah nol, tetapi hasil kali

$$(\bar{4}, \bar{0}) + (\bar{4}, \bar{1}) = (\bar{4}\,\bar{4}, \overline{4.1 + 0.4})$$
$$= (16, \bar{4})$$
$$= (\bar{0}, \bar{4})$$

tidak nol.

Ring di atas menunjukkan bahwa ring komutatif belum tentu Armendariz. Selain itu juga menunjukkan bahwa ring kuosien dari suatu ring Armendariz belum tentu Armendariz. Ring pada contoh di atas adalah ring kuosien dari $\{\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}\}$ dimana merupakan Armendariz berdasarkan Akibat 3.2.1.

Mulvi Ludiana, 2012

Ring Armendariz

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu

3.4 Ring Grup dan Ring Armendariz

Pada bagian ini disajikan dua buah konstruksi dari ring grup dan hubungannya dengan ring Armendariz.

3.4.1 Ring Grup ZZ_3 dan ZZ_5

Konstruksi suatu ring grup RG dengan $R = Z$ dan $G = Z_n/\{0\}$ dengan operasi perkalian, dimana n adalah bilangan prima selain dua. Maka

$$ZZ_n = \{a_1\bar{1} + a_2\bar{2} + \ldots + a_{n-1}\overline{n-1} \mid a_i \in Z \text{ untuk setiap } i\}.$$

Akan diperiksa apakah ZZ_n adalah ring Armendariz atau bukan, tetapi hanya untuk $n = 3$ dan $n = 5$.

Untuk $n = 3$, diketahui

$$ZZ_3 = \{a_1\bar{1} + a_2\bar{2} \mid a_1, a_2 \in Z\}.$$

Akan diperiksa apakah ZZ_3 adalah ring terreduksi atau bukan.

Ambil $a = a_1\bar{1} + a_2\bar{2} \in ZZ_3$. Akan diperiksa apakah $a^2 = 0$ mengakibatkan $a = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= a^2 \\ &= a_1^2\bar{1} + a_1a_2\bar{2} + a_2a_1\bar{2} + a_2^2\bar{1} \\ &= a_1^2\bar{1} + a_1a_2\bar{2} + a_1a_2\bar{2} + a_2^2\bar{1} \\ &= (a_1^2 + a_2^2)\bar{1} + 2a_1a_2\bar{2} \end{aligned}$$

yang akan terpenuhi jika $a_1^2 + a_2^2 = 0$ dan $2a_1a_2 = 0$. Dari $a_1^2 + a_2^2 = 0$, diperoleh $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ yang berarti $a = a_1 \bar{\ }_1 + a_2 \bar{\ }_2 = 0\,\bar{\ }_1 + 0\,\bar{\ }_2 = 0$. Jadi, ZZ_3 adalah ring terreduksi. Berdasarkan penjelasan pada 3.1, maka ZZ_3 adalah ring Armendariz.

Selanjutnya, untuk n = 5 diketahui

$$ZZ_5 = \{a_1\bar{1} + a_2\bar{2} + a_3\bar{3} + a_4\bar{4} \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in Z\}.$$

Akan diperiksa apakah ZZ_5 adalah ring terreduksi atau bukan.

Ambil $a = a_1\bar{1} + a_2\bar{2} + a_3\bar{3} + a_4\bar{4} \in ZZ_5$. Akan diperiksa apakah $a^2 = 0$ mengakibatkan $a = 0$.

$$\begin{aligned}
0 &= a^2 \\
&= a_1^2\bar{1} + a_1a_2\bar{2} + a_1a_3\bar{3} + a_1a_4\bar{4} + +a_2a_1\bar{2} + a_2a_2\bar{2} + a_2a_3\bar{1} + a_2a_4\bar{3} \\
&\quad a_3a_1\bar{3} + a_3a_2\bar{1} + a_3a_3\bar{4} + a_3a_4\bar{2} + a_4a_1\bar{4} + a_4a_2\bar{3} + a_4a_3\bar{2} + a_4a_4\bar{1} \\
&= a_1^2\bar{1} + a_1a_2\bar{2} + a_1a_3\bar{3} + a_1a_4\bar{4} + +a_1a_2\bar{2} + a_2^2\bar{2} + a_2a_3\bar{1} + a_2a_4\bar{3} \\
&\quad a_1a_3\bar{3} + a_2a_3\bar{1} + a_3^2\bar{4} + a_3a_4\bar{2} + a_1a_4\bar{4} + a_2a_4\bar{3} + a_3a_4\bar{2} + a_4^2\bar{1} \\
&\quad (2a_1a_4 + a_2^2 + a_3^2)\bar{4}
\end{aligned}$$

yang akan terpenuhi jika

$$a_1^2 + 2a_2a_3 + a_4^2 = 0 \tag{3.18}$$

$$2a_1a_2 + 2a_3a_4 = 0 \tag{3.19}$$

$$2a_1a_3 + 2a_2a_4 = 0 \tag{3.20}$$

$$2a_1a_4 + a_2^2 + a_3^2 = 0. \tag{3.21}$$

Dengan proses eliminasi persamaan 3.19 dan 3.20, diperoleh

$$
\begin{aligned}
0 &= (2a_1a_2 + 2a_3a_4) - (2a_1a_3 + 2a_2a_4) \\
&= 2a_1(a_2 - a_3) - 2a_4(a_2 - a_3) \\
&= 2(a_1 - a_4)(a_2 - a_3).
\end{aligned}
$$

Maka nilai yang memenuhi adalah $a_2 = a_3$ atau $a_1 = a_4$. Pilih $a_2 = a_3$ dan substitusikan ke persamaan 3.19

$$
\begin{aligned}
a_1a_2 + a_3a_4 &= 0 \\
a_1a_2 + a_2a_4 &= 0 \\
(a_1 + a_4)a_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Diperoleh $a_1 = -a_4$ atau $a_2 = 0$. Pilih $a_1 = -a_4$ dan substitusikan ke persamaan 3.18

$$
\begin{aligned}
a_1^2 + 2a_2a_3 + a_4^2 &= 0 \\
a_1^2 + 2a_2a_2 + (-a_1)^2 &= 0 \\
a_1^2 + 2a_2^2 + a_1^2 &= 0 \\
2a_1^2 + 2a_2^2 &= 0 \\
a_1^2 + a_2^2 &= 0
\end{aligned}
$$

yang dipenuhi oleh $a_1 = 0$, $a_2 = 0$. Karena $a_1 = -a_4$ dan $a_2 = a_3$, maka diperoleh $a_4 = -a_1 = 0$ dan $a_3 = a_2 = 0$ yang berarti

$$
\begin{aligned}
a &= a_1\,\bar{}_1 + a_2\,\bar{}_2 + a_3\,\bar{}_3 + a_4\,\bar{}_4 \\
&= 0\,\bar{}_1 + 0\,\bar{}_2 + 0\,\bar{}_3 + 0\,\bar{}_4
\end{aligned}
$$

$= 0.$

Jadi, ZZ_5 adalah ring terreduksi. Kembali menggunakan penjelasan pada 3.1, maka ZZ_5 adalah ring Armendariz.

Mulvi Ludiana, 2012

Ring Armendariz

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu

3.4.2 Ring Grup Z^{S_3}

Konstruksi suatu ring grup RG dengan R = Z dan G = S_3= {(1), (12), (13), (23), (123), (132)} dengan operasi komposisi. Maka

Z^{S_3}= {$a_1(1)+a_2(12)+a_3(13)+a_4(23)+a_5(123)+a_6(132)$| $a_i \in$ Z untuk setiap i}.

Akan diperiksa apakah Z^{S_3} adalah ring Armendariz atau bukan. Pertama akan dilihat apakah Z^{S_3} adalah ring terreduksi atau bukan. Ambil a = $a_1(1) + a_2(12) + a_3(13) + a_4(23) + a_5(123) + a_6(132) \in Z^{S_3}$. Akan diperiksa apakah $a^2 = 0$ menyebabkan a = 0.

$$\begin{aligned}
0 &= a^2 \\
&= (a_1(1) + a_2(12) + a_3(13) + a_4(23) + a_5(123) + a_6(132))^2 \\
&= (a_1(1) + a_2(12) + a_3(13) + a_4(23) + a_5(123) + a_6(132)) \\
&\quad\ (a_1(1) + a_2(12) + a_3(13) + a_4(23) + a_5(123) + a_6(132)) \\
&= a^2_1 (1) + a_1a_2(12) + a_1a_3(13) + a_1a_4(23) + a_1a_5(123) + a_1a_6(132)+ \\
&\quad\ a_2a_1(12) + a^2_2(1) + a_2a_3(132) + a_2a_4(123) + a_2a_5(23) + a_2a_6(13)+ \\
&\quad\ a_3a_1(13) + a_3a_2(123) + a^2_3(1) + a_3a_4(132) + a_3a_5(12) + a_3a_6(23)+ \\
&\quad\ a_4a_1(23) + a_4a_2(132) + a_4a_3(123) + a^2_4 (1) + a_4a_5(13) + a_4a_6(12)+ \\
&\quad\ a_5a_1(123) + a_5a_2(13) + a_5a_3(23) + a_5a_4(12) + a^2_5(132) + a_5a_6(1)+ \\
&\quad\ a_6a_1(12) + a_6a_2(1) + a_6a_3(132) + a_6a_4(123) + a_6a_5(23) + a^2_6(13)+ \\
&= (a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 + 2a_5a_6)(1) \\
&\quad\ +(2a_1a_2+ a_3a_5+ a_4a_6+ a_5a_4+ a_6a_3)(12)
\end{aligned}$$

$$+(2a_1a_3+ a_2a_6+ a_4a_5+ a_5a_2+ a_6a_4)(13)$$

$$+(2a_1a_4+ a_2a_5+ a_3a_6+ a_5a_3+ a_6a_2)(23)$$

$$+(2a_1a_5+ a_2a_4+ a_3a_2+ a_4a_3+ a^2_6)(123)$$

$$+(2a_1a_6+ a_2a_3+ a_3a_4+ a_4a_2+ a^2_5)(132).$$

Artinya,

$$0 = a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 + 2a_5a_6 \quad (3.22)$$

$$0 = 2a_1a_2 + a_3a_5 + a_4a_6 + a_5a_4 + a_6a_3 \quad (3.23)$$

$$0 = 2a_1a_3 + a_2a_6 + a_4a_5 + a_5a_2 + a_6a_4 \quad (3.24)$$

$$0 = 2a_1a_4 + a_2a_5 + a_3a_6 + a_5a_3 + a_6a_2 \quad (3.25)$$

$$0 = 2a_1a_5 + a_2a_4 + a_3a_2 + a_4a_3 + a^2_6 \quad (3.26)$$

$$0 = 2a_1a_6 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_2 + a^2_5\,. \quad (3.27)$$

Ubah persamaan 3.23, 3.24 dan 3.26 menjadi

$$0 = 2a_1a_2 + (a_3 + a_4)(a_5 + a_6) \quad (3.28)$$

$$0 = 2a_1a_3 + (a_2 + a_4)(a_5 + a_6) \quad (3.29)$$

$$0 = 2a_1a_4 + (a_2 + a_3)(a_5 + a_6). \quad (3.30)$$

Selanjutnya, kurangi persamaan 3.26 oleh persamaan 3.27, sehingga diperoleh

$$0 = 2a_1(a_5 - a_6) + (a^2_5 + a^2_6)$$
$$0 = 2a_1(a_5 - a_6) + (a^2_5 + a^2_6) - 2a_5a_6$$

$$2a_5a_6 = 2a_1(a_5 - a_6) + (a^2_5 + a^2_6)$$

Substitusi persamaan 3.31 ke persamaan 3.22 sehingga diperoleh

$$= a^2_1 + a^2_2 + a^2_3 + a^2_4 + 2a_1(a_5 - a_6) + (a^2_5 + a^2_6). \tag{3.31}$$

(3.32)

Mulvi Ludiana, 2012

Ring Armendariz

Universitas Pendidikan Indonesia | repository.upi.edu

Selanjunya kurangi persamaan 3.28 dari 3.29

$$0 = 2a_1(a_2 - a_3) - (a_2 - a_3)(a_5 + a_6)$$
$$0 = (a_2 - a_3)(2a_1 - a_5 - a_6)$$

dengan solusi $a_2 - a_3 = 0$ atau $2a_1 - a_5 - a_6 = 0$. Pilih $2a_1 - a_5 - a_6 = 0$, yang berarti

$$2a_1 = a_5 + a_6. \tag{3.33}$$

Substitusi persamaan 3.33 ke persamaan 3.32

$$0 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + (a_5 + a_6)(a_5 - a_6) + (a_5^2 + a_6^2)$$
$$0 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 + a_5^2 + a_6^2$$

$$0 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2a_5^2. \tag{3.34}$$

Kurangi persamaan 3.34 oleh 3.22 sehingga diperoleh $2a_5^2 = 0$ yang berarti $a_5 = 0$. Substitusikan nilai $a_5 = 0$ ke 3.31

$$2.0.a_6 = 2a_1(0 - a_6) + (0^2 + a_6^2)$$
$$0 = -2a_1a_6 + a_6^2$$
$$2a_1a_6 = a_6^2$$
$$0 = a_6^2 - 2a_1a_6$$
$$0 = (2a_1 - a_6)a_6.$$

Diperoleh $2a_1 = a_6$ atau $a_6 = 0$. Pilih $2a_1 = a_6$ dan substitusikan ke persamaan

3.28

$$0 = a_6a_2 + a_3.0 + a_4a_6 + 0.a_4 + a_6a_3$$

$$0 = a_2a_6 + a_4a_6 + a_3a_6$$

$$0 = (a_2 + a_4 + a_3)a_6.$$

Pilih $a_6 = 0$, yang berarti $a_1 = 0$. Kemudian substitusi ke persamaan 3.22

$$0 = 0^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2.0.a_6$$
$$0 = a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

yang hanya bisa dipenuhi oleh $a_2 = a_3 = a_4 = 0$.

Diperoleh $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$, yang berarti

$$\begin{aligned} a &= a_1(1) + a_2(12) + a_3(13) + a_4(23) + a_5(123) + a_6(132) \\ &= 0(1) + 0(12) + 0(13) + 0(23) + 0(123) + 0(132) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, $Z^S{}_3$ adalah ring terreduksi. Kembali menggunakan penjelasan pada 3.1, maka $Z^S{}_3$ adalah ring Armendariz.