BAB III

KEMUNGKINAN MAKSIMUM BERSYARAT UNTUK MA

3.1 *Moving Average*

3.1.1 *Moving Average* Tingkat-1

Bentuk umum dari *moving average* tingkat-1 (MA(1)) adalah :

$$Z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} \tag{3.1.1}$$

dimana a_t independen dan berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan *varians* σ_a^2, dituliskan $a_t \sim N(0;\sigma_a^2)$. Dengan kata lain, a_t adalah proses *white noise*.

Persamaan (3.1.1) dapat disederhanakan menjadi :

$$Z_t = (1+\theta B)a_t \tag{3.1.2}$$

Selanjutnya, berdasarkan persamaan (3.1.2) nyatakan a_t dalam bentuk Z_t

$$a_t = (1+\theta B)^{-1} Z_t$$

$$a_t = (1-\theta B+\theta^2 B^2 - \ldots \pm \theta^q B^q)(1+\theta^{q+1} B^{q+1-1}) Z_t$$

Sedemikian sehingga,

$$Z_t = (\theta Z_{t-1} - \theta^2 Z_{t-2} + \ldots \pm \theta^q Z_{t-q} + a_t + \theta^{q+1} a_{t-q-1})$$

Jika $|\theta| < 1$ dan k menjadi besar tak berhingga, maka diperoleh deret tak berhingga

$$Z_t = \theta Z_{t-1} - \theta^2 Z_{t-2} + \ldots + a_t \qquad (3.1.3)$$

Berdasarkan persamaan (3.1.3), maka dapat diperoleh ekspektasi untuk MA(1), yaitu :

$$E(Z_t) = E(\theta Z_{t-1} - \theta Z_{t-2} + \ldots + a_t)$$

$$= E(Z_{t-1}) - E(\theta^2 Z_{t-2}) + \ldots + E(a_t)$$

$$\mu = \theta\mu + (0 + \ldots + 0)$$

$$\mu = \theta\mu + c$$

$$\mu = \frac{c}{1+\theta} \qquad (3.1.4)$$

Sedangkan untuk mendapatkan variansi dari MA(1) diperoleh dari hasil perkalian persamaan (3.1.1) dengan Z_{t-k} lalu ambil ekspektasinya :

$$Z_t.Z_{t-k} = (a_t + \theta a_{t-1})(a_{t-k} + \theta a_{t-k-1})$$

$$E(Z_t.Z_{t-k}) = E(a_t a_{t-k} + \theta a_t a_{t-k-1} + \theta a_{t-1} a_{t-k} + \theta^2 a_{t-1} a_{t-k-1})$$

Ambil k = 0 maka,

$$\sigma_z^2 = E(a_t a_t + \theta a_t a_{t-1} + \theta a_{t-1} a_t + \theta^2 a_{t-1} a_{t-1})$$

$$= (\sigma_a^2 + \theta.0 + \theta.0 + \theta^2 \sigma_a^2)$$

$$\sigma_z^2 = (1+\theta^2)\sigma_a^2 \tag{3.1.5}$$

3.1.2 Proses *Moving Average* Tingkat – q

Bentuk umum dari *moving average* tingkat q (MA(q)) adalah

$$Z_t = a_t + \theta_1 a_{t-1} + \ldots + \theta_q a_{t-q} \tag{3.1.6}$$

Dimana a_t adalah independen dan berdistribusi normal dengan *mean* 0 dan *varians* σ_a^2, dapat ditulis $a_t \sim N(0;\sigma_a^2)$. Dengan kata lain, a_t adalah proses *white noise*. Persamaan di atas dapat ditulis :

$$Z_t = (1+\theta_1 B + \theta_2 B^2 + \ldots + \theta_q B^q)a_t$$

$$Z_t = \theta(B)a_t \tag{3.1.7}$$

Dengan $\theta(B) = (1+\theta_1 B + \theta_2 B^2 + \ldots + \theta_q B^q)$ disebut sebagai operator *MA(q)*. Jika *q* berhingga, maka runtun waktu tersebut selalu stationer.

Persamaan (3.1.7) dapat juga ditulis dalam bentuk :

$$\theta(B)^{-1} Z_t = a_t \tag{3.1.8}$$

Persamaan 3.1.8 dapat dijabarkan sebagai berikut :

$$(1-\pi_1 B - \pi_2 B^2 - \pi_3 B^3 \ldots)Z_t = a_t$$

$$\pi(B)Z_t = a_t \tag{3.1.9}$$

Jika $\pi_1, \pi_{2,}..., \pi_n$ merupakan deret yang konvergen, maka proses MA(q) dapat dikatakan *invertibel*.

Proses MA *ekuivalen* dengan proses AR :

- MA(q) dengan model $Z_t = \theta(B)a_t$ *ekuivalen* dengan proses AR, $\pi(B)Z_t = a_t$ dengan orde (∞)
- AR(p) dengan model $\pi(B)Z_t = a_t$ akan *ekuivalen* dengan MA, $Z_t = \theta(B)a_t$ dengan orde (∞)

3.2 Metode Kemungkinan Maksimum

Metode kemungkinan maksimum adalah metode terbaik dalam menentukan penaksir titik pada sebuah parameter (Herrhyanto, 2003).

Misalkan *X* adalah peubah acak kontinu atau diskrit dengan fungsi kepadatan peluang *f(x;θ)* dengan θ adalah satu parameter yang tidak diketahui. Misalkan $X_1, X_2, ..., X_n$ merupakan sebuah sampel acak berukuran *n*. Maka fungsi kemungkinan dari sampel acak itu adalah :

$$L(X;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

Dengan log fungsi kemungkinan maksimumnya adalah :

$$l(X;\theta) = \log L(X;\theta)$$

(Herrhyanto, 2003)

3.3 Metode Kemungkinan Maksimum untuk MA

Tujuan dasar dari metode kemungkinan maksimum adalah untuk menentukan nilai parameter yang memaksimumkan fungsi kepadatan peluang dari data sampel, dengan syarat parameter yang akan diuji harus mempunyai suatu distribusi. Dalam hal ini, proses MA (q) diasumsikan berdistribusi Gauss.

Misalkan $\theta = (c, \theta_1, ..., \theta_q, \sigma^2)'$ merupakan vektor parameter populasi. Misalkan jumlah observasi T yaitu $(z_1, z_2, ..., z_T)$ maka, penaksir yang akan digunakan untuk menghitung fungsi kepadatan peluang adalah :

$$f_{z_T|z_{T-1},...,z_1}(z_T, z_{T-1}, ..., z_1; \theta) \tag{3.1.10}$$

Persamaan (3.1.10) dapat dipandang sebagai fungsi kepadatan peluang dari observasi yang diperoleh dari sampel. Perkalian dari masing-masing fungsi kepadatan peluang disebut fungsi kemungkinan dan dapat ditulis sebagai :

$$f_{z_T|z_{T-1},...,z_1}(z_T, z_{T-1}, ..., z_1; \theta) = f_{z_p|z_{p-1},z_{p-2},...,z_1}(z_p, z_{p-1}, ..., z_1; \theta)$$

$$\text{x} \prod_{t=p+1}^{T} f_{z_{T-1},z_{T-2},...,z_{t-p}}(z_T \,|\, z_{T-1}, z_{T-2}, ..., z_{t-p}; \theta) \tag{3.1.11}$$

Sedemikian sehingga Log kemungkinan maksimumnya adalah :

$$L(\theta) = \log f_{z_T|z_{T-1},...,z_1}(z_T, z_{T-1}, ..., z_1; \theta) \tag{3.1.12}$$

Penaksir kemungkinan maksimum dari θ adalah nilai dari $\hat{\theta}$ yang menyebabkan $L(\hat{\theta})$ maksimum.

Secara umum ada dua macam pendekatan dalam menaksir parameter dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum, yaitu penaksir kemungkinan maksimum eksak dan penaksir kemungkianan maksimum bersyarat. Pada penelitian ini, Penulis hanya membahas penaksir kemungkinan maksimum bersyarat untuk MA(q).

3.4 Metode Kemungkinan Maksimum Bersyarat Untuk MA (q)

Pada sub bab sebelumnya telah dibahas langkah-langkah dalam menggunakan metode kemungkinan maksimum untuk MA. Sedemikian sehingga, langkah awal dalam melakukan iterasi kemungkinan maksimum untuk MA ialah menentukan fungsi kepadatan peluang gabungan dari observasi *t* yang pertama.

Metode kemungkinan maksimum bersyarat untuk MA(q) merupakan perluasan dari metode kemungkinan maksimum bersyarat untuk MA(1). Maka dari itu, Penulis membahas metode kemungkinan maksimum bersyarat untuk MA(1) terlebih dahulu.

1.Metode Kemungkinan Maksimum Bersyarat untuk MA(1)

Proses MA(1) diasumsikan berdistribusi Gauss dengan $a_t \sim N(0;\sigma_a^2)$ dan $\theta = (c, \theta_1, \sigma^2)'$ adalah vektor parameter yang akan ditaksir, sedemikian sehingga berdasarkan persamaan (3.1.3) MA(1) adalah :

$Z_t = c + \theta Z_{t-1} + a_t$

Dari persamaan (3.1.4) dan (3.1.5) diketahui Z_1 adalah peubah acak yang memilki mean $\mu = \dfrac{c}{1+\theta}$ dan variansi $\sigma_z^2 = (1+\theta^2)\sigma^2$ dan misalkan Z_1 merupakan observasi pertama dari suatu sampel yang diambil maka, fungsi kepadatan peluang dari observasi pertama adalah :

$$f_{Z_1}(z_1;\theta) = f_{Z_1}(z_1; c, \theta_1, \sigma^2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(1+\theta^2)\sigma^2}} \exp\left[\frac{-\left\{z_1 - \left[c/(1-\theta)\right]\right\}^2}{2\sigma^2(1+\theta^2)}\right] \qquad (3.4.1)$$

Karena penaksir kemungkinan maksimum bertujuan untuk menentukan nilai parameter dengan memaksimumkan fungsi kepadatan peluang dari data suatu sampel maka, diperlukan beberapa fungsi kepadatan peluang dari observasi t yang pertama. Karena distribusi dari observasi kedua yaitu Z_2 dengan syarat $Z_1 = z_1$ telah diobservasi, maka berdasarkan persamaan (3.1.3) didapat :

$$Z_2 = c + \theta Z_1 + a_t \qquad (3.4.2)$$

Pada observasi kedua belum diketahui besaran mean dan variansi pada Z_2 maka, dengan menggunakan dekomposisi error prediksi, diambil permisalan $\mu = c + \theta Z_1$ dan $\sigma_{Z_2}^2 = \sigma^2$, yang didapat dari $a_2 \overset{i.i.d}{\sim} N(0;\sigma^2)$, maka Z_2 diasumsikan berdistribusi Gaussian, sedemikian sehingga $(Z_2 \mid Z_1 = z_1) \sim N(c + \theta Z_1; \sigma^2)$

Fungsi kepadatan peluang dari obsevasi kedua menjadi :

$$f_{Z_2|Z_1}(z_2|z_1;\theta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[\frac{-\{z_2-c-\theta z_1\}^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.4.3)$$

Iterasi ini terus berulang sampai fungsi kepadatan peluang pada observasi Z_{t-1}. Secara umum, fungsi kepadatan peluang dari observasi *t* akan bergantung pada observasi yang terdahulu *t-1*, sehingga terbentuk persamaan :

$$f_{Z_t|Z_{t-1},Z_{t-2},\ldots,Z_1}(z_t|z_{t-1},z_{t-2},\ldots,z_1;\theta)=f_{Z_t|Z_{t-1}}(z_t|z_{t-1};\theta)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[\frac{-\{z_t-c-\theta z_{t-1}\}^2}{2\sigma^2}\right] \quad (3.4.4)$$

Fungsi kepadatan peluang gabungan dari observasi *t* yang pertama adalah :

$$f_{Z_t,Z_{t-1},Z_{t-2},\ldots,Z_1}(z_t,z_{t-1},z_{t-2},\ldots,z_1;\theta)=f_{Z_t|Z_{t-1}}(z_t|z_{t-1};\theta)\,f_{Z_{t-1},Z_{t-2},\ldots,Z_1}(z_{t-1},z_{t-2},\ldots,z_1;\theta)$$

(3.4.5)

Maka, fungsi kemungkinannya :

$$f_{Z_t,Z_{t-1},Z_{t-2},\ldots,Z_1}(z_t,z_{t-1},z_{t-2},\ldots,z_1;\theta)=f_{Z_t}(z_t;\theta)\prod_{t=2}^{T}f_{Z_t|Z_{t-1}}(z_t|z_{t-1};\theta) \quad (3.4.6)$$

Sehingga log fungsi kemungkinan maksimumnya :

$$L(\theta)=\log\left(f_{Z_t|Z_{t-1},Z_{t-2},\ldots,Z_1}(z_t|z_{t-1},z_{t-2},\ldots,z_1;\theta)\right) \quad (3.4.7)$$

Untuk menentukan nilai dari log kemungkinan maksimum pada seluruh observasi *T* dari sampel melalui proses MA(1) yang berdistibusi Gauss maka, substitusikan persamaan (3.4.1) dan (3.4.4) ke dalam persamaan (3.4.7), sehingga diperoleh :

$$L(\theta) = -\frac{1}{2}\log\left(2\pi\right) - \frac{1}{2}\log\left(\sigma^2(1+\theta^2)\right)$$

$$-\left[\frac{-\left\{z_1 - \left[c/(1-\theta)\right]\right\}^2}{2\sigma^2(1+\theta^2)}\right] - \left[\frac{(T-1)}{2}\right]\log\left(2\pi\right)$$

$$-\left[\frac{(T-1)}{2}\right]\log\left(\sigma^2\right) - \sum_{t=2}^{T}\left[\frac{-\left\{z_t - c - \theta z_{t-1}\right\}^2}{2\sigma^2}\right] \qquad (3.4.8)$$

Prinsip kerja metode kemungkinan maksimum bersyarat untuk MA(1) adalah menganggap nilai z_1 sebagai deterministik dan memaksimumkan kemungkinan bersyarat pada observasi yang pertama dengan melakukan metode kuadrat terkecil pada persamaan regresi dari z_t. Sedemikian sehingga log kemungkinan maksimum bersyarat untuk MA(1) menjadi :

$$L(\theta) = \log\left(f_{Z_t|Z_{t-1},Z_{t-2},\ldots,Z_1}(z_t | z_{t-1}, z_{t-2}, \ldots, z_1; \theta)\right)$$

$$= -\left[\frac{(T-1)}{2}\right]\log\left(2\pi\right) - \left[\frac{(T-1)}{2}\right]\log\left(\sigma^2\right) - \sum_{t=2}^{T}\left[\frac{-\left\{z_t - c - \theta z_{t-1}\right\}^2}{2\sigma^2}\right]$$

(3.4.9)

Memaksimumkan persamaan (3.4.9) dengan melibatkan c dan θ adalah ekivalen dengan meminimumkan persamaan :

$$\sum_{t=2}^{T}\left(z_t - c - \theta z_{t-1}\right)^2 \qquad (3.4.10)$$

Melalui metode kuadrat terkecil pada persamaan regresi dari z_t, dengan cara menurunkan persamaan (3.4.10) terhadap c dan θ sehingga diperoleh penaksir kemungkinan maksimum bersyarat untuk parameter c dan θ:

$$\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T-1 & \sum z_{t-1} \\ \sum z_{t-1} & \sum z_{t-1}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum z_t \\ \sum z_{t-1} z_t \end{bmatrix}$$

Dimana $\sum$ menotasikan penjumlahan setelah $t = 2,3,...,T$

Sedangkan untuk nilai σ^2 pada penaksiran kemungkinan maksimum bersyarat MA(1) diperoleh dari kuadrat rata-rata residu dari persamaan regresi yang berdasarkan pada persamaan (3.4.9) yaitu :

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=2}^{T} \left[\frac{\left(z_t - \hat{c} - \hat{\theta} z_{t-1} \right)^2}{T-1} \right]$$

2.Metode Kemungkinan Maksimum Bersyarat untuk MA(q)

Secara umum, metode kemungkinan maksimum bersyarat untuk MA(q) merupakan perluasan dari iterasi penaksir kemungkinan maksimum bersyarat untuk MA(1) maka, untuk proses MA(q) diasumsikan berdistribusi Gauss dengan $a_t \sim N(0;\sigma_a^2)$ dan $\theta = (c, \theta_1, ..., \theta_q, \sigma^2)'$ adalah vektor parameter yang akan ditaksir, jadi persamaan yang dibentuk adalah :

$$Z_t = c + \theta Z_{t-1} + \theta_2 Z_{t-2} + ... + \theta_q Z_{t-q} + a_t$$

Berdasarkan persamaan (3.4.5) maka, diperoleh fungsi kepadatan peluang gabungan dari observasi *q* yang pertama, sehingga diperoleh :

$$f_{Z_t,Z_{t-1},Z_{t-2},\ldots,Z_1}(z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, \ldots, z_1;\theta)$$

$$= f_{Z_t|Z_{t-1},Z_{t-2},\ldots,Z_{t-q}}(z_t|z_{t-1};\theta)\, f_{Z_{t-1},Z_{t-2},\ldots,Z_1}(z_{t-1}, z_{t-2}, \ldots, z_{t-q};\theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left[\frac{-\left(z_t - c - \theta z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2} - \ldots - \theta_q z_{t-q}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Dengan $t > q$

Fungsi kemungkinannya diperoleh :

$$f_{z_T|z_{T-1},\ldots,z_1}(z_T, z_{T-1}, \ldots, z_1;\theta) = f_{z_p|z_{p-1},z_{p-2},\ldots,z_1}(z_p, z_{p-1}, \ldots, z_1;\theta)$$

$$\text{x} \prod_{t=p+1}^{T} f_{z_{T-1},z_{T-2},\ldots,z_{t-p}}(z_T|z_{T-1}, z_{T-2}, \ldots, z_{t-p};\theta)$$

Sehingga log kemungkinan maksimum bersyarat untuk MA(q) pada observasi *q* yang pertama adalah :

$$\log f_{z_T|z_{T-1},\ldots,z_1}(z_T, z_{T-1}, \ldots, z_1;\theta) = f_{z_p|z_{p-1},z_{p-2},\ldots,z_1}(z_p, z_{p-1}, \ldots, z_1;\theta)$$

$$= \left[\frac{(T-q)}{2}\right]\log(2\pi) - \left[\frac{(T-q)}{2}\right]\log\left(\sigma^2\right)$$

$$= -\sum_{t=q+1}^{T}\left[\frac{-\left(z_t - c - \theta z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2} - \ldots - \theta_q z_{t-q}\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

(3.4.11)

Memaksimumkan persamaan (3.4.11) dengan melibatkan nilai dari $c, \theta_1, ..., \theta_q, \sigma^2$ adalah ekivalen dengan meminimumkan persamaan :

$$\sum_{t+q+1}^{T} \left(z_t - c - \theta z_{t-1} - \theta_2 z_{t-2} - ... - \theta_q z_{t-q} \right)^2 \qquad (3.4.12)$$

Jadi, melalui metode kuadrat terkecil pada persamaan regresi dari z_t , dengan cara menurunkan persamaan (3.4.12) terhadap $c, \theta_1, ..., \theta_q, \sigma^2$ sehingga diperoleh penaksir kemungkinan maksimum bersyarat untuk parameter $c, \theta_1, ..., \theta_q, \sigma^2$:

$$\begin{bmatrix} \hat{c} \\ \hat{\theta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_q \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (T-q) & \sum z_t z_{t-1} \cdots & \sum z_t z_{t-q} \\ \sum z_{t-1} & \sum z_{t-1}^2 \cdots & \sum z_{t-1} z_{t-q} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum z_{t-q} & \sum z_{t-1} z_{t-q} \cdots & \sum z_{t-q}^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum z_t \\ \sum z_t z_{t-1} \\ \vdots \\ \sum z_t z_{t-q} \end{bmatrix}$$

Sedangkan untuk nilai σ^2 pada penaksiran kemungkinan maksimum bersyarat MA(q) diperoleh dari kuadrat rata-rata residu dari persamaan regresi yang berdasarkan pada persamaan (3.4.11) yaitu :

$$\hat{\sigma}^2 = \sum_{t=q+1}^{T} \left[\frac{\left(z_t - \hat{c} - \hat{\theta} z_{t-1} - \hat{\theta}_2 z_{t-2} - ... - \hat{\theta}_q z_{t-q} \right)^2}{T-q} \right]$$