BAB III

FUNGSI KONVEKS BERNILAI REAL

3.1 Fungsi Konveks

Pengertian *fungsi konveks* dimulai dalam konteks *fungsi real* satu *variabel*. Selanjutnya *fungsi konveks* $f : I \to \mathbb{R}$ didefinisikan pada beberapa *interval garis real* $\mathbb{R}$.

Definisi 3.1.1 :

Fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ *disebut konveks jika*

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda) f(y)$$

untuk semua $x, y \in I$, λ *dalam interval terbuka (0,1).*

Untuk λ *dalam Interval tertutup [0,1] disebut konveks kuat dengan syarat* $x \neq y$.

((Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 2)

Contoh *Fungsi konveks* dan *konveks kuat*

1. Buktikan $h(x) = |x|$ pada $(-\infty, \infty)$ adalah *konveks.*

Jawab :

Misalkan, $I \subset (-\infty,\infty), x, y \in I$, dan $\lambda \in (0,1)$.

Akan dibuktikan,

$$h(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$$

Perhatikan bahwa,

$$h(\lambda x+(1-\lambda)y)=|\lambda x+(1-\lambda)y| \ ,$$

$$\le |\lambda x|+|(1-\lambda)y| \quad \text{(Ketaksamaan segitiga)}$$

$$=|\lambda||x|+|1-\lambda||y|$$

$$=|\lambda|\,h(x)+|1-\lambda|\,h(y)$$

$$=\lambda h(x)+(1-\lambda)h(y)$$

Dengan demikian terbukti untuk semua $x, y\in I$, dan $\lambda\in(0,1)$ merupakan fungsi konveks.

2 . Buktikan $g(x)=\sin x$ pada $[-\pi,0]$, adalah *konveks kuat.*

Jawab :

Misalkan,

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)=\sin(\lambda x+(1-\lambda)y)$$

$$=\sin\lambda x\cos(1-\lambda)y+\cos\lambda x\sin(1-\lambda)y$$

Akan dibuktikan,

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$$

Perhatikan bahwa,

Jika $\lambda = 0$ maka $g\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) = \sin y$

$$= \lambda \sin x + (1-\lambda)\sin y$$

$$= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

Jika $\lambda = 1$ maka $g\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) = \sin x$

$$= \lambda \sin x + (1-\lambda)\sin y$$

$$= \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

Jika $\lambda \in (0,1)$ maka $g\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) = \sin\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right)$

$$= \sin \lambda x . \cos(1-\lambda)y + \cos \lambda x . \sin(1-\lambda)y$$

$$< \lambda \sin x . (1-\lambda)\cos y + \cos \lambda x . (1-\lambda)\sin y$$

$$< \lambda \sin x + (1-\lambda)\sin y$$

$$< \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

Dengan demikian terbukti untuk semua $x, y \in I$, dan $\lambda \in [0,1]$ dengan syarat $x \neq y$ merupakan fungsi konveks kuat.

3.1 Kekontinuan dan Kediferensialan

Sebuah fungsi konveks dan terbatas pada *interval* tertutup $[a,b]$ adalah terbatas di atas oleh $M = \max\{f(a), f(b)\}$ untuk sembarang $z = \lambda a + (1-\lambda)b$, dalam *interval* $[a,b]$.

Perhatikan bahwa ;

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\lambda a + (1-\lambda)b) \\ &\leq \lambda f(a) + (1-\lambda)(b) \\ &\leq \lambda M + (1-\lambda)M \\ &\leq \lambda M + M - \lambda M \\ &\leq M \end{aligned}$$

Hal ini juga terbatas di bawah dengan menulis sebarang titik dalam bentuk $\frac{(a+b)}{2} + t$, maka ;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{4} + 2t + \frac{a+b}{4} - 2t\right)$$

$$\leq f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+t\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right)$$

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) + f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) + f\left(\frac{a+b}{2}-t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)$$

dengan menggunakan batas atas

$$-f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\geq -M$$

diperoleh,

$$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)-M=m$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)\geq m$$

dengan demikian fungsi ini terbatas. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 3-4)*

Teorema 3.1.2 :

Jika $f:I\rightarrow R$ adalah konveks, maka f memenuhi kondisi Lipschitz pada setiap interval tertutup $[a,b]$ yang terdapat pada interior I^0 pada I . Akibatnya, f adalah kontinu mutlak pada $[a,b]$ dan kontinu pada I .

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 4)

Bukti :

Misalkan f terbatas, pilih sembarang $\varepsilon>0$ sedemikian sehingga $[a-\varepsilon,b-\varepsilon]\in I$ dengan m dan M sebagai batas bawah dan batas.

Akan ditunjukan ada $K>0$ sedemikian sehingga $|f(y)-f(x)|\leq K|y-x|$ untuk semua $x,y\in[a,b]$.

Misalkan,

$$z = y + \frac{\varepsilon}{|y-x|}(y-x), \quad \lambda = \frac{|y-x|}{\varepsilon + |y-x|},$$

untuk semua $x, y \in [a,b]$, dengan $x \neq y$.

$$z = \frac{\varepsilon(y-x)}{|y-x|} + y$$

$$z - y = \frac{\varepsilon(y-x)}{|y-x|}$$

$$(z-y)|y-x| = \varepsilon(y-x)$$

$$z|y-x| - y|y-x| = \varepsilon y - \varepsilon x$$

$$z|y-x| + \varepsilon x = \varepsilon y + y|y-x|$$

$$z|y-x| + \varepsilon x = y(\varepsilon + |y-x|)$$

$$\frac{z|y-x| + \varepsilon x}{\varepsilon + |y-x|} = y$$

$$\frac{z|y-x| + \varepsilon x + x|y-x| - x|y-x|}{\varepsilon + |y-x|} = y$$

$$\frac{z|y-x|}{\varepsilon + |y-x|} + \frac{\varepsilon x + x|y-x|}{\varepsilon + |y-x|} - \frac{x|y-x|}{\varepsilon + |y-x|} = y$$

$$\frac{z|y-x|}{\varepsilon + |y-x|} + \frac{x(\varepsilon + |y-x|)}{\varepsilon + |y-x|} - \frac{x|y-x|}{\varepsilon + |y-x|} = y$$

$$\frac{z|y-x|}{\varepsilon+|y-x|}+x-\frac{x|y-x|}{\varepsilon+|y-x|}=y$$

$$\lambda z+(1-\lambda)x=y$$

sehingga,

untuk $z\in[a-\varepsilon,b+\varepsilon], y=\lambda z+(1-\lambda)x$

diperoleh,

$$\begin{aligned} f(y) &= f\left(\lambda z+(1-\lambda)x\right) \\ &\le \lambda f(z)+(1-\lambda)f(x) \\ &\le \lambda f(z)+f(x)-\lambda f(x) \\ &\le \lambda\left(f(z)-f(x)\right)+f(x) \end{aligned}$$

kemudian,

$$f(y)\le\lambda\left(f(z)-f(x)\right)+f(x)$$

$$f(y)-f(x)\le\lambda\left(f(z)-f(x)\right)+f(x)-f(x)$$

$$f(y)-f(x)\le\lambda\left(f(z)-f(x)\right)$$

$$f(y)-f(x)\le\lambda(M-m)$$

$$f(y)-f(x)<\frac{|y-x|}{\varepsilon}(M-m)$$

$$=K|y-x|$$

untuk semua $x, y \in [a,b]$ dengan $K = (M - m)/\varepsilon$.

Berdasarkan Teorema 2.1.18 dapat disimpulkan f memenuhi kondisi *Lipschitz.*

Selanjutnya, jika $f:[a,b] \to R$ memenuhi kondisi *Lipschitz* pada *interval* $[a,b]$ berdasarkan Teorema 2.1.24 terbukti bahwa f *fungsi kontinu mutlak* pada *interval* $[a,b]$. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 4-5)*

Sebelum berlanjut pada pembahasan selanjutnya yaitu mengenai turunan dari fungsi konveks ditentukan oleh turunan kiri dan turunan kanan,

Didefinisikan terlebih dahulu :

$$f_-^{'}(x) = \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

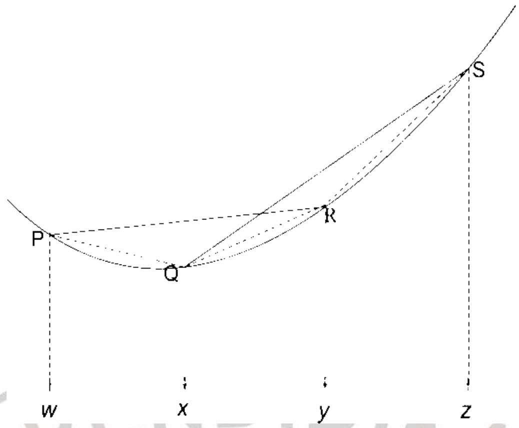
$$f_+^{'}(x) = \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Teorema 3.1.3

Jika $f : I \to R$ adalah konveks (konveks kuat), maka $f_-^{'}(x)$ dan $f_+^{'}(x)$ ada dan naik (naik kuat) pada I^0. (Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 5)

Bukti :

Misalkan empat poin w, x, y ,dan z terdapat di I^0, dengan ketentuan $w < x < y < z$, dengan P, Q, R, S adalah titik – titik yang sesuai dengan grafik dari gambar g.1.



(Gambar g.1)

kemiringan PQ ≤ kemiringan PR ≤ kemiringan QR ≤ kemiringan QS ≤ kemiringan RS ... (1)

Perhatikan kemiringan PR ≤ kemiringan QR, hal ini jelas bahwa kemiringan QR meningkat untuk $x \uparrow y$ dan juga kemiringan RS menurun untuk $z \downarrow y$.

Pada sisi kiri didefinisikan ;

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

Meningkat untuk $x \uparrow y$ dan sisi kanannya menurun $z \downarrow y$.

Fakta – fakta menjamin bahwa $f_{-}^{'}(y)$ dan $f_{+}^{'}(y)$ ada dan memenuhi :

$$\lim_{x \uparrow y} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \leq \lim_{z \downarrow y} \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

$$f_-^{'}(y) \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le \frac{f(z)-f(y)}{z-y} \le f_+^{'}(y)$$

$$f_-^{'}(y) \le \ f_+^{'}(y) \qquad \ldots (2)$$

Sebuah hasil yang berlaku untuk semua $y \in I^0$. Selain itu, dengan menggunakan persamaan (1) ,

dapat dilihat bahwa ;

$$\frac{f(x)-f(w)}{x-w} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\lim_{x \downarrow w} \frac{f(x)-f(w)}{x-w} \le \frac{f(x)-f(w)}{x-w} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$f_+^{'}(w) \le \frac{f(x)-f(w)}{x-w} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le f_-^{'}(y)$$

$$f_+^{'}(w) \le f_-^{'}(y)$$

Dengan pertidaksamaan yang kuat fungsi yang berlaku adalah *konveks* kuat. Hasil ini dikombinasikan dengan hasil dari persamaan (2).

Sehingga diperoleh,

$$\frac{f(x)-f(w)}{x-w} \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

$$\lim_{x \downarrow w} \frac{f(x)-f(w)}{x-w} \le \frac{f(w)-f(x)}{w-x} \le \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\lim_{x \downarrow w} \frac{f(x)-f(w)}{x-w} \le \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$\lim_{x \uparrow w} \frac{f(x)-f(w)}{x-w} \le \lim_{x \downarrow w} \frac{f(x)-f(w)}{x-w} \le \lim_{y \uparrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \le \lim_{y \downarrow x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

$$f_-^{'}(w) \le f_+^{'}(w) \le f_-^{'}(y) \le f_+^{'}(y)$$

Jadi terbukti dengan menetapkan dari sifat dasar kemonotonan $f_-^{'}$ dan $f_+^{'}$ ada dan naik. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 5-6)*

3.2 Karakteristik Fungsi konveks

Pada pembahasan selanjutnya akan dibahas beberapa karakteristik yang dimiliki fungsi konveks.

Teorema 3.2.1

Fungsi $f:(a,b)\rightarrow \mathbb{R}$ *adalah konveks (konveks kuat) jika dan hanya jika ada fungsi* $g:(a,b)\rightarrow \mathbb{R}$ *naik (naik kuat) dan terdapat sebuah titik* $c\in(a,b)$ *sedemikian sehingga bahwa untuk semua* $x\in(a,b)$

$$f(x)-f(c)=\int_c^x g(t)dt$$

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 9-10)

Bukti :

Kasus I :

Misalkan fungsi *f* adalah fungsi *konveks (konveks kuat).*

Akan ditunjukan $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ naik (naik kuat) dan terdapat terdapat titik $c\in(a,b)$ sedemikian sehingga untuk semua $x\in(a,b)$,

$$f(x)-f(c)=\int_c^x g(t)dl$$

Berdasarkan Teorema 3.1.3, jika *fungsi f* adalah *konveks* (*konveks kuat*) maka $f_+^{'}$ ada dan naik (naik kuat).

Selanjutnya, misalkan $g=f_+^{'}$, kemudian ambil sebarang $c\in(a,b)$ dan *fungsi f konveks*, dengan menggunakan Teorema 3.1.2, didapat *f* adalah kontinu mutlak pada $[c,x]$. Karena f kontinu, berarti f terintegralkan sehingga, menurut Teorema 2.2.11 ;

$$\int_c^x f_+^{'}(t)dt=\int_c^x g(t)dt=f(t)\Big|_c^x=f(x)-f(c)$$

Dengan demikian terbukti bahwa fungsi $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ naik (naik kuat) dan terdapat sebuah titik $c\in(a,b)$ sedemikian sehingga,

$$f(x)-f(c)=\int_c^x g(t)dt\ ,$$

untuk semua $x\in(a,b)$.

Kasus II :

Diketahui fungsi $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ naik (naik kuat) dan terdapat sebuah titik $c\in(a,b)$ sedemikian sehingga,

$$f(x)-f(c)=\int_c^x g(t)dt$$

untuk semua $x\in(a,b)$.

Selanjutnya misalkan $x,y\in(a,b)$, x < y, dan $\alpha,\beta>0$ dengan $\alpha+\beta=1$. Akan ditunjukan fungsi f *konveks.*

Perhatikan bahwa ;

$$\alpha f(x)+\beta f(y)-(\alpha+\beta)f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)-\alpha f(\alpha x+\beta y)-\beta f(\alpha x+\beta y)$$

$$=\beta f(y)-\beta f(\alpha x+\beta y)+\alpha f(x)-\alpha f(\alpha x+\beta y)$$

$$=\beta f(y)-\beta f(\alpha x+\beta y)-(\alpha f(\alpha x+\beta y)-\alpha f(x))$$

$$=\beta(f(y)-f(\alpha x+\beta y))-(\alpha(f(\alpha x+\beta y)-f(x)))$$

$$=\beta\int_{\alpha x+\beta y}^{y} f_+^{'}(t)dt-\alpha\int_{x}^{\alpha x+\beta y} f_+^{'}(t)dt$$

$$=\beta\int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(t)dt-\alpha\int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(t)dt.$$

Misalkan, $\int g(t)dt=g(\alpha x+\beta y)$ diperoleh,

$$\beta g(\alpha x+\beta y)\left[y-(\alpha x+\beta y)\right]-\alpha g(\alpha x+\beta y)\left[\alpha x+\beta y-x\right]=$$

$$= g(\alpha x+\beta y)\{\beta y-\beta(\alpha x+\beta y)-\alpha(\alpha x+\beta y)+\alpha x\}$$

$$= g(\alpha x+\beta y)\{(\beta y+\alpha x)-\beta(\alpha x+\beta y)-\alpha(\alpha x+\beta y)\}$$

$$= g(\alpha x+\beta y)\{(\beta y+\alpha x)\{1-\beta-\alpha\}\}$$

$$= g(\alpha x+\beta y)\{(\beta y+\alpha x)\{1-(\beta+\alpha)\}\}, (\beta+\alpha)=1$$

$$= g(\alpha x+\beta y)\{(\beta y+\alpha x)\{1-1\}\}$$

$$= g(\alpha x+\beta y)\{(\beta y+\alpha x)\{0\}\}$$

$$= 0$$

Kemudian untuk $x < y$, karena g naik berarti $g(y)-g(x)>0$, sehingga

$$\beta\int_{\alpha x+\beta y}^{y} g(t)dt-\alpha\int_{x}^{\alpha x+\beta y} g(t)dt>0$$

akibatnya ,

$$\alpha f(x)+\beta f(y)-f(\alpha x+\beta y)\geq 0$$

$$f(\alpha x+\beta y)\leq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

untuk semua $x, y\in(a,b)$ dan $\alpha,\beta>0$, terbukti bahwa fungsi f adalah konveks.

Berdasarkan uraian kasus I dan kasus II, terbukti bahwa fungsi $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ adalah konveks (konveks kuat) jika dan hanya jika fungsi $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ naik (naik kuat) dan terdapat sebuah titik $c\in(a,b)$ sedemikian sehingga,

$$f(x)-f(c)=\int_c^x g(t)dt,$$

untuk semua $x, y \in (a,b)$.

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 10)

Teorema 3.2.2

Fungsi f adalah fungsi yang mempunyai turunan pada (a,b). Fungsi f adalah konveks (konveks kuat) jka dan hanya jika f' naik (naik kuat).

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 10).

Bukti :

Diketahui f' ada.

Kasus I :

Misalkan $f' = g$ naik (naik kuat). Akan ditunjukan fungsi f *konveks* (*konveks kuat*).

Karena f' ada menurut teorema Fundamental kalkulus bagian I, terdapat $c \in (a,b)$ sedemikian sehingga,

$$f(x)-f(c)=\int_c^x f'(t)dt=\int_c^x g(t)dt$$

untuk semua $x \in (a,b)$.

Dengan demikian berdasarkan Teorema 3.2.1 jelas fungsi f adalah k*onveks* (k*onveks kuat*).

Kasus II :

Misalkan f *konveks* (*konveks kuat*), akan ditunjukan $f^{'}$ naik (naik kuat). Dengan demikian berdasarkan Teorema 3.2.1 jelas fungsi $f^{'} = g$ naik (naik kuat).

Berdasarkan uraian kasus I dan kasus II, terbukti bahwa fungsi f adalah konveks (konveks kuat) jka dan hanya jika $f^{'}$ naik (naik kuat), jika $f^{'}$ ada.

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 11)

Teorema 3.2.3

Misalkan $f^{''}$ *ada pada* (a,b). *Fungsi* f *adalah konveks jika dan hanya jika* $f^{''}(x) \geq 0$. *Selanjutnya jika* $f^{''}(x) > 0$ *pada (a,b), maka f adalah konveks kuat pada Interval* (a,b). *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 11)*

Bukti :

Diketahui $f^{''}$ ada, maka $f^{'}$ juga ada. Menurut teorema 3.2.2 f adalah *konveks* (*konveks kuat*) jka dan hanya jika $f^{'}$ naik (naik kuat). Akibatnya $f^{''} \geq 0$ ada untuk $f^{'}$ yang naik dan $f^{''} > 0$ ada untuk $f^{'}$ yang naik kuat.

Dengan kata lain f *konveks* jika dan hanya jika $f'' \geq 0$, dan f *konveks kuat* jika dan hanya jika $f'' > 0$. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 11)*

Sebelum berlanjut pada pembahasan selanjutnya, didefinisikan *line of support* :

Sebuah fungsi f terdefinisi pada I adalah support pada $x_0 \in I$ *jika ada sebuah fungsi affine* $A(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$ *sedemikian sehingga* $A(x) \leq f(x)$ *untuk setiap* $x \in I$. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 12)*

Teorema 3.2.4

Fungsi $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ *adalah konveks jika dan hanya jika terdapat line of support untuk f pada sebarang* $x_0 \in (a,b)$.

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 12)

Bukti :

Kasus I :

Misalkan fungsi f adalah *konveks* dan ada sebarang $x_0 \in (a,b)$.

Akan ditunjukan terdapat *line of support* untuk fungsi f pada sebarang $x_0 \in (a,b)$.

Berdasarkan Teorema 3.2.2 terdapat f' naik, kemudian pilih $m \in \left[f'_-(x_0), f'_+(x_0) \right]$

untuk $x > x_0$, diperoleh,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq m$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq m$$

untuk $x < x_0$, diperoleh,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq m$$

Dalam kasus ini dipilih $x > x_0$ diperoleh,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq m$$

$$f(x)-f(x_0) \geq m(x-x_0)$$

$$f(x) \geq f(x_0)+m(x-x_0)$$

Dengang demikian diperoleh *line of support* $f(x) \geq f(x_0)+m(x-x_0)$.

Kasus II :

Misalkan f memiliki *line of support*, yaitu $A(x) = f(x_0)+m(x-x_0)$, dengan $x_0 = \lambda x+(1-\lambda)y$.

Perhatikan bahwa,

$$
\begin{aligned}
f(\lambda x+(1-\lambda)y) = f(x_0) = A(x_0) \\
&= A(\lambda x+(1-\lambda)y) \\
&= \lambda A(x)+(1-\lambda)A(y) \\
&= \lambda f(x_0)+m(x-x_0)+(1-\lambda)(f(y_0)+m(x-x_0)) \\
&\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)
\end{aligned}
$$

untuk semua $x_0, x, y \in (a,b)$ dan $\lambda \in [0,1]$, dengan demikian *f* adalah *konveks.*

Berdasarkan uraian kasus I dan kasus II, terbukti fungsi f adalah konveks jika dan hanya jika terdapat *line of support* untuk f pada sebarang $x_0 \in (a,b)$.

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 :12)

3.3 Operasi Fungsional

Bagian sebelumnya telah dibahas beberapa karakteristik dari fungsi konveks, selanjutnya akan dibahas mengenai operasi yang berlaku pada fungsi konveks yang disajikan dalam beberapa teorema berikut.

Teorema 3.3.1

Jika fungsi $f: I \to R$ *dan fungsi* $g: I \to R$ *keduanya adalah konveks dan* $\alpha \ge 0$, *maka fungsi* $f+g$ *dan* αf *adalah konveks pada* I .

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 15)

Bukti :

Misalkan fungsi f dan g dengan fungsi $f(x) = f(\lambda x + (1-\lambda)y)$ dan fungsi $g(x) = g(\lambda x + (1-\lambda)y)$ keduanya adalah konveks dengan $x, y \in I$ dan $\alpha \geq 0$.

Akan dibuktikan $f + g$ dan αf adalah *konveks* pada interval I .

Karena f dan g *konveks*,

maka :

$$(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

$$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) + \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)$$

$$= \lambda f(x) + \lambda g(x) + (1-\lambda)f(y) + (1-\lambda)g(y)$$

$$= \lambda(f(x) + g(x)) + (1-\lambda)(f(y) + g(y))$$

$$= \lambda((f+g)(x)) + (1-\lambda)((f+g)(y))$$

kemudian,

$$\alpha f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \alpha(f(\lambda x + (1-\lambda)y))$$

$$\leq \alpha(\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$$

$$= \alpha\lambda f(x) + \alpha(1-\lambda)f(y)$$

$$= \lambda\alpha f(x) + (1-\lambda)\alpha f(y)$$

$$= \lambda(\alpha f(x)) + (1-\lambda)(\alpha f(y))$$

Dengan demikian terbukti $f+g$ dan αf adalah *konveks* pada I .

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 16)

Teorema 3.3.2

Misalkan fungsi $f : I \to R$ *dan* $g : J \to R$ *dimana* $R_f \subseteq J$ *. Jika f dan g keduanya adalah konveks dan g naik, maka fungsi komposit* $g \circ f$ *konveks di* I *.*

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 16)

Bukti :

Misalkan $f(x) = f(\lambda x + (1-\lambda) y)$ *konveks* dan $g(z)$, $z \in R_f$ *konveks* dimana $R_f \subseteq J$. Akan ditunjukan fungsi *komposit* $g \circ f$ *konveks* di I .

Perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned} g[f(\lambda x + (1-\lambda) y)] &\le g[\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)] \\ &= g[\lambda f(x)] + g[(1-\lambda) f(y)] \\ &\le \lambda g[f(x)] + (1-\lambda) g[f(y)] \end{aligned}$$

Dengan demikian $g \circ f$ *konveks* di I . *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 16)*

Teorema 3.3.3

Jika fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ *dan* $g : I \to \mathbb{R}$ *keduanya nonnegative, turun/naik dan konveks, maka* $h(x) = f(x)g(x)$ *nonnegative, turun/naik dan konveks. (Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 16)*

Bukti :

Diketahui f dan g keduanya nonnegative.

Kasus I :

Jika f dan g keduanya turun dan *konveks.*

Akan ditunjukan $h(x) = f(x)g(x)$ nonnegative, turun dan *konveks.*

Pertama, akan ditunjukan $h(x) = f(x)g(x)$ nonnegative.

Karena f dan g nonnegative berarti,

$$f(x) \geq 0 \quad \text{dan} \quad g(x) \geq 0, \qquad \text{untuk setiap } x \in I.$$

Sehingga diperoleh $h(x) = f(x)g(x)$ nonnegative untuk setiap $x \in I$.

Kedua, misalkan $x, y \in I$ sembarang dengan $x < y$.

Akan ditunjukan $h(x) = f(x)g(x)$ turun.

Diketahui f dan g turun pada I berarti $f(x) > f(y)$ dan $g(x) > g(y)$.

Perhatikan bahwa,

$$h(x) = f(x)g(x) > f(y)g(x) > f(y)g(y) = h(y)$$

untuk semua $x, y \in I$ dengan $x < y$, terbukti $h(x) = f(x)g(x)$ turun.

Kemudian di sisi lain diperoleh,

$$[f(x)-f(y)][g(y)-g(x)]\le 0$$

$$f(x)g(y)-f(x)g(x)-f(y)g(y)+f(y)g(x)\le 0$$

$$f(x)g(y)+f(y)g(x)-f(x)g(x)-f(y)g(y)\le 0$$

yang berarti bahwa,

$$f(x)g(y)+f(y)g(x)\le f(x)g(x)+f(y)g(y)$$

Selanjutnya akan ditunjukan $h(x)=f(x)g(x)$ adalah *konveks*.

Misalkan $h(x)=h(\alpha x+\beta y)$ dengan $\alpha>0, \beta>0$, dan $\alpha+\beta=1$.

Perhatikan bahwa,

$$f(\alpha x+\beta y)g(\alpha x+\beta y)\le[\alpha f(x)+\beta f(y)][\alpha g(x)+\beta g(y)]$$

$$=\alpha^2 f(x)g(x)+\alpha\beta[f(x)g(y)+f(y)g(x)]+\beta^2 f(y)g(y)$$

$$\le\alpha^2 f(x)g(x)+\alpha\beta[f(x)g(x)+f(y)g(y)]+\beta^2 f(y)g(y)$$

$$=\alpha^2 f(x)g(x)+\alpha\beta(f(x)g(x))+\alpha\beta(f(y)g(y))+\beta^2 f(y)g(y)$$

$$=(\alpha^2+\alpha\beta)(f(x)g(x))+(\beta^2+\alpha\beta)(f(y)g(y))$$

$$=(\alpha(\alpha+\beta))f(x)g(x)+(\beta(\alpha+\beta))f(y)g(y)$$

$$=\alpha(f(x)g(x))+\beta(f(y)g(y))$$

Dengan demikian diperoleh $h(x) = h(\alpha x + \beta y) \leq \alpha h(x) + \beta h(y)$, terbukti bahwa $h(x) = f(x)g(x)$ *konveks.*

Kasus II :

Jika f dan g keduanya naik dan *konveks.* Akan ditunjukan $h(x) = f(x)g(x)$ nonnegative, naik dan *konveks.*

Pada kasus I telah dibuktikan untuk $h(x) = f(x)g(x)$ nonnegative dan konveks.

Selanjutnya, misalkan $x, y \in I$ sembarang dengan $x < y$. Akan ditunjukan $h(x) = f(x)g(x)$ naik.

Diketahui f dan g turun pada I berarti $f(x) < f(y)$ dan $g(x) < g(y)$.

Perhatikan bahwa,

$h(x) = f(x)g(x) < f(y)g(x) < f(y)g(y) = h(y)$

untuk semua $x, y \in I$ dengan $x < y$, terbukti $h(x) = f(x)g(x)$ naik.

Berdasarkan uraian dari kasus I dan kasus II, terbukti bahwa $h(x) = f(x)g(x)$ non negative, turun/naik dan *konveks.*

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 16)

Teorema 3.3.4

Misalkan $f_\alpha : I \to \mathbb{R}$ *sembarang keluarga dari fungsi konveks dan misalkan* $f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$ *. Jika* $J = \{x \in I : f(x) < \infty\}$ *tidak kosong maka* J *adalah interval dan* f *konveks di* J *. (Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 16)*

Bukti :

Kasus I :

Diketahui $J \subseteq \mathbb{R}$, $x, y \in J$, dan $J = \{x \in I : f(x) < \infty\}$, akan ditunjukan J adalah sebuah interval.

Misalkan $x < y$ diperoleh $(x, y) \subseteq J$, menurut Teorema 2.1.9 *J adalah Interval.*

Kasus II :

Diketahui $f_\alpha : I \to R$ sembarang keluarga dari fungsi konveks dan $f(x) = \sup_\alpha f_\alpha(x)$, untuk $x, y \in J$. Akan ditunjukan f konveks.

Misalkan $f(x) = f(\lambda x + (1-\lambda)y)$,

sedemikian sehingga ;

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \sup_\alpha f_\alpha(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\le \sup_\alpha [\lambda f_\alpha(x) + (1-\lambda) f_\alpha(y)] \\
&\le \sup_\alpha [\lambda f_\alpha(x)] + \sup_\alpha [(1-\lambda) f_\alpha(y)] \\
&= \lambda \sup_\alpha f_\alpha(x) + (1-\lambda) \sup_\alpha f_\alpha(y) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)
\end{aligned}$$

Terbukti fungsi f konveks di *J.*

Berdasarkan uraian dari kasus I dan kasus II, terbukti bahwa J *adalah interval dan* fungsi f *konveks di* J *. (Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 16-17)*

Teorema 3.3.5

Jika $f_n : I \to \mathbb{R}$ *merupakan barisan fungsi konveks yang konvergen ke fungsi limit terbatas* f *pada* I *, maka* f *konveks. Selain itu barisan fungsi* f_n *konvergen seragam pada subinterval tertutup dari* $I^0 \subset I$ *.*

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 17)

Bukti :

Diketahui $f_n : I \to \mathbb{R}$ merupakan barisan fungsi konveks yang konvergen ke fungsi limit terbatas f pada I .

Kasus I :

Akan ditunjukan *f konveks.*

Misalkan $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), x, y \in I,$

Perhatikan bahwa ;

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\le \lim_{n\to\infty}(\lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y)) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\lambda f_n(x)) + \lim_{n\to\infty}((1-\lambda) f_n(y)) \\ &= \lambda \lim_{n\to\infty} f_n(x) + (1-\lambda)\lim_{n\to\infty} f_n(y) \end{aligned}$$

$$= \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Dengan demikian f adalah konveks.

Kasus II :

Misalkan $a < c < b$ tiga titik sembarang pada I^0 dan $\alpha = \sup f_n(a)$, $\beta = \sup f_n(b)$, $\gamma = \inf\ f_n(c)$.

Akan ditunjukan barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen seragam pada subinterval tertutup dari $I^0 \subset I$.

Pertama – tama harus ditunjukan bahwa $\{f_n\}$ merupakan barisan fungsi terbatas.

Selanjutnya misalkan L_1, L_2, L_3 adalah fungsi yang memenuhi persamaan $L_1(a) = \alpha$, $L_1(b) = \beta$, $L_2(c) = \gamma$, $L_2(b) = \beta$, $L_3(a) = \alpha$, $L_3(c) = \gamma$.

Jika $x = \lambda a + (1-\lambda)b$ adalah sebarang titik dalam $[a,b]$, maka untuk sebarang $n \in N$.

Diperoleh ;

$$f_n(x) = f_n[\lambda a + (1-\lambda)b]$$

$$\leq \lambda f_n(a) + (1-\lambda) f_n(b)$$

$$\leq \lambda L_1(a) + (1-\lambda) L_1(b)$$

$$= L_1[\lambda a + (1-\lambda)b]$$

$$= L_1(x)$$

sehingga diperoleh, $f_n \le L_1(x)$ untuk setiap $n \in N$.

Disisi lain, jika x adalah sembarang titik dari $[a,c]$, dapat ditulis ;

$$c = \lambda x + (1-\lambda)b$$

Perhatikan bahwa ;

$$c = \lambda x + (1-\lambda)b$$

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{\lambda x}{\lambda} + \frac{(1-\lambda)b}{\lambda}$$

$$\frac{c}{\lambda} = x + \frac{(1-\lambda)b}{\lambda}$$

$$-x = \frac{(1-\lambda)b}{\lambda} - \frac{c}{\lambda}$$

$$-x = \frac{b}{\lambda} - \frac{b\lambda}{\lambda} - \frac{c}{\lambda}$$

$$x = \frac{c}{\lambda} + \left[-\frac{(1-\lambda)b}{\lambda}\right]$$

$$x = c(1/\lambda) + [(\lambda-1)/\lambda]b \quad , \lambda \in (0,1]$$

Kemudian karena $L_2(c) = \gamma$ dan $\gamma = \inf f_n(c)$,

$$L_2(c) \le f_n(c)$$

$$= f_n[\lambda x + (1-\lambda)b]$$

$$\le \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(b)$$

$$\le \lambda f_n(x) + (1-\lambda) L_2(b)$$

sehingga diperoleh, $L_2(c) \le f_n(x)$.

Dapat disimpulkan bahwa,

$$f_n(x) \ge (1/\lambda)L_2(c) + [(\lambda - 1)/\lambda]L_2(b))$$

$$= L_2[(1/\lambda)c + [(\lambda - 1)/\lambda]b]$$

$$= L_2(x)$$

sehingga diperoleh, $f_n(x) \ge L_2(x)$.

Kemudian untuk x sembarang titik dari $[c,b]$,

dapat ditulis ;

$$c = \lambda a + (1-\lambda)x$$

$$\frac{c}{(1-\lambda)} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)} + x$$

$$x = \frac{1}{(1-\lambda)}c - \frac{\lambda}{(1-\lambda)}a\text{ , } [0,1) \in \lambda$$

Kemudian karena $L_3(c) = \gamma$ dan $\gamma = \inf\ f_n(c)$,

Perhatikan bahwa ;

$$L_3(c) \le f_n(c)$$

$$= f_n[\lambda x + (1-\lambda)b]$$

$$\le \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(b)$$

$$\le \lambda f_n(x) + (1-\lambda)L_3(b)$$

sehingga diperoleh, $L_3(c) \le f_n(x)$.

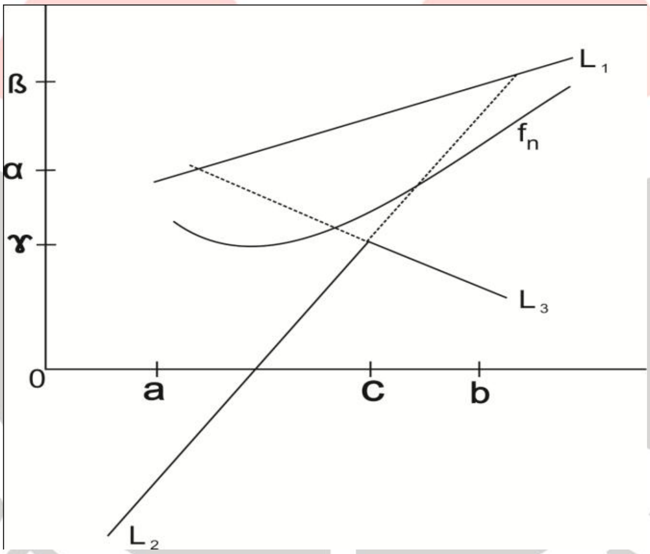
Dapat disimpulkan bahwa,

$$f_n(x) \ge (1/(1-\lambda)L_3(c) - [\lambda/(\lambda-1)]L_3(a))$$

$$= L_3[1/(1-\lambda)c - [\lambda/(\lambda-1)]a]$$

$$= L_3(x)$$

sehingga diperoleh, $f_n(x) \ge L_3(x)$.



Gambar g.2

Karena f_n terbatas diatas dan terbatas dibawah, dapat disimpulkan bahwa f_n merupakan barisan fungsi terbatas (lihat gambar g.2).

Kedua, akan ditunjukan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga untuk setiap $m, n \ge K(\varepsilon)$, maka $\| f_n - f_m \|_{I^0} \le \varepsilon$.

Pada Teorema 3.1.2, jika f_n merupakan barisan yang *konveks,* maka f_n memenuhi kondisi *Lipschitz,*

yaitu ;

$$|f_n(y) - f_n(x)| \le K|y - x|$$

Dengan *K* merupakan *konstanta* dan $x, y \in [a,b]$.

Teorema 3.1.2 menunjukan bahwa *K* bebas dari *n*, ketaksamaan di atas berlaku untuk semua *n*, dan untuk semua $x \in [a,b]$.

Kemudian, pilih sub himpunan terbatas *E* dari $[a,b]$ sedemikian sehingga ada titik yang lain dari $[a,b]$ berada dalam jarak $\varepsilon/(3K)$, untuk suatu $K > 0$ paling sedikit satu titik dari E, katakan *z* dengan sembarang $\varepsilon > 0$.

Jika *E* terbatas, ada *N* dengan $m, n \ge N$, akibatnya

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le \varepsilon/3,$$

untuk semua $z \in E$.

Kemudian, jika $x \in [a,b], z \in E, |z - x| \le \varepsilon/3K$, dan $m, n \ge N$, diperoleh

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f_n(z) + f_n(z) - f_m(z) + f_m(z) - f_m(x)| \\ &\le |f_n(x) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_m(z)| + |f_m(z) - f_m(x)| \\ &\le K|x - z| + \varepsilon/3 + K|z - x| \end{aligned}$$

$$\leq K(\varepsilon/3K)+\varepsilon/3+K(\varepsilon/3K)$$

$$=\varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3$$

$$=\varepsilon$$

Dengan demikian $\| f_n - f_m \|_{I^0} \leq \varepsilon$, untuk $m,n \geq K(\varepsilon)$ yang merupakan hasil yang diinginkan.

Dari pembuktian pertama dan kedua menurut Teorema 2.1.22 f_n merupakan *Konvergen* seragam pada subinterval tertutup dari $I^0 \subset I$.

Berdasarkan uraian dari kasus I dan kasus II, terbukti bahwa f konveks dan barisan fungsi f_n konvergen seragam pada subinterval tertutup dari $I^0 \subset I$.

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 17-18)

Sebelum berlanjut pada pembahasan selanjutnya fungsi f disebut *log-Konveks,* jika $f > 0$ dan *log f konveks* pada I ,

didefinisikan ;

$$f(\alpha x+\beta y)\leq f(x)^{\alpha}+f(y)^{\beta}$$

untuk $x, y \in I, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1.$

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 :19)

Teorema 3.3.6

Kelas fungsi log-konveks pada interval I adalah tertutup pada penjumlahan, perkalian, dan limit, asalkan limit ada dan positive.

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 19)

Bukti :

Misalkan fungsi f dan fungsi g adalah fungsi log-konveks $f > 0$ dan $g > 0$, *log* f *konveks dan log* g *konveks* pada I, dan limitnya ada.

didefinisikan ;

$$f(\alpha x + \beta y) \leq f(x)^{\alpha} + f(y)^{\beta}$$

$$g(\alpha x + \beta y) \leq g(x)^{\alpha} + g(y)^{\beta}$$

untuk $x, y \in I, \alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1.$

Kasus I :

Akan ditunjukan bahwa fungsi log-konveks tertutup pada perkalian.

Perhatikan bahwa ;

$$\log(f.g)(\alpha x + \beta y) = \log f(\alpha x + \beta y) + \log g(\alpha x + \beta y)$$

$$\leq \log(f(x)^{\alpha} + f(y)^{\beta}) + \log(g(x)^{\alpha} + g(y)^{\beta})$$

sehingga terbukti bahwa fungsi log-konveks tertutup pada perkalian.

Kasus II :

Akan ditunjukan bahwa fungsi log-konveks tertutup pada limit.

Perhatikan bahwa ;

$$\log(\lim f_n(\alpha x+\beta y)) = \lim(\log f_n(\alpha x+\beta y))$$

$$\leq \lim(\log f_n(x)^{\alpha} + f_n(y)^{\beta})$$

sehingga terbukti bahwa fungsi log-konveks tertutup pada limit.

Kasus III :

Akan ditunjukan bahwa fungsi log-konveks tertutup pada penjumlahan.

Misalkan jika $a, b, c, d, \alpha, \beta$ adalah bilangan positive dengan $\alpha+\beta=1$, kemudian mislakan fungsi e^x adalah konveks,

$$a^{\alpha}b^{\beta} = \exp(\alpha\log a+\beta\log b) \leq \alpha\exp(\log a)+\beta\exp(\log b) = \alpha a+\beta b$$

sehingga,

$$\frac{a^{\alpha}b^{\beta}+c^{\alpha}d^{\beta}}{(a+c)^{\alpha}(b+d)^{\beta}} = \left(\frac{a}{a+c}\right)^{\alpha}\left(\frac{b}{b+d}\right)^{\beta}+\left(\frac{c}{a+c}\right)^{\alpha}\left(\frac{d}{b+d}\right)^{\beta}$$

$$\leq \alpha\left(\frac{a}{a+c}\right)\beta\left(\frac{b}{b+d}\right)+\alpha\left(\frac{c}{a+c}\right)\beta\left(\frac{d}{b+d}\right)$$

$$=\alpha+\beta$$

$$=1$$

Telah dibuktikan,

$$a^{\alpha}b^{\beta}+c^{\alpha}d^{\beta} \leq (a+c)^{\alpha}(b+d)^{\beta} \qquad \ldots(6)$$

Sekarang pilih $x, y \in I$ dan dapat digunakan persamaan *log-konveks,* kemudian dapat digunakan persamaan (6), sehingga ,

$$f(\alpha x+\beta y)+g(\alpha x+\beta y)\leq f^{\alpha}(x)f^{\beta}(y)+g^{\alpha}(x)g^{\beta}(y)$$

$$\leq [f(x)+g(x)]^{\alpha}[f(y)+g(y)]^{\beta}$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $f+g$ adalah *log-konveks.*

Berdasakan uraian dari kasus I, kasus II, dan kasus III, terbukti bahwa Kelas fungsi log-konveks pada interval I adalah tertutup pada penjumlahan, perkalian, dan limit. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 19)*

3.4 Ciri Khusus Fungsi Konveks

Ciri khusus fungsi konveks adalah fungsi konveks terbatas atau dapat ditulis $BC[a,b]$. $BC[a,b]$ merupakan kelas fungsi $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ dengan $f=g-h$ dimana g dan h adalah *konveks* dan $g_{+}^{'}(a)$, $g_{-}^{'}(b)$, $h_{+}^{'}(a)$, dan $h_{-}^{'}(b)$ semua terbatas.. Selain itu, dengan mudah dicirikan dalam istilah $BV[a,b]$ yaitu fungsi variasi terbatas.

Didefinisikan ;

$BC[a,b]=\{f:[a,b]\rightarrow R, f=g-h$ konveks $g_{+}^{'}(a)$, $g_{-}^{'}(b)$, $h_{+}^{'}(a)$, $h_{-}^{'}(b)$ ada$\}$.

Kemudian didefinisikan :

Fungsi $\alpha:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ *dikatakan fungsi variasi terbatas jika dan hanya jika ada sebuah konstanta* $M>0$ *, sedemikian sehingga,*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right| \le M \ ,$$

untuk setiap partisi $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *dari* $[a,b]$.

Selanjutnya,

Jika $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ *adalah fungsi variasi terbatas pada* $[a,b]$, *maka total variasi dari* α *dari* $[a,b]$.

Didefinisikan,

$V_\alpha(a,b) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right| : P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ *adalah sebuah partisi pada* $[a,b]\}$.

Teorema 3.4.1

Fungsi $f \in BC[a,b]$ *jika dan hanya jika* $f(x) - f(a) = \int_a^x r(t)dt$ *,untuk suatu fungsi* $r \in BV(a,b)$. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 23)*

Bukti

Kasus I :

Diketahui $f \in BC[a,b]$ akan ditunjukan $f(x) - f(a) = \int_a^x r(t)dt$, untuk suatu fungsi $r \in BV(a,b)$.

Berdasarkan definisi ;

$$BC[a,b] = \{ f : [a,b] \to R,\ f = g - h \text{ konveks}, g'_+(a), g'_-(b), h'_+(a), h'_-(b) \text{ ada} \}.$$

Akibatnya,

$$f = g - h$$

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

$$f(a) = g(a) - h(a)$$

sehingga,

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= (g-h)(x) - (g-h)(a) \\ &= g(x) - h(x) - g(a) + h(a) \\ &= (g(x) - g(a)) - (h(x) - h(a)) \\ &= \int_a^x p(t)dt - \int_a^x q(t)dt \end{aligned}$$

Menurut Teorema 2.2.9

$$= \int_a^x (p(t) - q(t))dt$$

$$= \int_a^x r(t)dt, \qquad r(t) = p(t) - q(t)$$

dimana $(p-q) \in BV(a,b)$.

Jadi $f(x) - f(a) = \int_a^x r(x)dt$, untuk suatu fungsi $r \in BV(a,b)$.

Kasus II :

Diketahui $f(x) - f(a) = \int_a^x r(x)dt$, $r \in BV(a,b)$, akan ditunjukan $f \in BC[a,b]$

Misalkan $r = p - q$, dimana p, q meningkat, karena $r \in BV(a,b)$, berdasarkan Definisi fungsi variasi terbatas,

diperoleh,

$$\sum_{i=1}^{n} \left| r(x_i) - r(x_{i-1}) \right| \leq M \text{ , dimana } M > 0 \text{, dan } (x_i, x_{i-1}) \in [a,b]$$

Perhatikan bahwa ;

$$\sum_{i=1}^{n} \left| r(x_i) - r(x_{i-1}) \right| \leq M$$

$$\Rightarrow 0 < \sum_{i=1}^{n} \left| r(x_i) - r(x_{i-1}) \right| \leq M < \infty$$

$$\Rightarrow 0 < \left| r(x_i) - r(x_{i-1}) \right| < \infty$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left| (p-q)(x_i) - (p-q)(x_{i-1}) \right| < \infty$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left| (p(x_i) - q(x_i) - p(x_{i-1}) + q(x_{i-1}) \right| < \infty$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left| ((p(x_i) - p(x_{i-1})) - (q(x_i) - q(x_{i-1})) \right| \leq \left\| (p(x_i) - p(x_{i-1}) \right| - \left| q(x_i) - q(x_{i-1}) \right\| < \infty$$

karena,

$$\left\| (p(x_i) - p(x_{i-1}) \right| - \left| q(x_i) - q(x_{i-1}) \right\| > 0 \text{ ,}$$

berarti,

$$\left| (p(x_i) - p(x_{i-1}) \right| - \left| q(x_i) - q(x_{i-1}) \right| > 0 \text{ atau } \left| (p(x_i) - p(x_{i-1}) \right| - \left| q(x_i) - q(x_{i-1}) \right| < 0$$

dipilih,

$$\left| (p(x_i) - p(x_{i-1}) \right| - \left| q(x_i) - q(x_{i-1}) \right| > 0$$

dimana $M > 0$, dan $(x_i, x_{i-1}) \in [a,b]$, dengan demikian diperoleh $p-q$ naik pada selang tutup $[a,b]$, dengan demikian r juga naik pada selang tutup $[a,b]$.

Kemudian,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x r(x)dt$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x r(x)dt$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x (p-q)(t)dt$$

$$f(x) = f(a) + \int_a^x p(t)dt - \int_a^x q(t)dt$$

untuk semua $x \in [a,b]$, akibatnya f naik pada $[a,b]$. Dengan demikian terdapat $c \in [a,x] \subset (a,b)$.

Kemudian dengan menggunakan Teorema 3.2.1 fungsi f merupakan fungsi konveks, sehingga f' ada pada $[a,b]$.

Dengan demikian terbukti bahwa fungsi $f \in BC[a,b]$.

Berdasarkan uraian kasus I dan kasus II terbukti bahwa fungsi $f \in BC[a,b]$ jika dan hanya jika $f(x) - f(a) = \int_a^x r(t)dt$, untuk suatu fungsi $r \in BV(a,b)$. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 :23)*

Sebelum berlanjut pada pembahsan selanjutnya, didefinisikan ;

$$V_a^b(f) = \sup V(f,P) = \sup \sum_1^n \left| f(x_j) - f(x_{j-1}) \right| < \infty$$

dengan ,

$$P = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}.$$

Teorema 3.4.2

Jika $f \in BC[a,b]$ *maka* $K_a^b(f) < \infty$. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 23)*

Bukti :

Misalakan f fungsi konveks, dan $f \in BC[a,b]$, didefinisikan dengan,

$$K_a^b(f) = \sup K(f,P) = \sup \sum_1^{n-1} \left| \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \right|$$

dengan,

$$\Delta f_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

dan karena f konveks, maka ;

$$K_a^b(f) = f_-'(b) - f_+'(a).$$

Secara umum, jika $f = g - h$ dimana g dan h adalah *konveks*,

diperoleh,

$$K_a^b(f) = K_a^b(g) - K_a^b(h) \le K_a^b(g) + K_a^b(h) = g_-'(b) - g_+'(a) + h_-'(b) - h_+'(a)$$

Terbukti jika $f \in BC(a,b)$ mengakibatkan $K_a^b < \infty$. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 23-24)*

Teorema 3.4.3

Jika $K_a^b(f) < \infty$*,maka* $f_+^{'}$ *ada pada* $[a,b)$ *dan* $f_-^{'}$ *ada pada* $(a,b]$*.(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 24)*

Bukti.

Untuk membuktikan Teorema 3.4.3 pertama – tama akan ditunjukan partisi antara x_k dan x_{k+1} pada $K(f,P)$.

Diambil satu titik wakilnya katakanlah $\bar{x}$, misalkan,

$$\square f_t = \frac{f(x_{k+1}) - f(\bar{x})}{x_{k+1} - \bar{x}}, \qquad \square f_s = \frac{f(\bar{x}) - f(x_k)}{\bar{x} - x_k} \qquad \bar{x} \in (x_k, x_{k+1})$$

sehingga,

$$\square f_{k+1} = \alpha \square f_t + \beta \square f_s$$

dimana,

$$\alpha = \frac{x_{k+1} - \bar{x}}{x_{k+1} - x_k}, \beta = \frac{\bar{x} - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

untuk $\alpha > 0, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$, dan $n \in \square$ dimana $1 \le k \le n-2$

Perhatikan bahwa ;

$$|\Delta f_{k+1} - \Delta f_k| + |\Delta f_{k+2} - \Delta f_{k+1}| = |\alpha(\Delta f_t - \Delta f_s) + \Delta f_s - \Delta f_k| + |\Delta f_{k+2} - \Delta f_t + \beta(\Delta f_t - \Delta f_s)|$$

$$\leq |\Delta f_s - \Delta f_k| + |\Delta f_t - \Delta f_s| + |\Delta f_{k+2} - \Delta f_t|$$

Selanjutnya terdapat 2 kasus dalam partisi ;

Kasus pertama, adanya urutan partisis $\{P_i\}$ sehingga,

$$K_a^b(f) = \lim_{i \to \infty} K(f, P_i) \qquad \text{... (5)}$$

kasus kedua, menjamin bahwa $K_a^x(f)$ adalah naik sebagai fungsi dari x.

Sekarang misalkan $a = x_0 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq b$,

dari ketidaksamaan,

$$|\Delta f_2| - |\Delta f_3| + |\Delta f_3| - |\Delta f_4| \leq |\Delta f_3 - \Delta f_2| + |\Delta f_4 - \Delta f_3| \leq K_a^b(f)$$

diperoleh,

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq K_a^b(f) - \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \leq K_a^b(f) + \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq K_a^b(f) + \frac{f(x_4) - f(x_3)}{x_4 - x_3} \qquad \text{... (6)}$$

Jika dalam (6) dimisalkan $x_2 \downarrow x_1$, dapat dilihat bahwa keduanya

$$D^+ f(x_1) = \lim_{x_2 \downarrow x_1} \sup \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$D_+ f(x_1) = \liminf_{x_2 \downarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

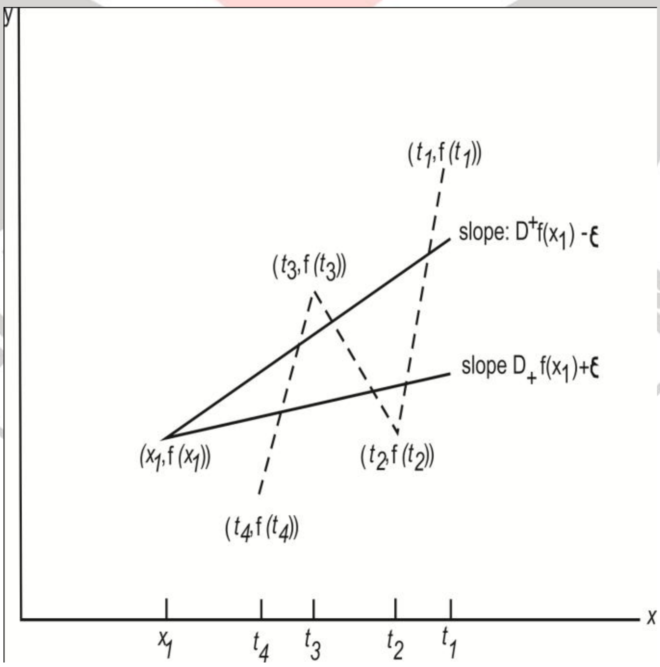
adalah terhingga . Jelas $D_+ f(x_1) \leq D^+ f(x_1)$.

Dapat digunakan kontradiksi, misalkan $D_+ f(x_1) < D^+ f(x_1)$.

Himpunan $\varepsilon = [D_+ f(x_1) - D^+ f(x_1)]/4$,

Dapat dipilih barisan $t_1 > t_2 > ... > x_1$, sehingga

$$\frac{f(t_j) - f(x_1)}{t_j - x_1} \begin{cases} > D^+ f(x_1) - \varepsilon, \, j \Rightarrow ganjil \\ < D_+ f(x_1) + \varepsilon, \, j \Rightarrow genap \end{cases}$$



Gambar g.3

Demikian (gambar g.3) untuk urutan $\{t_1\}$,

$$\left|\Delta f_{i+1} - \Delta f_i\right| > (D^+ f(x_1) - \varepsilon) - (D_+ f(x_1) + \varepsilon) = 2\varepsilon > 0$$

Dengan mengambil partisi P dari [a,b], mengandung beberapa titik $\{t_j\}$, dapat dibuat $K(f,P)$ yang luas sesuai yang diinginkan, sehingga kontradiksi dengan kehinggaan $K_a^b(f)$. Dapat disimpulkan bahwa $f_+^{'}(x)$ ada pada [a,b).

Argumen yang sama menetapkan kesimpulan terkait untuk $f_-^{'}(x)$ ada pada (a,b].

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 24-25)

Teorema 3.4.4

Jika $K_a^b(f) < \infty$, maka f adalah Lipschitz dan f kontinu mutlak pada [a,b].

(Roberts W and Varberg E, hal. 25)

Bukti :

Diketahui $K_a^b(f) < \infty$, akan ditunjukan f adalah *Lipschitz* dan akibatnya *f* kontinu mutlak pada [a,b]. Karena $K_a^b(f) < \infty$,berarti $f^{'}$ ada pada selang $[a,b]$. Oleh karena itu f kontinu pada selang $[a,b]$. Selanjutnya, dengan $f_-^{'}$ ada pada $(a,b]$, berarti $f^{'}$ terbatas, dengan demikian ada $M > 0$,

sehingga,

$$\left|\frac{f(b) - f(x_3)}{b - x_3}\right| \le M \qquad \text{... (7)}$$

untuk suatu $x_3 \in [a,b)$.

Berdasarkan persamaan (6), dengan memisalkan $x_4 = b$, diperoleh ;

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \le \left|K_a^b(f)+\frac{f(b)-f(x_3)}{b-x_3}\right|$$

$$\le \left|K_a^b(f)+\frac{f(b)-f(x_3)}{b-x_3}\right| |x_2-x_1|$$

$$\le [K_a^b(f)+M]|x_2-x_1| = L|x_2-x_1|$$

untuk setiap $x_1, x_2 \in [a,b)$ dan L konstan. Berdasarkan Teorema 2.1.18 terbukti fungsi f *Lipzitch* pada $[a,b]$.

Selanjutnya, karena f adalah *Lipshitz* maka menurut Teorema 2.1.24 fungsi f adalah *kontinu mutlak*. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 : 25-26)*

Teorema 3.4.5

$f \in BC[a,b]$ jika dan hanya $K_a^b(f) < \infty$.

(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 :. 26)

Bukti :

Kasus I :

Diketahui $f \in BC[a,b]$, akan ditunjukan $K_a^b(f) < \infty$.

Pada Teorema 3.4.2 diperoleh bahwa $f \in BC[a,b]$ maka $K_a^b(f) < \infty$.

Dengan demikian terbukti.

Kasus II :

Diketahui $K_a^b(f) < \infty$, akan ditunjukan $f \in BC[a,b]$, misalkan f konveks.

Definisikan $\hat{f}$ dengan,

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f_-^{'}(x) - f_-^{'}(a), x \in (a,b] \\ 0, x = a \end{cases}$$

Misalkan $a < u < v \leq b$ dan dipilih sebuah barisan dari partisi

$$P_i = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_m = u\} \cup \{u = x_m < x_{m+1} < ... < x_n = v\} = P_i^{'} \cup P_i^{''}$$

sedemikian sehingga,

$$K(f, P_i^{'}) \to K_a^u(f) \text{ dan } K(f, P_i) \to K_a^v(f)$$

Jika $\|P_i\| \to 0$ untuk $i \to \infty$, diperoleh,

$$K(f, P_i) - K(f, P_i^{'}) = \sum_{j=m}^{n-1} \left| \square f_{j+1} - \square f_j \right|$$

$$\geq \left| \sum_{j=m}^{n-1} (\square f_{j+1} - \square f_j) \right| = \left| \square f_n - \square f_m \right|$$

untuk $\lim_{i \to \infty}$, diperoleh

$$K_a^v(f) - K_a^u(f) \geq \left| f'_-(v) - f'_-(u) \right|$$

atau *ekuivalen* dengan ;

$$K_a^v(f) - K_a^u(f) \geq \left| \hat{f}(v) - \hat{f}(u) \right| \qquad \text{... (8)}$$

ini juga berlaku jika $u = a$,

$$K_a^v(f) = \lim_{i \to \infty} K(f, P_i) \geq \lim_{i \to \infty} \left| f_n - f_1 \right| = \left| \hat{f}(v) - \hat{f}(a) \right|$$

selanjutnya, persamaan (8) untuk $v > u$,

$$K_a^v(f) - K_a^u(f) \geq \hat{f}(v) - \hat{f}(u),$$

dan

$$K_a^v(f) - K_a^u(f) \geq \hat{f}(u) - \hat{f}(v).$$

Kemudian untuk $K_a^x(f) - \hat{f}(x)$ dan $K_a^x(f) + \hat{f}(x)$ meningkat sebagai fungsi dari x, misalkan,

$$n(x) = \frac{1}{2}[K_a^x(f) - \hat{f}(x)] , \qquad p(x) = \frac{1}{2}[K_a^x(f) + \hat{f}(x)]$$

Karena $K_a^b(f) < \infty$ berarti $f(x) = p(x) - n(x)$ adalah variasi terbatas dan f' ada di $[a,b]$.

Misalkan $f' \in R[a,b]$ sedemikian sehingga menurut Teorema 2.2.11 ,

diperoleh ;

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f^{'}(t)dt = \int_a^x [\hat{f}(t) + f_+^{'}(a)]dt$$

Terbukti bahwa $f \in BC[a,b]$.

Berdasarkan uraian dari kasus I dan kasus II, terbukti $f \in BC[a,b]$ *jika dan hanya* $K_a^b(f) < \infty$. *(Robert, A. W and Varberg, D. E, 1973 :26-27)*

3.5 Konjugat Fungsi Konveks

Pembahasan terakhir pada karya tulis ini akan dibahas tentang hubungan antara *fungsi konveks* dan *konjugat* fungsinya.

Jika $g:[0,\infty) \to [0,\infty)$, g adalah fungsi satu – satu, meningkat kuat, dan kontinu dengan $g(0) = 0$ dan $\underset{x\to\infty}{g(x) \to \infty}$,

maka g^{-1} ada dan memiliki sifat yang sama dengan g.

Didefinisikan ,

$$f(x) = \int_0^x g(s)ds, \qquad f^*(y) = \int_0^y g^{-1}(t)dt$$

dengan f^* adalah notasi untuk *konjuget*.

Fungsi f dan f^* yang didefinisikan diatas keduanya merupakan *fungsi konveks* pada $[0,\infty]$.

Definisi 3.5.1 (Ketaksamaan Young)

Jika $g:[0,\infty]\to[0,\infty]$*, g adalah fungsi satu – satu, meningka kuat, dan kontinu dengan* $g(0)=0$ *dan* $\lim_{x\to\infty} g(x)\to\infty$*, maka* g^{-1} *ada dan memiliki sifat yang sama dengan* g.

Didefinisikan ,

$$f(x)=\int_0^x g(s)ds, \qquad f^*(y)=\int_0^y g^{-1}(t)dt$$

dengan f^* *konjuget dari* f *, untuk semua* $x,y\in[0,\infty]$ *,* f *,* f^* *dan* f^{**} *yang memenuhi ketaksamaan :*

(A1) $xy \geq f(x)+f^*(y), \forall x\geq 0, y>0$.

(A2) $xy = f(x)+f^*(y)$ *jika dan hanya jika* $y=g(x)=f'(x)$.

(A3) $f^{**}=f$.

(A4) $f^*(y)=\sup_{x\geq 0}[xy-f(x)].$

disebut ketaksamaan Young. (Roberts W and Varberg E, hal. 29-30)

Definisi 3.5.2

Jika $f: I \to \mathbb{R}$ *adalah fungsi konveks pada interval* I *, maka* $f^*: I^* \to \mathbb{R}$ *, menunjukan fungsi konjuget.*

Selanjutnya didefnisikan,

$$f^*(y) = \sup_{x \geq 0}[xy - f(x)]$$

dengan domain $I^* = \{y \in \mathbb{R} : f^*(y) < \infty\}$ *maka* f^* *adalah konveks, dan tertutup. (Roberts W and Varberg E, hal. 30)*

Definisi 3.5.3

Didefinisikan fungsi konveks $g: I \to \mathbb{R}$ *tertutup jika himpunan* $L_\alpha = \{x \in I : g(x) \leq \alpha\}$ *adalah subhimpunan tertutup dar* $\mathbb{R}$ *untuk semua* $\alpha \in \mathbb{R}$ *. (Roberts W and Varberg E, hal. 30)*

Teorema 3.5.4

Jika $f: I \to R$ *adalah konveks, maka konjugetnya* $f^*: I^* \to R$ *adalah konveks dan tertutup. (Roberts W and Varberg E, hal. 30)*

Bukti :

Misalakan $f: I \to R$ adalah *konveks.*

Akan ditunjukan *konjugetnya* $f^*: I^* \to R$ adalah *konveks.*

Pertama misalkan $I^* \neq \emptyset$, kemudian karena $f: I \to R$ *konveks*, maka menurut Teorema 3.2.4, selanjutnya terdapat paling sedikit ada satu garis singgung untuk f pada sebarang $x_0 \in I$, maka $A(x) = f(x_0) + y(x - x_0)$ $, \forall y \in R.$ Sebaliknya dipiih setiap titik interior x_0, pilih $y \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$, maka $A(x)$ *konveks* menurut Teorema 3.2.4. Dalam kasus lain dapat dipilih y sehingga $f(x) \geq A(x)$, yaitu dipilih y sehingga $xy - f(x) \leq x_0 y - f(x_0),$ untuk setiap $x \in I$, dengan $f^*(y) < \infty$ dan $I^* \neq \emptyset$.

Kedua Misalkan f^* adalah supremum dari *fungsi konveks* $g_x : R \to R$, didefinisikan dengan $g_x(y) = xy - f(x)$ sehingga menurut Teorema 3.3.4, I^* adalah sebuah *interval* dan f^* adalah *konveks* pada I^*.

Diketahui $L_\alpha = \{x \in I : g(x) \leq \alpha\}$, misalkan $\{y_n\}$ adalah barisan yang *konvergen* ke L_α, katakan $\overline{y}$ untuk $n \to \infty$, akan ditunjukan $\overline{y} \in L_\alpha$.

Untuk barisan $\{y_n\}$ diperoleh $g_x(y_n) = xy_n - f(x) \leq \sup\{xy_n - f(x)\} = f^*(y_n) \leq \alpha,$ untuk setiap $x \in I$.

Karena barisan $\{y_n\}$ konvergen ke $\overline{y}$ untuk $n \to \infty$, maka $x\overline{y} - f(x) \leq \alpha$ yang mengakibatkan $f^*(\overline{y}) \leq \alpha$, artinya $\overline{y} \in L_\alpha$.

Jadi, terbukti L_α tertutup.

Teorema 3.5.5

Jika $f : I \to R$ *adalah konveks dan tutup, maka grafik (graph) dari* ∂f *adalah monoton naik maksimal. (Roberts W and Varberg E, hal. 32)*

Bukti :

Pada bagian B pembahasan kekontinuan dan kediferensialan diketahui bahwa $x_1, x_2, \in \mathrm{I},$ dengan $x_1 < x_2$. Karena f *konveks,* maka ;

$$f_-^{'}(x_1) \le f_+^{'}(x_1) \le f_-^{'}(x_2) \le f_+^{'}(x_2) \qquad \text{... (9)}$$

Kemudian didefinisikan ;

$$\partial f(x) = \{ y \in R : f_-^{'}(x) \le y \le f_+^{'}(x) \} \qquad \text{... (10)}$$

Dengan $f_-^{'}(a) = -\infty$, I berisi titik akhir kiri a dan $f_+^{'}(b) = \infty$, I berisi titik akhir pada b sehingga $\partial f(x)$ sebuah *interval* dan tidak kosong.

Sekarang misalkan (x_1, y_1) , (x_2, y_2) $\in$ ∂f , yang berarti $y_1 \in \partial f(x_1), y_2 \in \partial f(x_2).$

Jika $x_1 < x_2$, maka berdasarkan persamaan (9) dan (10) ,

diperoleh, $$y_2 \ge f_-^{'}(x_2) \ge f_+^{'}(x_1) \ge y_1$$

Karena $x_1 < x_2$, mengakibatkan $y_2 > y_1$ sehingga diperoleh ∂f adalah monoton naik.

Pada Teorema 3.5.4 dan persamaan (10), *fungsi konveks* tertutup dan diperoleh I memilki titik batas di kanan, dengan *Range* $\partial f \to \infty$, dan I memiliki titik batas di kiri, dengan *Range* $\partial f \to -\infty$.

Selanjutnya akan ditunjukan kemaksimalan.

Misalkan,

$(x_1, y_1) \notin \partial f$ mengakibatkan $(x - x_1)(y - y_1) < 0$ untuk beberapa $(x, y) \in \partial f$ ... (11)

Kemudian f digantikan dengan $h(x) = f(x + x_1) - xy_1$, dengan f *fungsi konveks* yang tertutup. Selanjutnya dapat diasumsikan $x_1 = 0 = y_1$, sehingga dapat ditunjukan ;

$(0,0) \notin \partial f$ mengakibatkan $xy < 0$ untuk beberapa $(x, y) \in \partial f$ ... (12)

Sekarang jika $x < 0, \forall x \in \text{dom}\, \partial f$, maka I dibatasi diatas dan *range* $\partial f \to \infty$, sehingga ada $(x, y) \in \partial f$ dengan $xy < 0$.

Argumen serupa berlaku jika $x > 0, \forall x \in \text{domain}\, \partial f$.

Jika $0 \in$ domain ∂f, maka $(0,0) \notin \partial f$, berarti $0 \notin \partial f$ .Kemudian $f(0)$ tidak dapat menjadi minimum pada f dalam kasus ini, ada $x_2 \in I$ sehingga $f(x_2) < f(0)$. Jika $x_2 < 0$, maka ditemukan $x_3 \in [x_2, 0)$,dengan $f_+^{'}(x_3) > 0$. Berdasarkan Teorema 2.2.12, diperoleh ;

$$f(x_2) - f(0) = \int_0^{x_2} f_+^{'}(t)dt \geq 0$$

Dengan melanggar cara x_2 yang telah dipilih. Kemudian dipilih dari x_3, berdasarkan persamaan (10) bahwa $(x_3, f_+^{'}(x_3)) \in \partial f$, dan karena $x_3 f_+^{'}(x_3) < 0$, persamaan (12) telah ditunjukan.

Dengan argumen yang sama dapat ditunjukan jika $x_2 > 0,$ dimana dalam kasus ini dapat ditemukan $x_3 > 0$ sedemikian sehingga $f_-^{'}(x_3) < 0$.

Jadi, terbukti jika f *fungsi konveks* dan tertutup maka grafik (graph) dari ∂f adalah monoton naik maksimal.

Sebelum membicarakan teorema selanjutnya, terlebih dahulu didefinisikan

$$\int_c^x \partial f(s)ds = \int_c^x f_+^{'}(s)ds$$

untuk semua $c, x \in I$.

Catatan bahwa setiap fungsi g sedemikian sehingga $f_-^{'}(x) \le g(x) \le f_+^{'}(x)$ akan bekerja sebaik $f_+^{'}$ semenjak $\int f_-^{'} = \int f_+^{'}$.

Teorema 3.5.6

Jika fungsi $f : I \to R$ *adalah konveks dan tertutup, maka*

$$f(x) - f(c) = \int_c^x \partial f(s)ds$$

untuk setiap $x, c \in I$. *(Roberts W and Varberg E, hal. 34)*

Bukti :

Diketahui f adalah *konveks* dan tertutup, akan ditunjukan $f(x)-f(c)=\int_c^x \partial f(s)ds$, untuk setiap $x,c \in I$.

Menurut Teorema 3.2.1, jelas ketika f *konveks* berarti ada fungsi $g:I \to R$ naik dan terdapat sebarang titi $c \in I$ berlaku $f(x)-f(c)=\int_c^x g(s)ds$,

Selanjutnya dimisalkan $g(s)=f'(s)=\partial f(s)$.

Sedemikian sehingga menururt Teorema 2.2.11 Jelas,

$$\int_c^x g(s)ds = \int_c^x f_+^{'} ds = \int_c^x \partial f(s)ds = f(t)\Big|_c^x$$

$$f(x)-f(c)=\int_c^x \partial f(s)ds$$

untuk setiap $x,c \in I$.

Teorema 3.5.7

Jika $f:I \to R$ *memenuhi konveks dan tertutup, maka*

$f^*:I^* \to R$ *juga konveks, tertutup, dan*

(a) $xy \le f(x)+f^*(y)$ *untuk setiap* $x \in I, y \in I^*$,

(b) $xy = f(x)+f^*(y)$ *jika dan hanya jika* $y \in \partial f(x)$,

(c) $\partial(f^*) = (\partial f)^{-1}$,

(d) $f^{**} = f$

(Roberts W and Varberg E, hal. 34)

Bukti :

Diketahui $f : I \to R$ *konveks*, akan ditunjukan $f^* : I^* \to R$ juga *konveks*, tertutup, dan memenuhi ketaksamaan *Young, yaitu :*

(a) $xy \le f(x) + f^*(y)$ untuk setiap $x \in I, y \in I^*$,

(b) $xy = f(x) + f^*(y)$ jika dan hanya jika $y \in \partial f(x)$,

(c) $\partial(f^*) = (\partial f)^{-1}$,

(d) $f^{**} = f$

Menurut Teorema 3.5.4 , terbukti bahwa $f^* : I^* \to R$ juga *konveks*, tertutup.

Kemudian untuk menunjukan persamaan (a), jelas merupakan akibat langsung dari definisi f^*, yaitu $f^*(y) = \sup_{x \ge 0}[xy - f(x)]$,

sehingga,

$$f^*(y) \ge xy - f(x)$$

$$xy \le f^*(y) + f(x)$$

Untuk membuktikan persamaan (b) perhatikan bahwa *fungsi konveks* $g : I \to R$ mencapai minimum pada $x \in I$ jika dan hanya jika $0 \in \partial g(x)$, sekarang

$$-f^*(y) = -\sup_{x\in I}[xy - f(x)] = \inf_{x\in I}[xy - f(x)]$$

Namun seperti disebutkan diatas, $g(x) = f(x) - xy$ (menjadi *konveks*) mencapai infimum pada x jika dan hanya jika $0 \in \partial g(x)$ atau *ekuivalen* dengan, jika hanya jika $y \in \partial f(x)$.

diperoleh,

$$-f^*(y) = f(x) - xy \text{ jika dan hanya jika } y \in \partial f(x) \quad ...(13)$$

Dengan demikian persamaan (b) terbukti.

Sekarang untuk menunjukan persamaan (c), dpilih sembarang tertentu $x \in I$, dari definisi f^*,

$$f^*(y) - xy \geq -f(x) \text{ untuk semua } y \in I^* \quad ... (14)$$

sehingga $f^*(y) - xy$ akan bernilai minimal bila persamaan (14) digabung dengan persamaan (13) ketika $y \in \partial f(x)$. Dengan kata lain $y \in \partial f(x)$ mengakibatkan $h(z) = f^*(z) - xz$ akan bernilai minimal pada $z = y$.

Tetapi h menjadi *konveks* yang bernilai minimal dengan tepat ketika $0 \in \partial h(y)$, sedemikian sehingga $x \in \partial(f^*)(y)$.

Dapat disimpulkan setelah mengambil *Invers* bahwa ;

$$x \in (\partial f)^{-1}(y) \text{ mengakibatkan } x \in \partial(f^*)(y)$$

Oleh karena itu $\partial(f^*)$ adalah $(\partial f)^{-1}$.

Terakhir, jika $\partial(f^*)$ monoton naik maksimal, maka $(\partial f)^{-1}$ monoton naik maksimal, dan sebaliknya. Sehingga dapat disimpulkan $\partial(f^*) = (\partial f)^{-1}$.

Dengan demikian terbukti untuk persamaan (c).

Terakhir, jika diterapkan persamaan (c) ke f^*, diperoleh

$$\partial(f^{**}) = (\partial(f^*))^{-1} = ((\partial f^*)^{-1})^{-1} = \partial f$$

dan berdasarkan Teorema 3.5.6, diperoleh,

$$f(x) - f(c) = \int_c^x \partial f(s)ds = f^{**}(x) - f^{**}(c)$$

untuk semua $x, c \in I$ dan semua $x, c \in I^{**}$, akibatnya $I = I^{**}$ dan dapat diperoleh jika menemukan satu c untuk $f(c) = f^{**}(c)$. Pilih $c_0 \in I$ dan $y_0 \in I^*$ sehingga $y_0 \in \partial f(c_0)$ dengan persamaan (c) diperoleh $c_0 \in (\partial f)^{-1}(y_0) = \partial(f^*)(y_0)$.

Dengan menerapkan persamaan (b) untuk f dan f^*, diperoleh,

$$c_0 y_0 = f(c_0) + f^*(y_0) = f^*(y_0) + f^{**}(c_0)$$

yang berarti $f(c_0) = f^{**}(c_0)$. Dengan demikian terbukti untuk persamaan (d).