SBAB III

MODEL VARMAX

3.1. Metode Analisis VARMAX

Pengamatan *time series* membentuk suatu deret data pada saat t_1 , t_2, ..., t_n dengan variabel random Z_n yang dapat dipandang sebagai variabel random berdistribusi normal dengan fungsi distribusi P(Z_1, Z_2, ..., Z_n).

Model VARMA dengan orde (p, q) memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$\Phi(B)Y_t = \Theta(B)a_t, \text{ t diskrit} \quad (3.1)$$

di mana $\Phi(B) = \left(\mathrm{I} - \Phi_1 B - \cdots - \Phi_p B^p\right)$ dan $\Theta(B) = \mathrm{I} + \Theta_1 B + \cdots + \Theta_q B^q$ adalah matrik polinomial (k x k) yang merupakan operator dari AR(p) dan MA(q). B adalah operator *backshift*, I adalah matriks identitas dan a_t adalah *white noise*. Model diasumsikan stasioner dan *invertible*.

Banyak situasi dimana proses Y_t tidak hanya sebagai hasil dari input stokastik murni, tetapi mungkin juga tergantung pada input yang dikontrol. Metode Vektor *Autoregressive Moving Average X* (VARMAX) adalah pengembangan dari model VARMA dengan menambahkan variabel eksogen atau X di sebelah kanan persamaan. Persamaan model linear secara umum, di mana terdapat variabel eksogen, dilakukan dengan mengembangkan persamaan (3.1) sebagai beikut :

$$\Phi(B)Y_t = \beta(B)X_t + \Theta(B)a_t, \text{ t diskrit} \quad (3.2)$$

Di mana $\beta(B) = \beta_0 + \beta_1 B + \cdots + \beta_{r-1} B^{r-1}$ adalah matriks polinomial (k x m) dan X_t adalah m deret variasi mewakili input yang dikontrol dan atau gangguan yang perlu diperhatikan.

3.2. Identifikasi Model

Pada runtun waktu *univariate*, model diidentifikasi berdasarkan pola dari fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial dari deret waktu yang sudah stasioner. Identifikasi model VARMAX juga menggunakan konsep ini yaitu dilihat dari pola fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial dari data runtun waktu yang sudah stasioner. Selain itu penentuan orde juga mempertimbangkan nilai AIC (*Akaike's Information Criterion*) yang paling minimum.

3.2.1. Kestasioneran Data

Kestasioneran data dapat diketahui dengan cara visualisasi yaitu dengan melihat plot fungsi matriks autokorelasi sampel (MACF) dan fungsi matriks autokorelasi parsial (MPACF). Suatu proses {a_t} disebut *white noise* jika proses tersebut merupakan suatu deretan variabel random yang berurutan tidak saling berkorelasi dan mengikuti suatu distribusi tertentu dengan mean konstan $E(a_t) = \mu_t$ yang diasumsikan bernilai nol, varians konstan $Var\,(a_t) = {\sigma_a}^2$ dan $\gamma_k Kov(a_t, a_{t+k}) = 0$ untuk semua $k \neq 0$ (Wei, 1990). Suatu proses *white noise* {a_t} adalah stasioner dengan fungsi autokovarians :

$$\gamma_k = \begin{cases} {\sigma_a}^2 ; k = 0 \\ 0; k \neq 0 \end{cases}$$

Dan fungsi autokorelasi adalah sebagai berikut :

$$\rho_k = \begin{cases} 1; k = 0 \\ 0; k \neq 0 \end{cases}$$

Serta fungsi autokorelasi parsial sebgai berikut :

$$\phi_k = \begin{cases} 1; k = 0 \\ 0; k \neq 0 \end{cases}$$

Kestasioneran data terbagi menjadi dua yaitu kestasioneran dalam mean dan varians. Data runtun waktu yang tidak stasioner dapat distasionerkan dengan cara sebagai berikut :

a. Ketidakstasioneran dalam Mean

   Data runtun waktu yang tidak stasioner dalam mean berarti memiliki mean yang tidak konstan atau meannya terpengaruh oleh waktu. Cara yang digunakan untuk mengatasi ketidakstasioneran dalam mean ini dengan melakukan pembedaan (*differencing*) terhadap data runtun waktu.

b. Ketidakstasioneran dalam Varians

   Data runtun waktu yang tidak stasioner dalam varians berarti mempunyai varians yang tidak konstan atau variansnya terpengaruh oleh waktu. Cara yang digunakan untuk mengatasi ketidakstasioneran dalam varians yaitu dengan melakukan transformasi.

3.2.2. Fungsi Matriks Kovarians

Misalkan $Z_t = \left[Z_{1,t}, Z_{2,t}\right]'$ $\qquad t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Adalah vektor bilangan real berdimensi 2 dengan rata-rata $E\left(Z_{i,t}\right) = \mu_i$, konstan untuk tiap $i = 1,2$ dan varians silang antara $Z_{i,t}$ dan $Z_{j,t+k}$ untuk semua i, j = 1,2 adalah suatu fungsi hanya untuk *lag-k*. jadi pada runtun waktu *bivariate* stasioner berlaku:

$$E(Z_t) = \mu = \begin{bmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Dan matriks kovarians:

$$\begin{aligned}
\Gamma(k) &= cov(Z_t, Z_{t+k}) = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)'] \\
&= E\begin{bmatrix}Z_{1,t} - \mu_1 \\ Z_{2,t} - \mu_2\end{bmatrix}[Z_{1,t+k} - \mu_1 \quad Z_{2,t+k} - \mu_2] \\
&= E\begin{bmatrix}(Z_{1,t} - \mu_1)(Z_{1,t+k} - \mu_1) & (Z_{1,t} - \mu_1)(Z_{2,t+k} - \mu_2) \\ (Z_{2,t} - \mu_2)(Z_{1,t+k} - \mu_1) & (Z_{2,t} - \mu_2)(Z_{2,t+k} - \mu_2)\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}\gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k)\end{bmatrix} \\
&= cov(Z_{t-k}, Z_t)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Di mana:

$$\begin{aligned}
\gamma_{ij}(k) &= E\big(Z_{i,t} - \mu_i\big)\big(Z_{j,t+k} - \mu_j\big) \\
&= E\big(Z_{i,t-k} - \mu_i\big)\big(Z_{j,t} - \mu_j\big)
\end{aligned}$$

untuk $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, *i =1,2* dan *j =1,2*

sebagai suatu fungsi dari *k*, $\Gamma(k)$ disebut fungsi matriks kovarians untuk proses vektor Z_t. Untuk *i = j*, $\gamma_{ii}(k)$ adalah fungsi autokovarians untuk komponen proses $Z_{i,t}$, sedangkan untuk $i \neq j$, $\gamma_{ij}(k)$ adalah fungsi kovarians silang antara $Z_{i,t}$ dan $Z_{j,t+k}$.

Matriks varians dari runtun waktu *bivariate* adalah matriks kovarians pada *lag* nol, yaitu $\Gamma(0)$.

$$var(Z_t) = \Sigma_z = \Gamma(0) = cov(Z_t, Z_t)$$

Dalam runtun waktu *univariate* berlaku $\gamma_k = \gamma_{-k}$, akan tetapi dalam runtun waktu *bivariate* tidak demikian, yaitu:

$$\Gamma(k) \neq \Gamma(-k)$$

$$cov(Z_t, Z_{t+k}) \neq cov(Z_t, Z_{t-k})$$

Karena $\gamma_{ij}(k) \neq \gamma_{ij}(-k)$ untuk $i \neq j$, seperti ditunjukan pada uraian berikut,

$$\gamma_{ij}(k) = cov\left(Z_{i,t}, Z_{j,t+k}\right) = cov\left(Z_{j,t+k}, Z_{i,t}\right) = cov\left(Z_{j,t-(-k)}, Z_{i,t}\right)$$

$$\gamma_{ij}(k) = \gamma_{ji}(-k)$$

Sehingga diperoleh:

$$\Gamma(k) = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(-k) & \gamma_{21}(-k) \\ \gamma_{12}(-k) & \gamma_{22}(-k) \end{bmatrix}$$

$$= \Gamma'(-k) \tag{3.5}$$

Jadi untuk runtun waktu *bivariate*, fungsi matriks kovarians pada *lag-k* tidak sama dengan fungsi matriks kovarians pada *lag (-k)*, $\Gamma(k) \neq \Gamma(-k)$, akan tetapi fungsi matriks kovarians pada *lag-k* sama dengan *transpose* fungsi matriks kovarians pada *lag (-k)*, $\Gamma(k) = \Gamma'(-k)$.

3.2.3. Fungsi Matriks Korelasi

Fungsi matriks korelasi untuk proses vektor didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho(k) = D^{-1/2}\Gamma(k)D^{-1/2} = \left[\rho_{ij}(k)\right] \tag{3.6}$$

Di mana *D* adalah matriks diagonal dengan elemen diagonal ke-*i* adalah varians dari proses ke-*i*. untuk runtun waktu *bivariate,* fungsi matriks korelasi dituliskan sebagai berikut:

$$\rho(k)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{var(Z_{1,t})}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{var(Z_{2,t})}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k)\\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{var(Z_{1,t})}} & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{var(Z_{1,t})}}\end{bmatrix}$$

$$\rho(k)=\begin{bmatrix}\frac{\gamma_{11}(k)}{(\gamma_{11}(0))^{1/2}(\gamma_{11}(0))^{1/2}} & \frac{\gamma_{12}(k)}{(\gamma_{11}(0))^{1/2}(\gamma_{22}(0))^{1/2}}\\ \frac{\gamma_{21}(k)}{(\gamma_{22}(0))^{1/2}(\gamma_{11}(0))^{1/2}} & \frac{\gamma_{22}(k)}{(\gamma_{22}(0))^{1/2}(\gamma_{22}(0))^{1/2}}\end{bmatrix}$$

$$\rho(k)=\begin{bmatrix}\rho_{11}(k) & \rho_{12}(k)\\ \rho_{21}(k) & \rho_{22}(k)\end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Elemen diagonal ke-*i* dari matriks $\rho(k)$, yaitu $\rho_{ii}(k)$ adalah fungsi autokorelasi untuk runtun waktu $Z_{i,t}$, sedangkan elemen diluar diagonal matriks $\rho(k)$ adalah *fungsi autokorelasi silang* antara runtun $Z_{i,t}$ dan $Z_{j,t+k}$, dituliskan sebagai berikut:

$$\rho_{ij}(k)=\frac{\gamma_{ij}(k)}{\left[\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)\right]^{1/2}}, \qquad i\neq j$$

Fungsi korelasi silang untuk runtun waktu *bivariate* adalah sebagai berikut:

$$\rho_{12}(k)=\frac{\gamma_{12}(k)}{[\gamma_{11}(0)\gamma_{22}(0)]^{1/2}} \quad (3.8)$$

Substitusikan (3.5) pada (3.8) sehingga diperoleh:

$$\rho_{12}(k)=\frac{\gamma_{21}(-k)}{[\gamma_{11}(0)\gamma_{22}(0)]^{1/2}}$$

$$\rho_{12}(k)=\rho_{21}(-k) \quad (3.9)$$

Dari persamaan di atas dapat disimpulkan bahwa: $\rho_{12}(k)=\rho_{21}(-k)$, $\rho_{21}(k)=\rho_{12}(-k)$, $\rho_{11}(k)=\rho_{11}(-k)$, dan $\rho_{22}(k)=\rho_{22}(-k)$. Sehingga matriks fungsi autokorelasi dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\rho(k)=\begin{bmatrix}\rho_{11}(-k) & \rho_{21}(-k)\\ \rho_{12}(-k) & \rho_{22}(-k)\end{bmatrix}$$

$$\rho(k) = \rho'(-k) \tag{3.10}$$

Untuk runtun waktu *bivariate*, fungsi matriks korelasi pada *lag-k* tidak sama dengan fungsi matriks korelasi *lag* (-*k*), yaitu $\rho(k) \neq \rho(-k)$, akan tetapi fungsi matriks korelasi pada *lag-k* sama dengan *transpose* fungsi matriks korelasi pada *lag* (-*k*), yaitu $\rho(k) = \rho'(-k)$. Kadang-kadang fungsi matriks kovarians dan fungsi matriks korelasi disebut juga dengan fungsi matriks autokovarians dan fungsi matriks autokorelasi.

3.2.4. Fungsi Matriks Korelasi Parsial

Dalam runtun waktu *univariate*, fungsi autokorelasi parsial sangat berguna untuk mengidentifikasi orde dari model AR(*p*), Di mana $\phi_{kk} = 0$ untuk $|k| > p$, begitu pula halnya dengan matriks autoregresi parsial dalam runtun waktu *multivariate.*

Tiao dan Box (1994) mendefinisikan matriks autoregresi parsial pada *lag* ke-*s*, dinotasikan dengan $\wp(s)$, Di mana $\wp(s)$ sama dengan $\Phi_{s,s}$ dalam regresi linear *multivariate*, dituliskan:

$$Z_{t+s} = \Phi_{s,1}Z_{t+s-1} + \Phi_{s,2}Z_{t+s-2} + \cdots + \Phi_{s,s}Z_t + e_{s,t+s}$$

Di mana $e_{s,t+s}$ adalah sesatan dan $\Phi_{s,k}$, $k = 1,2,\ldots,s$ adalah matriks koefisien ukuran $m \times m$ yang meminimumkan

$$E\left[e_{s,t+s}e'_{s,t+s}\right] =$$

$$E\left[\left(Z_{t+s} - \Phi_{s,1}Z_{t+s-1} - \cdots - \Phi_{s,s}Z_t\right)\left(Z_{t+s} - \Phi_{s,1}Z_{t+s-1} - \cdots - \Phi_{s,s}Z_t\right)'\right] \tag{3.11}$$

Peminimalan (3.11) dilakukan dengan menggunakan metode kuadrat terkecil sehingga hasilnya menuju kepada generalisasi *multivariate* dari persamaan Yule-Walker untuk model AR, sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma'(1) & \cdots & \Gamma'(s-1) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \cdots & \Gamma'(s-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma(s-1) & \Gamma(s-2) & \cdots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_{s,1} \\ \Phi'_{s,2} \\ \vdots \\ \Phi'_{s,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(s) \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Definisi dari $\wp(s)$ mengarah kepada pemecahan persamaan (3.12) untuk $\Phi'_{s,s}$ atau dengan kata lain penentuan matriks autoregresi parsial memerlukan hasil pemecahan dari persamaan (3.12).

(i) Untuk $s = 1$

$\Gamma(0)\Phi'_{1,1} = \Gamma(1)$

$\wp'(1) = \Phi'_{1,1} = \Gamma^{-1}(0)\Gamma(1)$

(ii) Untuk $s \geq 2$, dimisalkan

$$A(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma'(1) & \cdots & \Gamma'(s-2) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \cdots & \Gamma'(s-3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma(s-2) & \Gamma(s-3) & \cdots & \Gamma(0) \end{bmatrix}, \qquad b(s) = \begin{bmatrix} \Gamma'(s-1) \\ \Gamma'(s-2) \\ \vdots \\ \Gamma'(1) \end{bmatrix}$$

$$c(s) = \begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(s-1) \end{bmatrix}, \quad \text{dan} \quad \Phi'_*(s-1) = \begin{bmatrix} \Phi'_{s,1} \\ \Phi'_{s,2} \\ \vdots \\ \Phi'_{s,s-1} \end{bmatrix}$$

Sehingga persamaan (3.12) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} A(s) & b(s) \\ b'(s) & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_*(s-1) \\ \Phi'_{s,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(s) \\ \Gamma(s) \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Di mana

$$\begin{bmatrix} A(s) & b(s) \\ b'(s) & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi'_*(s-1) \\ \Phi'_{s,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(s)\Phi'_*(s-1) + b(s)\Phi'_{s,s} \\ b'(s)\Phi'_*(s-1) + \Gamma(0)\Phi'_{s,s} \end{bmatrix} \qquad (3.14)$$

Substitusikan (3.14) ke (3.13) sehingga diperoleh:

$$\begin{bmatrix} A(s)\Phi'_*(s-1) + b(s)\Phi'_{s,s} \\ b'(s)\Phi'_*(s-1) + \Gamma(0)\Phi'_{s,s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(s) \\ \Gamma(s) \end{bmatrix}$$

Atau,

$$A(s)\Phi'_*(s-1) + b(s)\Phi'_{s,s} = c(s) \qquad (3.15)$$

$$b'(s)\Phi'_*(s-1) + \Gamma(0)\Phi'_{s,s} = \Gamma(s) \qquad (3.16)$$

Dari (3.15) diperoleh:

$$A(s)\Phi'_*(s-1) = c(s) - b(s)\Phi'_{s,s}$$

$$\Phi'_*(s-1) = [A(s)]^{-1}c(s) - [A(s)]^{-1}b(s)\Phi'_{s,s} \qquad (3.17)$$

Substitusikan (3.17) pada (3.16) sehingga diperoleh:

$$b'(s)\{[A(s)]^{-1}c(s) - [A(s)]^{-1}b(s)\Phi'_{s,s}\} + \Gamma(0)\Phi'_{s,s} = \Gamma(s)$$

$$\{b'(s)[A(s)]^{-1}c(s) - b'(s)[A(s)]^{-1}b(s)\Phi'_{s,s}\} + \Gamma(0)\Phi'_{s,s} = \Gamma(s)$$

$$\{\Gamma(0) - b'(s)[A(s)]^{-1}b(s)\Phi'_{s,s}\}\Phi'_{s,s} = \Gamma(s) - b'(s)[A(s)]^{-1}c(s)$$

$$\Phi'_{s,s} = \{\Gamma(0) - b'(s)[A(s)]^{-1}b(s)\Phi'_{s,s}\}^{-1}\{\Gamma(s) - b'(s)[A(s)]^{-1}c(s)\} \qquad (3.18)$$

Oleh karena itu definisi matriks autoregresi parsial adalah sebagai berikut:

$$\wp(s) = \begin{cases} \Gamma^{-1}(0)\Gamma(1), & s = 1 \\ \{\Gamma(0) - b'(s)[A(s)]^{-1}b(s)\Phi'_{s,s}\}^{-1}\{\Gamma(s) - b'(s)[A(s)]^{-1}c(s)\} & s > 1 \end{cases}$$

(3.19)

3.3. Kriteria Pemilihan Model Terbaik

Untuk mengidentifikasi model yang memadai, dapat dilihat dari residual (sisaan) model. Residual dari model yang memadai adalah *white noise* dan umumnya bentuk yang dihasilkan dari tiap-tiap fungsi tidak dapat dibedakan. Sedangkan untuk kriteria pemilihan model adalah berdasarkan nilai AIC (*Akaike's Information Criterion*) yang didefinisikan sebagai berikut :

$$AIC(p) = T \log|\Sigma| + 2N \tag{3.20}$$

Dimana N adalah banyaknya parameter yang ditaksir dalam model dan T adalah banyaknya observasi yang diikutkan dalam proses perhitungan estimasi serta $|\Sigma|$ adalah determinan dari matriks *variance-covariance* residual. Orde p dipilih dimana kedua kriteria di atas memiliki nilai yang paling minimum (Basri, M. C. 2002).

3.4. Estimasi Parameter Model

Setelah dilakukan identifikasi model dan sudah diketahui orde dari model VARMAX, langkah selanjutnya adalah melakukan estimasi terhadap parameter model VARMAX. Estimasi yang efisien yaitu estimasi yang meminimumkan kuadrat selisih antara nilai estimasi dengan nilai parameter sebenarnya. Untuk data yang cukup banyak, estimasi yang efisien adalah estimasi yang memaksimumkan fungsi Likelihood.

Diperlukan taksiran interval untuk estimasi parameter. Di sini perlu diuji apakah $\hat{\theta}$ atau $\hat{\phi}$ berbeda secara signifikan dengan nol atau tidak. Jika $\hat{\theta} <$

$2SE(\hat{\theta})$, maka $\hat{\theta}$ tidak berbeda secara signifikan dengan nol. Begitu pula jika $\hat{\phi} < 2SE(\hat{\phi})$, maka $\hat{\phi}$ tidak berbeda secara signifikan dengan nol.

3.5. Pengujian Signifikansi Parameter

Uji signifikansi parameter model bertujuan untuk membuktikan bahwa model tersebut cukup memadai atau tidak. Ada dua macam uji signifikansi parameter yaitu uji serentak (uji F) dan uji individual (uji t).

3.5.1. Uji Serentak (uji F)

Uji serentak (uji F) digunakan untuk memeriksa signifikansi parameter secara serentak. Dengan adanya uji dapat diketahui apakah koefisien-koefisien yang terdapat dalam model secara signifikan nyata atau tidak.

Hipotesis : H_o : $\beta_0 = \beta_1 = \beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$

H_1 : minimal ada satu $\beta_i \neq 0; i = 1,2, \dots, p$

Statistik uji : $F_{hitung} = \frac{MSR}{MSE}$

Kriteria pengujian :

- Tolak H_o jika $F_{hitung} > F(\alpha, v_1, v_2)$
- Tolak H_0 jika P-Value < α=5%

Dimana v_1 adalah derajat bebas dari regresi

v_2 adalah derajat bebas dari error

P- Value adalah peluang bahwa nilai sampel akan sebesar atau lebih besar dari nilai yang sebenarnya jika H_0 benar (Sembiring, 1995).

3.5.2. Uji Individual (Uji t)

Sedangkan uji individual (uji-t) dilakukan untuk menguji pengaruh masing-masing parameter terhadap model.

Hipotesis : H_o : $\beta_0 = 0$

H_1 : $\beta_i \neq 0; i = 1,2, \dots, p$

Statistik uji : $t_{hitung} = \frac{\hat{\beta}_i}{stdev(\hat{\beta}_i)}$

Kriteria pengujian :

- Tolak H_o jika $\left|t_{hitung}\right| > t_{\alpha/2,(n-n_p)}$
- Tolak H_0 jika P-Value < α=5%

Dengan n adalah banyaknya observasi

3.6. Pengujian Asumsi Residual

Dalam pemodelan VARMAX, setelah model diidentifikasi dan parameternya telah ditaksir maka perlu dilakukan pengujian kesesuaian model sebelum digunakan untuk peramalan, kontrol dan kegunaan yang lain. Pengujian kesesuaian model meliputi pengujian *white noise error*, pengujian asumsi multinormal, dan pengujian varians konstan (homokedeastitas). Bila pengujian menghasilkan ketidaksesuaian baik dalam parameter maupun residual, maka perlu dilakukan beberapa pemodelan VARMAX lainnya yang memberikan kesesuaian yang tinggi. Oleh karena itu agar diperoleh model *time series* yang baik maka perlu dilakukan pengujian asumsi residual

3.6.1. Portmanteau Lack of Fit Test

Uji ini digunakan untuk menguji sampel ACF dan PACF secara statistik tidak signifikan atau tidak berbeda nyata dari nol. Dalam uji ini menggunakan semua residual sampel dari ACF sebagai satu unit untuk menguji hipotesa nol (H_0).

Hipotesisnya :

H_0 : $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0$

H_1 : minimal ada satu $\rho_j \neq 0$; j = 1,2,3,...,k

Statistik uji : $Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{k}(n-k)^{-1}\hat{\rho}_{k-p-q}^2$

Kriteria pengujian :

- Tolak H_0 jika $Q > \chi_{k-p-q}^2$
- Tolak H_0 jika P-Value < α=5%

Dengan $\hat{\rho}_n$ adalah autokorelasi residual

k adalah banyaknya lag residual

p, q adalah orde ARIMA

3.6.2. Uji Distribusi Multinormal Residual

Pengujian asumsi distribusi multinormal dilakukan dengan menggunakan hasil perhitungan nilai jarak kuadrat $\left(d_j^2\right)$ sebagai berikut:

$$d_j^2 = \left(X_j - \bar{X}\right)' S^{-1}\left(X_j - \bar{X}\right), j = 1,2,\ldots,n$$

Dimana X_j : pengamatan ke-j

S^{-1} : invers matriks varian kovarian

Hipotesisnya adalah:

H_o : Data berdistribusi multinormal

H_1 : Data tidak berdistribusi multinormal

Kriteria pengujian :

- Tolak H_o jika banyaknya nilai-nilai $d_j^2 \leq \chi^2_{(0,5;p)}$ kurang dari atau sama dengan 50% dari jumlah data.

Selain itu dapat juga dilihat dari plot χ^2 *multivriate* (untuk $p \geq 2$) dengan prosedur sebagai berikut:

1. Dapatkan $d_j^2 = \left(X_j - \bar{X}\right)' S^{-1}\left(X_j - \bar{X}\right), j = 1,2,\ldots,n$
2. Urutkan sehingga $d_{(1)}^2 \leq d_{(2)}^2 \leq \cdots \leq d_{(n)}^2$
3. Plot $\left(d_{(j)}^2, \chi^2_{\left(p,\frac{j-0,5}{n}\right)}\right)$ dimana $\chi^2_{\left(p,\frac{j-0,5}{n}\right)}$ adalah persentil $\frac{100(j-0,5)}{n}$ distribusi χ_p^2

plot ini akan cenderung membentuk garis lurus bila data berdistribusi normal *multivariate* dimana kelengkungan menunjukan penyimpangan kenormalan (Johnson, 1998).

3.6.3. Uji Homokedastisitas Residual

ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) merupakan suatu teknik pemodelan yang dilakukan apabila terdapat heteroskedastisitas dalam varian *error* yaitu dengan memodelkan model mean dan varian *error* secara simultan. Persamaan dari model ARCH dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$\hat{a}_t^2 = \alpha_1 + \alpha_1\hat{a}_{t-1}^2 + \alpha_2\hat{a}_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q\hat{a}_{t-q}^2 + \upsilon_t$$

Dimana υ_t adalah proses yang *white noise*. Jika nilai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ semuanya adalah nol maka estimasi dari varian adalah sama dengan α_0.

Untuk mendapatkan hasil yang baik, salah satu asumsi klasik yang harus dipenuhi adalah adanya homogenitas varians dari residual. Jika asumsi kehomogenitasan ini tidak terpenuhi maka dapat berakibat pada pengujian hipotesa sehingga kesimpulan dari pengujian hipotesis menjadi tidak valid.

Salah satu cara untuk mengetahui ada tidaknya heteroskedastisitas adalah dengan melakukan uji ARCH dengan hipotesis sebagai berikut:

H_o : Kuadrat residual tidak menunjukkan heterokedastisitas

H_1 : Kuadrat residual menunjukkan heterokedastisitas

Statistik uji TR^2 atau dalam SAS biasa disimbolkan LM (*Lagrange Multiplier*).

Dimana: T = Jumlah residual yang digunakan dalam perhitungan

R^2 = koefisien determinasi, yang diperoleh dengan meregresikan kuadrat residual $\hat{a}_t^2 = \alpha_1 + \alpha_1 \hat{a}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{a}_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_q \hat{a}_{t-q}^2$

Kriteria pengujian :

- Tolak H_o jika $TR^2 > \chi^2_{(q;0,05)}$.
- Tolak H_0 jika P-Value < α=5%