BAB III

PORTOFOLIO OPTIMAL MODEL INDEKS TUNGGAL

3.1 Model Indeks Tunggal

Willian Sharpe (1963) mengembangkan model yang dinamakan model indeks tunggal (*single-index model*). Model indeks tunggal didasarkan pada pengamatan bahwa harga dari suatu saham berfluktuasi searah dengan indeks pasar. Jika melakukan pengamatan maka pada saat ”pasar” membaik (yang ditunjukkan oleh indeks pasar yang tersedia) harga saham-saham individual meningkat. Demikian pula sebaliknya pada saat ”pasar” memburuk maka harga saham-saham individual akan menurun. Hal ini menunjukkan bahwa tingkat keuntungan suatu saham berkorelasi dengan perubahan pasar. Jika perubahan pasar dapat dinyatakan sebagai tingkat keuntungan indeks pasar, maka tingkat keuntungan suatu saham dapat dinyatakan sebagai,

$$R_i = a_i + \beta_i R_m \tag{3.1}$$

di mana,

R_i = *return* saham *i*.

a_i = bagian dari tingkat keuntungan saham *i* yang tidak dipengaruhi oleh perubahan pasar.

R_m = *return* indeks pasar.

β_i = beta, yaitu parameter yang mengukur perubahan yang diharapkan pada R_i jika terjadi perubahan pada R_m.

Persamaan tersebut membagi *return* suatu saham menjadi dua bagian, yaitu *return* yang tidak dipengaruhi perubahan pasar dan *return* yang dipengaruhi perubahan pasar. Bagian unik dari *return* α_i hanya berhubungan dengan peristiwa mikro yang mempengaruhi perusahaan tertentu saja, tidak mempengaruhi perusahaan-perusahaan secara umum. Bagian *return* yang berhubungan dengan *return* pasar ditunjukkan oleh β_i yang merupakan sensitivitas *return* suatu saham terhadap *return* pasar. β_i sebesar 2 artinya, jika terjadi kenaikan (penurunan) tingkat keuntungan indeks pasar sebesar 10% maka akan terjadi kenaikan (penurunan) R_i sebesar 20%.

Parameter a_i menunjukkan komponen *return* yang tidak dipengaruhi oleh perubahan pasar. Parameter ini bisa dipecah menjadi dua, yaitu nilai yang diekspektasi α_i dan kesalahan residual e_i. Dengan demikian maka,

$$a_i = \alpha_i + e_i$$

sehingga diperoleh persamaan model indeks tunggal sebagai berikut:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \tag{3.2}$$

di mana,

R_i = *return* saham *i*.

α_i = nilai ekspektasi dari *return* saham yang independen terhadap *return* pasar.

e_i = Kesalahan residual yang merupakan variabel acak dengan nilai ekspektasinya sama dengan nol atau $E(e_i) = 0$.

Apabila diperhatikan dengan seksama ternyata persamaan (3.2) tersebut merupakan persamaan regresi linier sederhana dengan R_i sebagai variabel dependen dan R_m sebagai variabel independen.

Model indeks tunggal dapat dinyatakan dalam bentuk ekspektasi *return*. Ekspektasi *return* dari model ini dapat diturunkan dari model (3.2) sebagai berikut

$$E(R_i) = E(\alpha_i + \beta_i R_m + e_i)$$

$$E(R_i) = E(\alpha_i) + E(\beta_i R_m) + E(e_i)$$

$$E(R_i) = \alpha_i + \beta_i E(R_m) \tag{3.3}$$

Model indeks tunggal mempunyai asumsi-asumsi yang harus dipenuhi yaitu:

1. Kesalahan residual saham *i* (e_i) tidak berkovarian dengan kesalahan residual saham j (e_j), yaitu $Cov(e_i, e_j) = 0$.

   karena $Cov(e_i, e_j) = E([e_i - E(e_i)].[e_j - E(e_j)])$

   $= E([e_i - 0][e_j - 0])$
   $= E(e_i.e_j)$

   sehingga diperoleh $Cov(e_i, e_j) = E(e_i.e_j) = 0$, artinya e_i independen atau tidak berkorelasi dengan e_j untuk setiap nilai *i* dan *j* dengan *i*≠*j* .

2. R_m dan e_i tidak saling berkovarian, yaitu $Cov(e_i, R_m) = 0$.

   karena $Cov(e_i, R_m) = E([e_i - E(e_i)].[R_m - E(R_m)])$

   $= E(e_i.[R_m - E(R_m)])$

   sehingga diperoleh $Cov(e_i, R_m) = E(e_i.[R_m - E(R_m)]) = 0$, artinya e_i independen atau tidak berkorelasi dengan R_m .

3.1.1 Variansi Return Saham Model Indeks Tunggal

Secara umum, variansi *return* dari suatu saham dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\sigma_i^2 = E[R_i - E(R_i)]^2 \tag{3.4}$$

dengan mensubstitusikan persamaan (3.2) dan (3.3) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\sigma_i^2 &= E[R_i - E(R_i)]^2 \\
&= E[(\alpha_i + \beta_i.R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i.E(R_m))]^2 \\
&= E[\alpha_i + \beta_i.R_m + e_i - \alpha_i - \beta_i.E(R_m)]^2 \\
&= E[\beta_i.R_m - \beta_i.E(R_m) + e_i]^2 \\
&= E[\beta_i.(R_m - E(R_m)) + e_i]^2 \\
&= E\left[\beta_i^{\,2}.(R_m - E(R_m))^2 + 2.\beta_i.(R_m - E(R_m)).e_i + e_i^{\,2}\right] \\
&= \beta_i^{\,2} E[R_m - E(R_m)]^2 + 2.\beta_i.E[R_m - E(R_m)].e_i + E[e_i]^2
\end{aligned}$$

karena $E[R_m - E(R_m)]^2$ merupakan variansi dari *return* pasar (σ_m^2) dan $E[R_m - E(R_m)].e_i = 0$ maka variansi *return* dari suatu saham adalah

$$\sigma_i^2 = \beta_i^{\,2}\sigma_m^2 + 0 + E[e_i]^2$$

Nilai $E[e_i]^2$ dapat dinyatakan sebagai $E[e_i]^2 = E[e_i - 0]^2$ karena $E(e_i) = 0$ maka $E[e_i]^2 = E[e_i - E(e_i)]^2$ yang merupakan variansi dari kesalahan residual untuk saham ke-*i* $(\sigma_{e_i}^2)$, sehingga variansi *return* saham ke-*i* model indeks tunggal adalah

$$\sigma_i^2 = \beta_i^{\,2}\sigma_m^2 + \sigma_{e_i}^{\;2} \tag{3.5}$$

Risiko yang dihitung berdasarkan persamaan (3.5) terdiri dari dua bagian yaitu risiko yang berhubungan dengan pasar yaitu $\beta_i^{\,2}\sigma_m^2$ dan risiko unik untuk masing-masing perusahaan yaitu $\sigma_{e_i}^{\;2}$.

3.1.2 Kovarian Return Antar Saham Model Indeks Tunggal

Secara umum, kovarian *return* antara dua saham *i* dan *j* adalah sebagai berikut:

$$\sigma_{ij} = E\left[(R_i - E(R_i)).(R_j - E(R_j))\right] \tag{3.6}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.2) dan (3.3) maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= E\left[(R_i - E(R_i)).(R_j - E(R_j))\right] \\
&= E\left[(\alpha_i + \beta_i.R_m + e_i) - (\alpha_i + \beta_i.E(R_m)).(\alpha_j + \beta_j.R_m + e_i) - (\alpha_j + \beta_j.E(R_m))\right] \\
&= E\left[(\alpha_i + \beta_i.R_m + e_i - \alpha_i - \beta_i.E(R_m)).(\alpha_j + \beta_j.R_m + e_j - \alpha_j - \beta_j.E(R_m))\right] \\
&= E\left[(\beta_i.R_m - \beta_i.E(R_m) + e_i).(\beta_j.R_m - \beta_j.E(R_m)) + e_j\right] \\
&= E\left[(\beta_i(R_m - E(R_m)) + e_i).(\beta_j(R_m - E(R_m)) + e_j)\right] \\
&= E\left[\beta_i(R_m - E(R_m)).\beta_j(R_m - E(R_m)) + \beta_i(R_m - E(R_m)).e_j + \beta_j(R_m - E(R_m)).e_i + e_i.e_j\right] \\
&= \beta_i.\beta_j E\left[R_m - E(R_m)\right]^2 + \beta_i E\left[(R_m - E(R_m)).e_j\right] + \beta_j E\left[(R_m - E(R_m)).e_i\right] + E\left[e_i.e_j\right]
\end{aligned}$$

karena $E\left[(R_m - E(R_m)).e_j\right] = 0$ dan $E\left[e_i.e_j\right] = 0$

sehingga kovarian *return* antara saham *i* dan *j* adalah

$$\sigma_{ij} = \beta_i.\beta_j E\left[R_m - E(R_m)\right]^2$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2 \tag{3.7}$$

Hal ini menunjukkan kovarian semata-mata tergantung pada risiko pasar, artinya model indeks tunggal menunjukkan bahwa satu-satunya alasan mengapa saham-saham "bergerak bersama" adalah bereaksi terhadap gerakan pasar.

3.2 Model Indeks Tunggal untuk Portofolio

Alasan dipergunakannya model indeks tunggal adalah mengurangi jumlah saham yang harus ditaksir. Dalam melakukan analisis portofolio pada dasarnya harus memperkirakan $E(R_p)$ dan σ_p .

Dalam model indeks tunggal beta portofolio (β_p) merupakan rata-rata tertimbang dari beta saham-saham yang membentuk portofolio tersebut.

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \beta_i \tag{3.8}$$

Sama halnya untuk alpha portofolio (α_p) yaitu,

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \alpha_i \tag{3.9}$$

dengan mensubstitusikan (3.3) pada (2.8) maka diperoleh,

$$E(R_p) = \sum_{j=1}^{n} w_i . E(R_i)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{n} w_i .(\alpha_i + \beta_i E(R_m)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} w_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} w_i \beta_i E(R_m) \end{aligned} \tag{3.10}$$

selanjutnya substitusikan (3.8) dan (3.9) pada (3.10), sehingga diperoleh ekspektasi *return* porofolio yaitu

$$E(R_p) = \alpha_p + \beta_p E(R_m) \tag{3.11}$$

Sedangkan untuk variansi portofolio,

$$\sigma_p^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\beta_i\right)^2 \sigma_m{}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\sigma_{e_i}\right)^2$$

$$\sigma_p^2 = \beta_p{}^2\sigma_m{}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\sigma_{e_i}\right)^2 \qquad (3.12)$$

Untuk portofolio yang didiversifikasikan, $\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\sigma_{e_i}\right)^2$ adalah risiko tidak sistematik yang akan semakin kecil nilainya dengan semakin banyaknya saham di dalam porofolio dan akan bernilai nol jika jumlah saham sangat besar. Misalnya portofolio terdiri dari *n* saham dengan bobot nilai untuk masing-masing saham $w_i = \frac{1}{n}$. Substitusikan nilai bobot ke dalam persamaan (3.12) maka diperoleh,

$$\begin{aligned}\sigma_i^2 &= \beta_p{}^2\sigma_m{}^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\sigma_{e_i}\right)^2 \\ &= \beta_p{}^2\sigma_m{}^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}\sigma_{e_i}{}^2 \\ &= \beta_p{}^2\sigma_m{}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{e_i}{}^2}{n}\end{aligned}$$

Dari persamaan di atas terlihat bahwa semakin besar nilai *n* maka nilai $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\sigma_{e_i}{}^2}{n}$ akan semakin kecil dan menuju nol untuk nilai *n* yang besar, karena nilai berapa pun dibagi dengan nilai yang sangat besar hasilnya akan mendekati nilai nol. Dengan demikian untuk portofolio yang didiversifikasikan dengan jumlah *n* yang banyak, risiko tidak sistematik akan hilang dan hanya risiko sistematik yang masih tertinggal. Akibatnya, risiko portofolio yang didiversifikasi dengan baik hanya terdiri dari unsur risiko sistematik saja sebagai berikut

$$\sigma_i^2 = \beta_p{}^2 \sigma_m{}^2 \quad (3.13)$$

Penentuan portofolio menggunakan model indeks tunggal dapat digunakan untuk menyederhanakan perhitungan dalam model Markowitz. Untuk menghitung *return* dan risiko portofolio, model Markowitz membutuhkan parameter-parameter input berupa ekspektasi *return* masing-masing saham, variansi masing-masing saham dan kovarian antar saham.

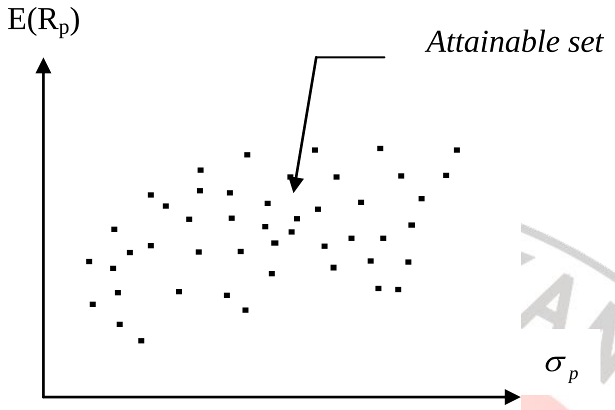
Untuk menghitung risiko portofolio yang terdiri dari *n* buah saham, model Markowitz membutuhkan perhitungan sebanyak *n* buah variansi dan *n(n-1)* kovarian. Oleh karena kovarian sifatnya simetri, yaitu $Cov(R_i, R_j) = Cov(R_j, R_i)$, maka perhitungan kovarian model Markowitz dapat dilakukan separuhnya saja yaitu sebanyak $\frac{n(n-1)}{2}$. Dengan demikian jumlah perhitungan yang dubutuhkan untuk menghitung risiko portofolio model Markowitz adalah sebanyak $n + \frac{n(n-1)}{2}$. Sedangkan dengan menggunakan model indeks tunggal risiko portofolio hanya membutuhkan $2n+1$ parameter. Hal ini diperoleh dari persamaan (3.12), yaitu β_i untuk masing-masing saham ke-*i* sebanyak *n* buah, $\sigma_{e_i}{}^2$ juga untuk masing-masing saham ke-*i* sebanyak *n* buah dan sebuah variansi *return* (σ_m^2). Perbandingan jumlah parameter model Markowitz dengan model indeks tunggal dapat dilihat pada tabel berikut:

Tabel 3.1 Jumlah parameter model Markowitz dengan model indeks tunggal

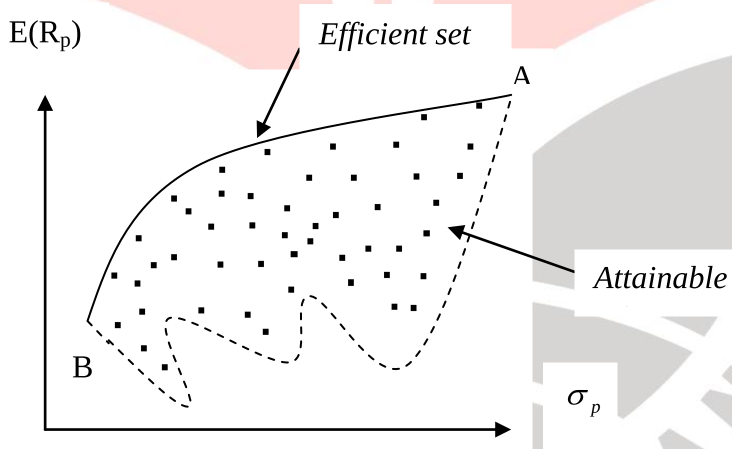
Jumlah Saham (n)	Jumlah Parameter	
	Model Marokwitz $n+\frac{n(n-1)}{2}$	**Model Indeks Tunggal** $2n+1$
1	**1**	**3**
2	**3**	**5**
3	**6**	**7**
4	**10**	**9**
5	**15**	**11**
6	**21**	**13**
7	**28**	**15**
8	**36**	**17**
9	**45**	**19**
10	**55**	**21**
20	**210**	**41**
50	**1275**	**101**
100	**5.050**	**201**
200	**20.100**	**401**
500	**1.252.50**	**1.001**

3.2.1 Portofolio Optimal dengan Aktiva Bebas Risiko

Investor dapat memilih kombinasi dari saham-saham untuk membentuk portofolionya. Seluruh set yang memberikan kemungkinan portofolio yang dapat dibentuk dari kombinasi *n*-saham yang tersedia disebut dengan *opportunity set* atau *attainable set.* Semua titik di *attainable set* menyediakan semua kemungkinan portofolio baik yang efisien maupun yang tidak efisien yang dapat dipilih oleh investor. Kumpulan dari portofolio yang efisien ini disebut dengan *efficient set* atau *efficient frontier.* Tidak semua portofolio yang tersedia di *attainable set* merupakan portofolio yang efisien. Hanya portofolio yang memberikan ekspektasi *return* terbesar dengan risiko yang sama atau portofolio yang memberikan risiko terkecil dengan ekspektasi *return* yang sama yang merupakan portofolio efisien.



(a) *Attainable set*



(b) *Attainable set* dan *efficient set*

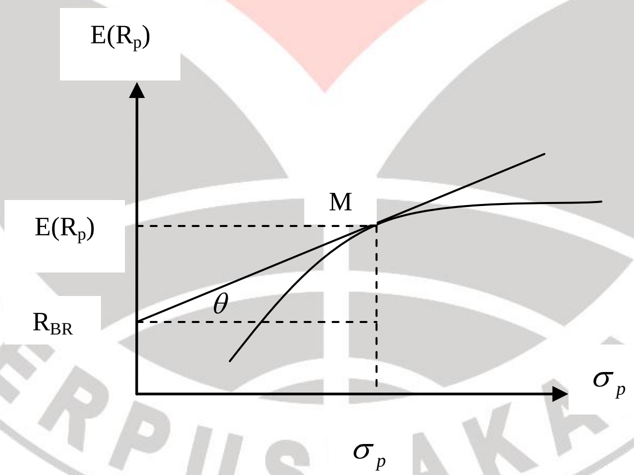
Gambar 3.1 Attainable set dan Efficient set untuk portofolio dengan *n*-saham

Portofolio efisien terletak di *efficient set* atau *efficient frontier* yang merupakan kurva AB.

Portofolio-portofolio efisien merupakan portofolio-portofolio yang baik tetapi bukan yang terbaik. Hanya ada satu portofolio yang terbaik, yaitu portofolio optimal. Suatu portofolio optimal merupakan portofolio efisien tetapi portofolio efisien belum tentu portofolio optimal.

Portofolio optimal secara umum tidak bergantung dengan preferensi investor dan dapat diperoleh menggunakan aktiva bebas risiko. Suatu aktiva bebas risiko dapat didefinisikan sebagai aktiva yang mempunyai ekspektasi *return* tertentu dengan risiko sama dengan nol.

Portofolio optimal merupakan hasil persinggungan garis lurus dari titik R_{BR} (*return* aktiva bebas risiko) dengan kurva *efficient set.* Portofolio optimal secara umum adalah portofolio di titik M pada gambar berikut ini.



Gambar 3.2 Portofolio Optimal

Titik M ini merupakan titik persinggungan antara kurva *efficient set* dengan garis lurus yang mempunyai sudut atau *slope* (θ) terbesar.

Nilai *slope* ini adalah

$$\theta_p = \frac{E(R_p) - R_{BR}}{\sigma_p} \tag{3.14}$$

di mana,

θ_p = *slope* dari portofolio optimal

$E(R_p)$ = ekspektasi *return* portofolio optimal

R_{BR} = *return* aktiva bebas risiko

σ_p = risiko portofolio optimal

Perhitungan untuk menentukan portofolio optimal akan sangat dimudahkan jika terdapat sebuah angka yang dapat menentukan apakah suatu saham dapat dimasukkan ke dalam suatu portofolio atau tidak. Angka tersebut adalah *excess return to beta ratio* yaitu,

$$ERB_i = \frac{E(R_i) - R_{BR}}{\beta_i} \tag{3.15}$$

di mana,

ERB_i = *excess return to beta* saham *i*

$E(R_i)$ = ekspektasi *return* berdasarkan model indeks tuggal untuk saham *i*

R_{BR} = *Return* aktiva bebas risiko

β_i = Beta saham ke-*i*

Excess return to beta didefinisikan sebagai selisih ekspektasi *return* dengan *return* aktiva bebas risiko. Rasio ERB ini untuk mengukur kelebihan *return* terhadap satu unit risiko yang tidak dapat didiversifikasikan yang diukur dengan beta.

3.2.2 Portofolio Optimal Berdasarkan Model Indeks Tunggal

Portofolio yang optimal akan berisi dengan aktiva-aktiva yang mempunyai nilai rasio ERB yang tinggi. Aktiva-aktiva dengan rasio ERB yang rendah tidak akan dimasukkan ke dalam portofolio optimal. Dengan demikian diperlukan sebuah titik pembatas *(cut-off point)* yang menentukan batas nilai ERB berapa yang dikatakan tinggi. Besarnya titik pembatas ini dapat ditentukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Urutkan saham-saham berdasarkan nilai ERB terbesar ke nilai ERB terkecil. Saham-saham dengan nilai ERB terbesar merupakan kandidat untuk dimasukkan ke portofolio optimal.
2. Hitung nilai A_i dan B_i untuk masing-masing saham ke-*i* sebagai berikut:

$$A_i = \frac{\left[E(R_i) - R_{BR}\right].\beta_i}{\sigma_{e_i}{}^2} \tag{3.16}$$

$$B_i = \frac{\beta_i^2}{\sigma_{e_i}{}^2} \tag{3.17}$$

3. Hitung nilai C_i yang mana merupakan nilai C untuk saham ke-*i* yang dihitung dari kumulasi nilai-nilai A_1 sampai dengan A_i dan nilai-nilai B_1 sampai dengan B_i.

$$C_i = \frac{\sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n} A_i}{1 + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n} B_i} = \frac{\sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\left[E(R_i) - R_{BR}\right].\beta_i}{\sigma_{e_i}{}^2}}{1 + \sigma_m^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i{}^2}{\sigma_{e_i}{}^2}} \tag{3.18}$$

4. Besarnya *cut-off point* (C*) adalah nilai C_i di mana nilai ERB terakhir kali masih lebih besar dari nilai C_i.

Saham-saham yang membentuk portofolio optimal adalah saham-saham yang mempunyai nilai ERB lebih besar atau sama dengan nilai ERB di titik C*. Saham-saham yang mempunyai nilai ERB lebih kecil dengan ERB di titik C* tidak diikutsertakan dalam pembentukan portofolio optimal.

Setelah saham-saham yang membentuk portofolio optimal telah dapat ditentukan, maka harus ditentukan pula besar proporsi masing-masing saham tersebut di dalam portofolio optimal. Besarnya proporsi untuk saham ke-*i* adalah

$$w_i = \frac{Z_i}{\sum_{j=1}^{k} Z_j} \tag{3.19}$$

Untuk $Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma_{e_i}^{\ 2}}\left(ERB_i - C^*\right)$

di mana,

w_i = Proporsi saham ke-*i*

k = jumlah saham di portofolio optimal

β_i = beta saham ke-*i*

$\sigma_{e_i}^{\ 2}$ = variansi dari kesalahan residual saham ke-*i*

ERB_i = *Excess return to beta* saham ke-*i*

C* = nilai *cut-off point* yang merupakan nilai C_i di mana nilai ERB terakhir kali masih lebih besar dari nilai C_i.