BAB III

BAGAN KENDALI T^2 HOTELLING

Statistik adalah seni pengambilan keputusan tentang suatu proses atau populasi berdasarkan suatu analisis informasi yang terkandung di dalam suatu sampel dari populasi itu (Montgomery, 1990). Metode statistika yang di dalamnya diterapkan teknik-teknik statistik memainkan peranan penting dalam jaminan kualitas.

Untuk menjamin suatu proses produksi berlangsung dengan baik dan stabil atau produk yang dihasilkan selalu dalam daerah standar, perlu dilakukan pemeriksaan terhadap titik origin (titik asal) dan hal-hal yang berhubungan dengan titik asal tersebut, dalam rangka meningkatkan dan memelihara kualitas produk agar sesuai dengan harapan. Hal ini yang disebut *Statistical Process Control* (SPC) atau lebih dikenal sebagai pengendalian kualitas secara statistik.(Novyanto : 2007).

SPC merupakan metode yang dapat digunakan untuk mengontrol dan memonitor suatu proses. Salah satu alat yang dapat digunakan untuk mengontrol dan memonitor kestabilan suatu proses adalah bagan kendali (*control chart*). Bagan kendali ini merupakan suatu alat yang secara grafis digunakan untuk memonitor apakah suatu aktivitas (proses) dapat diterima sebagai suatu proses yang terkendali. Bagan kendali (*control chart*) pertama kali diperkenalkan oleh Walter A. Shewhart, di laboratorium *Bell Telephone*. Bagan kendali ini lebih dikenal sebagai bagan Shewhart univariat, karena bagan ini digunakan untuk memonitor serta mengontrol suatu proses yang hanya melibatkan satu variabel.

Awalnya bagan Shewhart univariat juga diterapkan untuk menyelesaikan kasus multivariat. Akibatnya, pendekatan ini menghasilkan kesimpulan yang kurang tepat. Harold Hotelling pada tahun 1947 memperkenalkan suatu metode statistika yang disebut T^2 Hotelling, yang dapat digunakan untuk membangun bagan kendali yang mampu menghitung lebih dari dua karakteristik sekaligus.

Statistical Process Control (SPC) pada dasarnya mempunyai tujuan yang utama yaitu dalam peningkatan dan pemeliharaan kualitas. Dengan menstabilkan proses dan mengurangi variabilitas. Dalam SPC dikenal dengan adanya *"seven tools"*. *Seven tools* dari SPC ini adalah tujuh alat yang menggunakan metode grafik sederhana untuk menyelesaikan masalah. Salah satu diantaranya yaitu, bagan kendali (*chart control*). (Smith, 1998: 5)

Bagan kendali adalah suatu alat yang secara grafis menilai karakterisik kualitas yang dimonitor, digambarkan sepanjang sumbu *y*, sedangkan sumbu *x* menggambarkan sampel atau *subgroup* dari karakteristik kualitas tersebut. Secara umum terdapat tiga garis pada grafik pengendali, yaitu garis tengah (*center line*) adalah garis yang menunjukkan nilai rata-rata dari karakteristik kualitas yang diplot pada grafik, batas pengendali atas (*upper limit control*), dan batas pengendali bawah (*lower limit control*) digunakan untuk membuat keputusan suatu proses. Apabila terdapat data yang berada di luar batas pengendali atas dan batas pengendali bawah serta pada pola data tidak acak maka dapat disimpulkan bahwa data berada di luar kendali statistik. Seperti yang telah diuraikan pada bab pertama, bagan kendali yang digunakan untuk mengontrol dan memonitor hanya satu karakteristik kualitas disebut Bagan Kendali Shewhart (bagan kendali univariat), sedangkan untuk karakteristik yang lebih dari satu disebut bagan kendali multivariat. Fokus kajian pada tugas akhir ini adalah bagan kendali T^2 Hotelling, yang berdasarkan pada statistik T^2 Hotelling.

Selanjutnya akan diuraikan mengenai distribusi T^2 Hotelling, yang digunakan untuk membangun batas-batas dari bagan kendali T^2 Hotelling.

3.1 Distribusi T^2 Hotelling

Sebelumnya akan diturunkan beberapa sifat berikut ini:

Lemma 3.1:

Misalkan $U \sim N_p(\mu, \Sigma)$, $U^{(1)} = (u_1, u_2, \ldots, u_{p-1})^T$, $\mu^{(1)} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1})^T$, dan $\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{1p} \\ \sigma_{p1}^T & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$ maka distribusi bersyarat dari U_p diberikan $U^{(1)} = \mu^{(1)}$ adalah $N_1\left(\beta_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j \mu_j, \frac{1}{\sigma^{pp}}\right)$ dengan $\sigma^{pp} = \left(\sigma^{pp} - \sigma_{p1}^T \Sigma^{-1} \sigma_{1p}\right)^{-1}$.

Bukti:

Berdasarkan teorema 2.4.7 untuk $q = p-1$, jika Σ_{11} adalah matriks variansi-kovariansi dari $U^{(1)}$, maka distribusi bersyarat dari U_p diberikan $U^{(1)}$ adalah normal dengan vektor *mean*

$$
\begin{aligned}
E\left(U_p \middle| u^{(1)}\right) &= \mu_p + \sigma_{p1}^T \Sigma_{11}^{-1}\left(u^{(1)} - \mu^{(1)}\right) \\
&= \mu_p - \sigma_{p1}^T \Sigma_{11}^{-1} \mu^{(1)} + \mu_p + \sigma_{p1}^T \Sigma_{11}^{-1} u^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$= \beta_0 + \beta u^{(1)}$$

dengan $\beta_0 = \mu_p - \sigma_{p1}^T \Sigma_{11}^{-1} \mu^{(1)}$ dan $\beta = \sigma_{p1}^T \Sigma_{11}^{-1}$.

Selanjutnya jika dituliskan $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1})$, maka akan diperoleh

$E\left[U_p \middle| u^{(1)}\right] = \beta_0 + \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j u_j$. Karena Σ definit positif, akibatnya berdasarkan lampiran A.3 yaitu, $|\Sigma| = |\Sigma_{11}|\left(\sigma_{pp} - \sigma_{p1}^T \Sigma_{11}^{-1} \sigma_{1p}\right)$, sehingga

$$Var\left[U_p \middle| u^{(1)}\right] = \frac{|\Sigma|}{|\Sigma_{11}|}$$

$$= \sigma_{pp} - \sigma_{p1}^T \Sigma_{11}^{-1} \sigma_{1p} = \frac{1}{\sigma^{pp}}, \text{ dengan } \sigma^{pp} = \left(\sigma_{pp} - \sigma_{p1}^T \Sigma_{11}^{-1} \sigma_{1p}\right)^{-1}.$$

Lemma 3.2:

Pandang model regresi linear $Y = k\beta + \varepsilon$, dengan k adalah matriks berukuran $(m \times p)$ dengan $\text{rank}(\text{k}) = p \leq m$ dan $\varepsilon \sim N_r(0, \sigma^2 I_m)$.

Misalkan $Q = \|Y - k\beta\|^2 = \min_{\beta} \|Y - k\beta\|^2$ maka $Q \sim \sigma^2 \chi^2_{(m-p)}$ dan $Q = \frac{1}{W^{pp}}$ dengan

$W^{pp} = \left(Y^T Y - Y^T k (k^T k)^{-1} k^T Y\right)^{-1}$, $W = \begin{pmatrix} k^T \\ Y^T \end{pmatrix}$, dan $(kY) = \begin{pmatrix} k^T k & k^T Y \\ Y^T k & Y^T Y \end{pmatrix}$.

Bukti:

Karena $\varepsilon \sim N_r(0, \sigma^2 I_m)$, maka *mean* dan variansi dari *Y* adalah :

$$E(Y) = E[k\beta + \varepsilon] = E(k\beta) + E(\varepsilon)$$

$$= k\beta + 0 = k\beta$$

dan variansi dari *Y* adalah:

$$Var(Y) = Var[k\beta + \varepsilon] = Var(\varepsilon) = \sigma^2 I_m$$

Akibatnya $Y \sim N_m(k\beta, \sigma^2 I_m)$.

Untuk menentukan distribusi dari *Q*, maka dituliskan persamaan sebagai berikut:

$s^2 = \dfrac{(Y - k\beta)^T (Y - k\beta)}{m - p} = \dfrac{Q}{m - p}$. Mengingat $Y = k(k^T k)^{-1} k^T$, maka diperoleh hubungan berikut: $Q = (m - p)s^2$

$$= (Y - k\beta)^T (Y - k\beta)$$

$$= ((I_m - p)Y)^T (I_m - p)Y$$

$$= Y^T (I_m - p)^T (I_m - p)Y$$

$$= Y^T (I_m - p)Y$$

Karena $(I_m - p)$ idempoten, maka Q $= Y^T (I_m - p)Y$.

Kemudian karena $(Y - k\beta) \sim N_r(0, \sigma^2 I_m)$ dan $(I_m - p)$ simetri dan idempoten dengan $rank(I_m - p) = m - p$, maka berdasarkan lampiran,

$$(Y - k\beta)^T (I_m - p)(Y - k\beta) \sim \sigma^2 \chi^2_{m-p}$$

Akan tetapi, $(Y - k\beta)^T (I_m - p)(Y - k\beta)$ diuraikan sebagai berikut:

$$= Y^T (I_m - p)Y - (k\beta)^T (I_m - p)k\beta - Y^T (I_m - p)k\beta + (k\beta)^T (I_m - p)k\beta$$

Sedangkan berdasarkan teorema A.2.9 (iii) pada lampiran A.2, $(I_m - p)k = 0$

Jadi $(Y - k\beta)^T (I_m - p)(Y - k\beta) = Y^T (I_m - p)Y = (m - p)s^2$

Atau $Q = (m-p)s^2 \sim \sigma^2 \chi^2_{(m-p)}$

Selanjutnya dapat ditulis $Q = Y^T(I_m - p)Y = (m-p)s^2 = Y^TY = Y^Tk(k^Tk)^{-1}k^TY$

Berdasarkan teorema A.2.8 pada lampiran A.2, $|W| = |k^Tk|(Y^TY - Y^Tk(k^Tk)k^TY)$.

Akibatnya $\dfrac{|W|}{|k^Tk|} = (Y^TY - Y^Tk(k^Tk)^{-1}k^TY) = \dfrac{1}{W^{pp}}$,

dengan $W_{pp} = (Y^TY - Y^Tk(k^Tk)^{-1}k^TY)^{-1}$.

Lemma 3.3:

Misalkan $W \sim W_p(m,\Sigma)$, dengan m > p.

Jika $\sigma_{pp} = (\sigma_{pp} - \sigma_{p1}^T\Sigma_{11}^{-1}\sigma_{1p})^{-1}$ dan $W_{pp} = (Y^TY - Y^Tk(k^Tk)^{-1}k^TY)^{-1}$ dengan $X = X^{(p)}$ dan $k = (X^{(1)},\ldots,X^{(p-1)})$. Maka

$(i)\ \dfrac{\sigma^{pp}}{W^{pp}} \sim \chi^2_{(m-p+1)}$

$(ii)\ \dfrac{c^T\Sigma^{-1}c}{c^TW^{-1}c} \sim \chi^2_{(m-p+1)}, \ \forall\, vektor\ c \neq 0$

Bukti:

(i) Karena $W \sim W_p(m,\Sigma)$ dapat ditulis W= $\sum_{k=1}^{m} X_kX_k^T$, dengan $X_1, X_2,\ldots,X_m$ saling bebas dan $X_k \sim N_p(0,\Sigma)$, $\forall k = 1,2,\ldots,m$.

Jika $X_k = (X_{k1}, X_{k2},\ldots,X_{kp})^T$ maka berdasarkan lemma 3.1 dengan $\mu = 0$, distribusi bersyarat dari X_{kp} diketahui $X_{k1}, X_{k2},\ldots,X_{k(p-1)}$ adalah $N_1\left(\sum_{j=1}^{p-1}\beta_jX_{kj}, \dfrac{1}{\sigma^{pp}}\right)$ dengan $\sigma^{pp} = (\sigma^{pp} - \sigma_{p1}^T\Sigma_{11}^{-1}\sigma_{1p})^{-1}$. Selanjutnya berdasarkan lemma 3.2 untuk model $X_{kp} = \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j X_{kj} + \varepsilon$ dengan $\varepsilon \sim N_1(0, \sigma^2)$ diperoleh $Q = \min_{\beta} \sum_{k=1}^{m} \left(X_{kp} - \sum_{j=1}^{p-1} \beta_j X_{kj} \right) \sim \frac{1}{\sigma_{pp}} \chi^2_{(m-p+1)}$.

Karena distribusi dari Q tidak bergantung dengan X_{kj}, maka Q dan X_{kj} saling bebas $\forall k = 1,2,...,m$ dan $j = 1,2,..., p-1$. Jadi Q dan $W_{jl} = \sum_{k=1}^{m} X_{kj} X_{kl}$ juga saling bebas $\forall j, l \neq p$. Perhatikan bahwa $W = X^T X = \begin{bmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^{(1)}, & \cdots, & X^{(p-1)} \end{bmatrix}$ dengan $X^{(p)} = \left(X_{1j}, X_{2j}, \ldots, X_{rj} \right)^T$.

Tulis $Y = X^{(p)}$ dan $X = \left(X^{(1)}, \cdots, X^{(p-1)} \right)$. Seperti pada lemma 3.2 maka $Q = \frac{1}{W^{pp}}$ dan $\frac{\sigma^{pp}}{W^{pp}} \sim \chi^2_{(m-p+1)}$ dimana $W_{pp} = \left(Y^T Y - Y^T k \left(k^T k \right)^{-1} k^T Y \right)^{-1}$ dengan $Y = X^{(p)}$ dan $k = \left(X^{(1)}, \cdots, X^{(p-1)} \right)$

(ii) Misalkan C sebarang matriks orthogonal berukuran $(p \times p)$ dan baris terakhir sama dengan $\|C\|^{-1} C^T$.dari teorema 3.4 diketahui $CWC^T \sim W_q \left(m, C\Sigma C^T \right)$ selanjutnya $CWC^T = CW^{-1}C^T$ dan $\left(C\Sigma C^T \right)^{-1} = C\Sigma^{-1}C^T$. Dengan menerapkan lemma 3.3 (i) pada CWC^T, maka

$$\frac{\left(C^T \Sigma^{-1} C \right)}{C^T W^{-1} C} = \frac{C^T \Sigma^{-1} C / \|C\|^2}{C^T W^{-1} C / \|C\|^2}$$

$$= \frac{\left(C^T \Sigma^{-1} C \right)_{pp}}{\left(C^T W^{-1} C \right)_{pp}} = \frac{\left(C\Sigma C^T \right)^{pp}}{\left(CWC^T \right)^{pp}} \sim \chi^2_{(m-p+1)}$$

Teorema 3.5:

Misalkan $Y \sim N_p(0,\Sigma)$, $W \sim W_p(m,\Sigma)$ serta Y dan W saling bebas, jika $T^2 = mY^T W^{-1} Y$, maka $T^2 \sim \frac{mp}{m-p+1} F_{p,(m-p+1)}$.

Bukti:

Berdasarkan teorema di atas $T^2 = mY^T W^{-1} Y$ maka $\frac{T^2}{m} = Y^T W^{-1} Y$

Perhatikan $\frac{T^2}{m} = Y^T W^{-1} Y$

$$= Y^T W^{-1} Y \times \frac{Y^T \Sigma^{-1} Y}{Y^T \Sigma^{-1} Y} = \frac{Y^T W^{-1} Y}{Y^T \Sigma^{-1} Y} \times Y^T \Sigma^{-1} Y$$

$$= \frac{1}{\frac{Y^T \Sigma^{-1} Y}{Y^T W^{-1} Y}} Y^T \Sigma^{-1} Y = \frac{Y^T \Sigma^{-1} Y}{\left[\frac{Y^T \Sigma^{-1} Y}{Y^T W^{-1} Y}\right]} = \frac{G}{H}$$

Dengan $G = Y^T \Sigma^{-1} Y$ dan $H = \left[\frac{Y^T \Sigma^{-1} Y}{Y^T W^{-1} Y}\right]$

Berdasarkan lemma 3.3 (ii), distribusi bersyarat dari H diberikan Y = C adalah χ^2_{m-p+1}. Karena G adalah fungsi dari Y, maka H dan G saling bebas. Dari teorema 2.4.8 maka $G \sim \chi^2_{(p)}$, sehingga $\frac{T^2}{m}$ adalah rasio dari dua variabel chi-kuadrat yang saling bebas. Jadi $\frac{m-p+1}{p}\frac{T^2}{m} = \frac{G/p}{H/m-p+1} \sim F_{p,(m-p+1)}$

Maka $T^2 = \frac{mp}{m-p+1} F_{p,(m-p+1)}$.

Akibat 1:

Jika $X \sim N_p\left(\mu, \lambda^{-1}\Sigma\right)$, $W \sim W_p(m, \Sigma)$ serta Y dan W saling bebas, maka $T^2 = \lambda m(X-\mu)^T W^{-1}(X-\mu)$ atau $T^2 = \lambda(X-\mu)^T\left(\frac{W}{m}\right)^{-1}(X-\mu)$ memenuhi $\frac{m-p+1}{p}\frac{T^2}{m} \sim F_{p,(m-p+1)}$.

Bukti:

Misalkan $Y = \sqrt{\lambda}(X-\mu)$, maka untuk mencari distribusi dari Y digunakan teknik FPM. FPM dari Y adalah :

$$
\begin{aligned}
M_{Y(t)} &= E\left(\exp\left(t^T Y\right)\right) \\
&= E\left(\exp\left(t^T\sqrt{\lambda}(X-\mu)\right)\right) \\
&= E\left[\exp\left(t^T\sqrt{\lambda}X\right)\right]E\left[\exp\left(-t^T\sqrt{\lambda}\mu\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left(\left(\sqrt{\lambda}t\right)^T X\right)\right]E\left[\exp\left(-\left(\sqrt{\lambda}t\right)^T\mu\right)\right] \\
&= E\left[\exp\left(\left(\sqrt{\lambda}t\right)^T X\right)\right]\exp\left(-\left(\sqrt{\lambda}t\right)^T\mu\right) \\
&= \left[\exp\left(\left(\sqrt{\lambda}t\right)^T\mu + \frac{1}{2}\left(\sqrt{\lambda}t\right)^T\left(\lambda^{-1}\Sigma\right)\left(\sqrt{\lambda}t\right)\right)\right]\exp\left(-\sqrt{\lambda}t^T\mu\right) \\
&= \left[\exp\left(\left(\sqrt{\lambda}t\right)^T\mu + \frac{1}{2}\sqrt{\lambda}t^T\left(\frac{\Sigma}{\lambda}\right)\sqrt{\lambda}t\right)\right]\exp\left(-\sqrt{\lambda}t^T\mu\right) \\
&= \left[\exp\left(\sqrt{\lambda}t^T\mu + \frac{1}{2}\lambda t^T\left(\frac{\Sigma}{\lambda}\right)t - \sqrt{\lambda}t^T\mu\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}t^T\Sigma t\right)
\end{aligned}
$$

Jadi $Y = \sqrt{\lambda}(X-\mu) \sim N_p(0, \Sigma)$. Akibatnya berdasarkan teorema 3.5

$$
\begin{aligned}
T^2 &= mY^T W^{-1} Y \\
&= \lambda m(X-\mu)^T W^{-1}(X-\mu)
\end{aligned}
$$

$$= \lambda(X-\mu)^T\left(\frac{W}{m}\right)^{-1}(X-\mu) \text{ memenuhi } \frac{m-p+1}{p}\frac{T^2}{m} \sim F_{p,(m-p+1)}.$$

Akibat 2:

Jika $X_1, X_2, \cdots, X_m$ adalah sampel acak dari $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ dan $(m-1) \geq p$, maka

$T^2 = m(\overline{X}-\mu)^T S^{-1}(\overline{X}-\mu)$ memenuhi $\frac{m-p}{p}\frac{T^2}{m-1} \sim F_{p,(m-p)}$.

Bukti:

Berdasarkan penjelasan sebelumnya $\overline{X} \sim N_p\left(\mu, \frac{\Sigma}{m}\right)$, $m = (m-1)S \sim W_p(m-1, \Sigma)$.

Karena $\overline{X}$ saling bebas dengan S maka dengan mengganti $\frac{W}{m}$ oleh $S = \frac{m}{m-1}$

dan $\lambda = m$ seperti pada akibat 1 dari teorma 3.5, diperoleh :

$$T^2 = \lambda(\overline{X}-\mu)^T\left(\frac{W}{m}\right)^{-1}(\overline{X}-\mu)$$

$$= m(\overline{X}-\mu)^T S^{-1}(\overline{X}-\mu) \text{ memenuhi } \frac{m-p}{p}\frac{T^2}{m-1} \sim F_{p,(m-p)}.$$

3.2 Bagan Kendali T^2 Hotelling dengan Observasi Berupa Subgrup

Pada bagian ini akan dibahas mengenai pengendalian proses secara statistik dengan menggunakan statistik T^2 Hotelling. Seperti yang telah dijelaskan pada pendahuluan bab 3, alat yang digunakan untuk memonitor serta mengontrol suatu proses adalah bagan kendali, sehingga untuk selanjutnya akan dijelaskan tentang prosedur untuk membangun bagan kendali T^2 Hotelling.

Prosedur untuk membangun bagan kendali T^2 Hotelling ini melalui dua tahapan, yaitu tahap awal yang disebut *start-up stage* dan tahap pengendalian proses. Tahap awal merupakan tahap penaksiran batas-batas kendali berdasarkan data historis. Sedangkan tahap kedua atau tahap pengendalian proses adalah tahap aplikasi bagan kendali untuk mendeteksi perubahan-perubahan yang terjadi pada suatu proses. Lebih lanjut akan dijelaskan pada subbab berikut ini.

Dalam membangun bagan kendali ini terdapat tiga kasus yang mungkin, yaitu:

(1). ukuran subgrup dengan $n = 1$,

(2). ukuran subgrup yang sama dengan $n > 1$

(3). ukuran subgrup yang berbeda dengan $n_i > 1$.

Fokus kajian pada tugas akhir ini mengenai bagan kendali T^2 Hotelling dengan observasi berupa subgrup yang sama.

3.2.1 Tahap Start Up Stage (Tahap Pertama)

Misalkan $X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k$ adalah sampel acak dari $N_p(\mu, \Sigma)$ dengan $k = 1,2,\ldots,m$ adalah banyaknya subgrup, dengan catatan subgrup yang satu dengan yang lainnya saling bebas.

Jika $X_i^k = \left(X_{i1}^k \quad X_{i2}^k \quad \cdots \quad X_{ip}^k\right)^T$, maka setiap subgrupnya dapat dinyatakan sebagai matriks-matriks berikut ini :

$$\begin{array}{cccc} Subgrup-1 & Subgrup-2 & \cdots & Subgrup-m \\ \begin{bmatrix} X_{11}^{1} & X_{12}^{1} & \cdots & X_{1p}^{1} \\ X_{21}^{1} & X_{22}^{1} & \cdots & X_{2p}^{1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n1}^{1} & X_{n2}^{1} & \cdots & X_{np}^{1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X_{11}^{2} & X_{12}^{2} & \cdots & X_{1p}^{2} \\ X_{21}^{2} & X_{22}^{2} & \cdots & X_{2p}^{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n1}^{2} & X_{n2}^{2} & \cdots & X_{np}^{2} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} X_{11}^{m} & X_{12}^{m} & \cdots & X_{1p}^{m} \\ X_{21}^{m} & X_{22}^{m} & \cdots & X_{2p}^{m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n1}^{m} & X_{n2}^{m} & \cdots & X_{np}^{m} \end{bmatrix} \end{array}$$

Pada tahap ini, digunakan statistik :

$$T_k^2 = n\left(\overline{X}^{(k)} - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1} \left(\overline{X}^{(k)} - \overline{\overline{X}}\right)$$

$$T_k^2 \sim \frac{p(m-1)(n-1)}{m(n-1)-p+1} F_{p,m(n-1)-p+1} \quad \text{atau} \quad T_k^2 \sim \frac{pmn-pm-pn+p}{mn-m-p+1} F_{p,mn-m-p+1}$$

dengan $\overline{X}^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{(k)}$, $\overline{X}^{(k)} \sim N_p\left(\mu, \frac{\Sigma}{n}\right)$

$$\overline{\overline{X}} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \overline{X}^{(k)}$$

$$S^{(k)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \left(X_i^k - \overline{X}^{(k)}\right)\left(X_i^k - \overline{X}^{(k)}\right)^T$$

$$\overline{S} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} S^{(k)}$$

Berdasarkan penjelasan di atas, batas-batas kendali untuk tahap awal ini adalah :

Upper Control Limit (UCL) $= \frac{pmn-pm-pn+p}{mn-m-p+1} F_{\alpha;p,mn-m-p+1}$

Lower Control Limit (LCL) = 0, karena $T^2 \geq 0$ (tidak pernah negatif).

Tahap awal untuk membangun bagan kendali ini dapat diringkas melalui langkah-langkah berikut:

1. Untuk setiap subgrup $k = 1,2,\ldots,m$, hitunglah rata-rata setiap subgrup

$$\overline{X}^{(k)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^{(k)}$$

2. Matriks variansi-kovariansi subgrup

$$S^{(k)} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^{k} - \overline{X}^{(k)}\right)\left(X_i^{k} - \overline{X}^{(k)}\right)^T$$

3. Rata-rata dari rata-rata subgrup (*the grand mean vector*)

$$\overline{\overline{X}} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \overline{X}^{(k)}$$

4. Matriks variansi-kovariansi gabungan (*the pooled covariance matrix*)

$$\overline{S} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} S^{(k)}$$

5. Untuk setiap subgrup $k = 1,2,\ldots,m$, hitunglah :

$$T_k^2 = n\left(\overline{X}^{(k)} - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}^{(k)} - \overline{\overline{X}}\right)$$

6. Untuk setiap subgrup $k = 1,2,\ldots,m$, bandingkan T_k^2 dengan batas atasnya.

   Upper Control Limit (UCL) $= \dfrac{pmn - pm - pn + p}{mn - m - p + 1} F_{\alpha;p,mn-m-p+1}$

   Jika $T_k^2 > UCL$, maka subgrup ke-*k* berada di luar kendali statistik (*out-of-control*), sehingga data pada subgrup ini tidak dapat digunakan untuk menghitung batas-batas kendali.

7. Hapuslah data subgrup yang *out-of-control*.

8. Kemudian hitung kembali $\overline{\overline{X}}$ dan $\overline{S}$ dengan menggunakan data-data subgrup yang *in-control*.

Setelah kedelapan langkah pada tahap awal di atas dilakukan, dan proses yang dihasilkan adalah proses yang *in-control*, maka akan dihasilkan nilai $\overline{\overline{X}}$ dan $\overline{S}$, yang kemudian akan digunakan pada tahap selanjutnya.

3.2.2 Tahap Pengendalian (Tahap Kedua)

Misalkan $\overline{\overline{X}}$ dan $\overline{S}$ masing-masing menyatakan *vector grand mean* sampel dan matriks variansi-kovariansi yang diperoleh dari tahap *start up stage* yang telah dijelaskan di atas. Misalkan pula pada subgrup berikutnya diperoleh *vector mean* sampel X_f. $\overline{X}_f$ bebas terhadap $\overline{\overline{X}}$ dan $\overline{S}$. Untuk selanjutnya akan diselidiki distribusi dari $T_f^2 = n\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)$.

Akan tetapi, sebelumnya akan diselidiki terlebih dahulu distribusi dari $\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}$.

Karena $\overline{X}_f$ dan $\overline{\overline{X}}$ saling bebas, dengan $\overline{X}_f \sim N_p\left(\mu, \frac{\Sigma}{n}\right)$ dan $\overline{\overline{X}} \sim N_p\left(\mu, \frac{\Sigma}{mn}\right)$, maka $\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right) \sim N_p\left(\mu - \mu, \frac{\Sigma}{n} + \frac{\Sigma}{mn}\right)$

Atau $\sqrt{\frac{mn}{m+1}}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right) \sim N_p(0, \Sigma)$. Pada pembahasan sebelumnya telah dibuktikan bahwa $S^{(k)} \sim W_p\left(n-1, \frac{1}{n-1}\Sigma\right)$ untuk setiap $k = 1, 2, \ldots, m$. Jadi $\overline{S} \sim W_p\left(m(n-1), \frac{1}{m(n-1)}\Sigma\right)$ akibatnya $\sqrt{\frac{mn}{m+1}}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right) \sim N_p(0, \Sigma)$ dan $m(n-1)\overline{S} \sim W_p(m(n-1), \Sigma)$.

Tulis bahwa :

$$T_f^2 = \frac{mn}{m+1}\frac{1}{m(n-1)}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)$$

$$= \frac{mn}{m+1}\frac{1}{m(n-1)}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)\frac{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}$$

$$= \frac{mn}{m+1}\frac{1}{m(n-1)}\frac{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)$$

$$= \frac{mn}{m+1}\frac{1}{m(n-1)}\frac{1}{\dfrac{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)$$

$$= \frac{\left[\dfrac{mn}{m+1}\right]}{\left[\dfrac{1}{m(n-1)}\right]}\frac{1}{\dfrac{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)$$

$$= \frac{\dfrac{mn}{m+1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}{\dfrac{1}{m(n-1)}\dfrac{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}}$$

$$= \frac{\dfrac{mn}{m+1}G}{\dfrac{1}{m(n-1)}H}$$

Dengan $G = \left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)$, dan $H = \dfrac{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \Sigma^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}{\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)^T \left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f - \overline{\overline{X}}\right)}$.

Menurut lemma 3.3 (ii) $H \sim \chi^2_{m(n-1)-p+1}$ dan saling bebas dengan G. Berdasarkan akibat teorema 2.4.8 diperoleh $G \sim \chi^2_p$.

Akibatnya $\dfrac{m(n-1)-p+1}{p}T_f^2 = \dfrac{\left(\dfrac{mn}{m+1}\right)G\Big/p}{\dfrac{1}{m(n-1)}H\Big/m(n-1)-p+1} \sim F_{p,m(n-1)-p+1}$.

Atau $\dfrac{m(n-1)-p+1}{p}\dfrac{mn}{m+1}\dfrac{1}{m(n-1)}\left(\overline{X}_f-\overline{\overline{X}}\right)^T\left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f-\overline{\overline{X}}\right) \sim F_{p,m(n-1)-p+1}$

Atau $T_f^2 = n\left(\overline{X}_f-\overline{\overline{X}}\right)^T\left(\overline{S}\right)^{-1}\left(\overline{X}_f-\overline{\overline{X}}\right) \sim \dfrac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-p+1}F_{p,m(n-1)-p+1}$

Jadi UCL $= \dfrac{p(m+1)(n-1)}{m(n-1)-p+1}F_{(\alpha;p,m(n-1)-p+1)}$, dan karena nilai $T^2 \geq 0$ (tidak pernah negatif), maka LCL = 0.

3.3 Analisis Kemampuan Proses (Process Capability Analyze)

Setelah proses yang dilakukan telah berada dalam kendali, maka langkah selanjutnya adalah melakukan analisis kemampuan proses (*Process Capability Analyze*). *Process Capability* ialah suatu kemampuan proses yang merefleksikan derajat keseragaman dalam memproduksi suatu produk untuk menghasilkan output sesuai dengan spesifikasi yang telah ditetapkan. Suatu proses memiliki kapabilitas yang baik bila :

a. Proses tersebut dalam kondisi terkendali

b. Proses tersebut memenuhi spesifikasi

c. Proses tersebut memiliki nilai presisi dan akurasi yang tinggi

- Akurasi adalah kedekatan nilai amatan dengan nilai sasarannya
- Presisi adalah kedekatan nilai amatan yang satu dengan nilai amatan yang lainnya (Ninindya, 2008).

Dalam menganalisis kemampuan proses ini dikenal istilah indeks kemampuan proses (*Capability index). Capability index* adalah suatu index yang mengggambarkan seberapa jauh proses tersebut dapat memenuhi spesifikasi yang diharapkan, atau dapat didefinisikan pula sebagai suatu indeks proses yang menunjukkan nilai rasio antara penyebaran (variabilitas) spesifikasi produk yang diijinkan terhadap spesifikasi produk yang diperbolehkan atau penyebaran proses aktual yang melibatkan lebih dari satu variabel. Dengan mengetahui *capability index*, akan membantu kita dalam memfokuskan pada *target value,* yaitu *value* yang paling diinginkan pelanggan.

Terdapat berbagai macam metode perhitungan indeks kemampuan proses multivariat seperti indeks kemampuan proses multivariat vektor, indeks kemampuan proses multivariate MC_{pm}, dan indeks kemampuan proses multivariat MC_p.

Pada tugas akhir ini metode yang digunakan dalam perhitungan indeks kemampuan proses multivariat adalah metode indeks kemampuan proses MC_{pm} yang diperkenalkan oleh Taam, Subbaiah, dan Liddy pada tahun 1993. Perhitungan indeks kemampuan proses dengan menggunakan metode ini dinilai lebih sensitif dan lebih mudah diterapkan. Selain itu, metode ini bisa mengindikasikan *variability*, *centeredness*, dan keduanya (Scagliarini & Vermiglio, 2007).

Perhitungan indeks kemampuan proses MC_{pm} ini didefinisikan sebagai rasio dari dua volume, R_1 merupakan daerah toleransi modifikasi, sedangkan R_2 merupakan daerah proses 99,73%, yang merupakan daerah yang terletak pada daerah $\pm 3\sigma$ didefinisikan melalui persamaan (3.1) (Michele Scagliarini, Raffaele Vermiglio, 2007).

$$MC_{pm} = \frac{vol(R_1)}{vol(R_2)} \qquad (3.1)$$

Apabila data berdistribusi normal multivariat, maka daerah R_2 berbentuk ellips, sedangkan R_1 (daerah toleransi modifikasi) adalah ellipsoid terbesar yang berpusat pada target yang berada di dalam daerah toleransi yang asli.

Dalam kasus umum *p*-variat, R_1 berbentuk hiperellipsoid dengan volume R_1 (Kendall, 1961) sebagai berikut :

$$vol(R_1) = \frac{2\prod_{i=1}^{p} a_i \pi^{p/2}}{p\Gamma(p/2)}$$

dimana a_i merupakan nilai toleransi spesifikasi ke-i (i = 1, 2, ... , p). Indeks *capability multivariate* ini dituliskan sebagai :

$$MC_{pm} = \frac{Vol(R_1)}{Vol\left[(X-\mu)^T \Sigma_{\mu_0}^{-1}(X-\mu)\right] \leq K(p)} \qquad (3.2)$$

Dengan X adalah vektor acak berukuran $(p \times 1)$ yang berdistribusi normal multivariat dengan vektor *mean* μ dan matriks kovarian Σ, $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$. Sedangkan $\Sigma_{\mu_0} = E\left((X-\mu_0)(X-\mu_0)^T\right)$ adalah matriks *mean square error* dari proses, μ_0 adalah suatu vektor yang menyatakan nilai target, dan $K(p)$ adalah 99.73 persentil dari χ^2 dengan derajat kebebasan *p*.

Penyebut dari indeks kemampuan proses MC_{pm} juga dapat dinyatakan sebagai hasil dari dua

$$Vol(R_2) = |\Sigma|^{1/2} (\pi K(p))^{p/2} \left[\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1 \right) \right]^{-1} \times \left[1 + (\mu - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0) \right]^{1/2}$$

$$= Vol(R_3) \times \left[1 + (\mu - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0) \right]^{1/2} \qquad (3.3)$$

Dengan R_3 adalah daerah dimana 99.73% dari suatu proses berada dalam wilayah tersebut.

Oleh karena itu berdasarkan persamaan (3.1) dan (3.3) MCpm dapat dinyatakan sebagai :

$$MC_{pm} = \frac{Vol(R_1)}{Vol(R_3) \times \left[1 + (\mu - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0) \right]^{1/2}}$$

$$= \frac{Vol(R_1)}{Vol(R_3)} \frac{1}{\left[1 + (\mu - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (\mu - \mu_0) \right]^{1/2}} = \frac{C_p}{D} \qquad (3.4)$$

Perkiraan/taksiran indeks MC_{pm} adalah sebagai berikut :

$$\hat{M}C_{pm} = \frac{Vol(R_1)}{|S|^{1/2} (\pi K)^{p/2} \left[\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1 \right) \right]^{-1}} \times \frac{1}{\left[1 + \frac{n}{n-1} \left(\overline{X} - \mu_0 \right)^T S^{-1} \left(\overline{X} - \mu_0 \right) \right]^{1/2}} = \frac{\hat{C}_p}{\hat{D}}$$

dengan

$$\hat{C}_p = \frac{Vol(R_1)}{Vol(\text{skala proses } 99.73\%)}$$

$$= \frac{Vol(R_1)}{|S|^{1/2} (\pi K)^{p/2} \left[\Gamma(p/2 + 1) \right]^{-1}}$$

dan
$$\hat{D} = \left[1 + \frac{n}{n-1} \left(\overline{X} - \mu_0 \right)^T S^{-1} \left(\overline{X} - \mu_0 \right) \right]^{1/2}$$

dimana K adalah quantil 99.73% dari distribusi χ^2

Ketika vektor *mean* proses sama dengan vektor target dan indeksnya bernilai 1, maka 99.73% nilai proses terletak didalam daerah toleransi modifikasi. Perkiraan indeks $\hat{C}_p$ analog dengan indeks C_p pada kasus univariat yaitu jika indeks bernilai lebih dari 1 maka proses mempunyai variansi yang lebih kecil dibandingkan dengan batas spesifikasi, sedangkan jika indeks bernilai kurang dari 1 maka proses mempunyai variasi lebih besar. Untuk $0 < 1/\hat{D} < 1$ menunjukkan kedekatan antara mean proses dan target, semakin besar nilai $1/\hat{D}$ maka mean semakin dekat dengan target (Scagliarini &Vermiglio, 2007).